第二次习题讨论课

守恒定律和刚体定轴转动

内容

功、动能、动量定理、角动量定理
基本概念

- 功：质点在力 $\vec{F}$ 的作用下有位移 $\mathrm{d}\vec{r}$，该力做的功

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\mathrm{d}r\cos\theta, \quad W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

- 动能（运动状态速率 v 的函数）：$\frac{1}{2}mv^2$（质点动能）
- 动能定理
  - 质点的动能定理：$W_{AB} = E_{kB} - E_{kA}$（合外力对质点做的功等于质点动能的增量）
  - 质点系的动能定理：$W_{外} + W_{内} = E_{kB} - E_{kA}$（外力对质点系做的功与内力对质点系做的功之和等于质点系总动能的增量）
- 保守力：沿任意闭合回路作功为 0 的力（作功与力的路径无关）
- 势能（位置的函数，由保守力引入：$f = -\nabla_{\vec{r}}U$）
  - 重力势能：mgh
  - 引力势能：$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
  - 弹性势能：$\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$
- 质心：$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$，或 $\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$
- 质心运动定理：$\vec{F}_{外} = m\vec{a}_C$
- 克尼希定理：$E_k = E_k^{CM} + E_C$
- 质点的角动量：$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v}$
- 角动量定理：$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

讨论题

1. 判断下列有关角动量说法的正误

(1) 质点系的动量为 0，则总角动量一定为 0。

(2) 一质点作直线运动，质点的角动量一定为 0。

(3) 一质点作直线运动，质点的角动量一定不变。

(4) 一质点作匀速圆周运动，其动量方向在不断改变，所以角动量的方向也随之不断改变。

讨论题

1. 判断下列有关角动量说法的正误

(1) 质点系的动量为 0，则总角动量一定为 0。

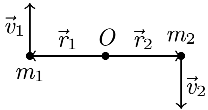
(2) 一质点作直线运动，质点的角动量一定为 0。

(3) 一质点作直线运动，质点的角动量一定不变。

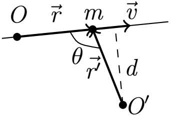
(4) 一质点作匀速圆周运动，其动量方向在不断改变，所以角动量的方向也随之不断改变。

解：

(1) $\sum_i m_i\vec{v}_i \nRightarrow \sum_i m_i\vec{r}_i \times \vec{v}_i$



(2) 与参考点有关（是否在运动直线上）



(3) 不一定不变

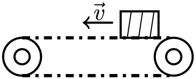
- $m\vec{r'} \times \vec{v} = mv(r' \sin\theta) = mvd$
- 如果是变速直线运动
  → 存在沿运动所在直线的合外力 $\vec{F}$
  → 力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \neq 0$

(4) 不一定。
例如，考虑参考点在运动所在平面圆周内和圆周外的情况。

讨论题

2. 一个水平传送带受电机驱动，保持匀速运动。现在传送带上轻轻放置一砖块，则在砖块刚被放上到与传送带共同运动的过程中:

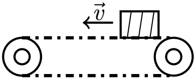
(1) 摩擦力对皮带做的功与摩擦力对砖块做的功等值反号
(2) 驱动力的功与摩擦力对砖块做的功之和等于砖块获得的动能
(3) 驱动力的功与摩擦力对皮带做的功之和为 0
(4) 驱动力的功等于砖块获得的动能
(5) 以上结论都不对



讨论题

2. 一个水平传送带受电机驱动，保持匀速运动。现在传送带上轻轻放置一砖块，则在砖块刚被放上到与传送带共同运动的过程中:

(1) 摩擦力对皮带做的功与摩擦力对砖块做的功等值反号
(2) 驱动力的功与摩擦力对砖块做的功之和等于砖块获得的动能
(3) 驱动力的功与摩擦力对皮带做的功之和为 0
(4) 驱动力的功等于砖块获得的动能
(5) 以上结论都不对



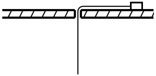
答案：(3)

(1) 中砖块放上时，两者存在相对运动，摩擦力做功大小不等。

(2) 与 (4) 驱动力的功是作用在皮带上的，不能改变砖块的动能，驱动力的功与砖块的动能增量在数值上不能用动能定理直接联系。

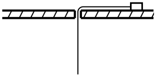
讨论题

3. 一物体在光滑的水平桌面上，有一绳其一端连接此物体，另一端穿过桌面上的一个小孔。该物体原以一定的角速度在桌面上以小孔为圆心做圆周运动。在小孔下缓慢地往下拉绳的过程中，物体的动能、动量，对小孔的角动量是否发生变化？



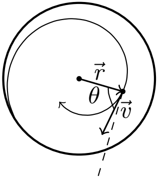
讨论题

3. 一物体在光滑的水平桌面上，有一绳其一端连接此物体，另一端穿过桌面上的一个小孔。该物体原以一定的角速度在桌面上以小孔为圆心做圆周运动。在小孔下缓慢地往下拉绳的过程中，物体的动能、动量，对小孔的角动量是否发生变化?

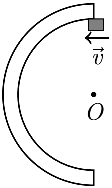


解:

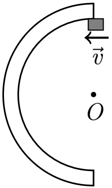
- 动能改变
  物体做离小孔距离不断缩小的螺线运动 → 绳对物体的拉力方向与物体位移的方向夹角小于 90°→ 拉力做正功 → 由动能定理，物体的动能不断增加
- 动量改变
  - 物体速度大小和方向均变化 → 动量变化
  - 物体受到绳子拉力、重力和支持力 → 重力和支持力平衡 → 合外力为拉力 → 该拉力的冲量改变物体动量
- 角动量不变
  拉力方向始终通过小孔 → 力矩为 0→ 由角动量定理，物体对小孔的角动量不变



1. 在光滑的水平桌面上，水平放置一固定的半圆形屏障，有一质量为 m 的滑块以初速度 v_0 沿切线方向进入屏障的一端，如图所示。设滑块与屏障间的摩擦系数为 μ。证明：当滑块从屏障的另一端滑出时，摩擦力所做的功为
$W_f = \frac{1}{2}mv_0^2(\mathrm{e}^{-2\mu\pi} - 1)$。



1. 在光滑的水平桌面上，水平放置一固定的半圆形屏障，有一质量为 m 的滑块以初速度 v_0 沿切线方向进入屏障的一端，如图所示。设滑块与屏障间的摩擦系数为 μ。证明：当滑块从屏障的另一端滑出时，摩擦力所做的功为 $W_f = \frac{1}{2}mv_0^2(\mathrm{e}^{-2\mu\pi} - 1)$。



解：

滑块作圆周运动，根据牛顿定律：

法向

$$N = m\frac{v^2}{R}$$

切向

$$f = -\mu N = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{mv}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$$

由以上两式可得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\mu \mathrm{d}\theta$$

两边积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta \Rightarrow v = v_0\mathrm{e}^{-\mu\pi}$$

由动能定理可得摩擦力作功

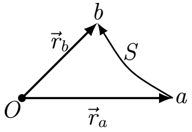
$$W_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2(\mathrm{e}^{-2\mu\pi} - 1)$$

计算题
明确保守力的性质及功的计算

2. 质点在力的作用下由位置 $\vec{r}_a$ 运动到位置 $\vec{r}_b$，经过的路程为 S。如果力的函数分别为：$\vec{f}_1 = k\hat{\vec{r}}$ 或 $\vec{f}_2 = k\hat{\vec{v}}$ （其中 k 为常数，$\hat{\vec{t}}$ 和 $\hat{\vec{v}}$ 分别是沿径矢和速度方向的单位矢量）。

(1) 分别求两种力在该过程中所做的功；

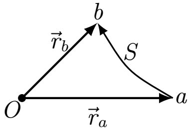
(2) 说明 $\vec{f}_1$ 和 $\vec{f}_2$ 哪个是保守力。



2. 质点在力的作用下由位置 $\vec{r}_a$ 运动到位置 $\vec{r}_b$，经过的路程为 S。如果力的函数分别为：$\vec{f}_1 = k\hat{\vec{r}}$ 或 $\vec{f}_2 = k\hat{\vec{v}}$（其中 k 为常数，$\hat{\vec{t}}$ 和 $\hat{\vec{v}}$ 分别是沿径矢和速度方向的单位矢量）。

(1) 分别求两种力在该过程中所做的功；

(2) 说明 $\vec{f}_1$ 和 $\vec{f}_2$ 哪个是保守力。



解：

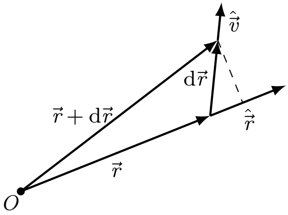
(1)

$$W_1 = \int_a^b k\hat{\vec{r}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = k\int_a^b dr = k(|\vec{r}_b| - |\vec{r}_a|)$$

$$W_2 = \int_a^b k\hat{\vec{v}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = k\int_a^b \mathrm{d}S = kS$$

(2) $\vec{f}_1$ 做的功与路径无关，只与物体的始末位置有关，是保守力。

$\vec{f}_2$ 做的功与路径有关，非保守力。



1. 动量守恒定律：当一个质点系所受的**合外力**为 0 时，这一质点系的总动量保持不变。

$$\sum \vec{F}_{外} = 0 \Rightarrow \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \textbf{const}$$

$$\sum \vec{F}_\alpha = 0 \Rightarrow \sum m_i \vec{v}_{i\alpha} = p_\alpha = \textbf{const} \quad (\alpha = x, y, z)$$

2. 角动量守恒定律：如果对于某个固定点，质点所受的合外力矩为 0，则此质点对该固定点的角动量矢量将保持不变。

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow L = \textbf{const}$$

3. 机械能守恒定律：在**只有保守内力作功**的情况下，系统的机械能保持不变

$$W_{外} + W_{内非} = 0 \Rightarrow E = E_k + E_p = \textbf{const}$$

注意分析和区分各个守恒定律的**守恒条件**。

讨论题

1. 试判断下列说法的正误:
   (1) 不受外力作用的系统，它的动量和机械能必然同时守恒。
   (2) 内力都是保守力的系统，当它所受和合外力为 0 时，它的机械能必然守恒。
   (3) 只有保守内力作用又不受外力作用的系统，它的动量和机械能必然都守恒。

讨论题

1. 试判断下列说法的正误:
   (1) 不受外力作用的系统，它的动量和机械能必然同时守恒。
   (2) 内力都是保守力的系统，当它所受和合外力为 0 时，它的机械能必然守恒。
   (3) 只有保守内力作用又不受外力作用的系统，它的动量和机械能必然都守恒。

答:

(1) 不受外力作用 $\Rightarrow$ 动量守恒
非保守内力作功不一定为 0，故机械能不一定守恒

(2) 合外力为 0$\Rightarrow$ 合外力作功为 0?

- 对单质点系统，合外力为 0$\Rightarrow$ 合外力作功为 0
- 对多质点系统，外力可以作用于不同的质点，每个质点的位移可以不同，因此 $\sum \vec{F} = 0 \nRightarrow \sum \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$，即合外力做功不一定为 0

因此，系统的机械能不一定守恒。

(3) 动量和机械能均守恒

讨论题

2. 判断在下列几种情况中机械能是否守恒:
    (1) 当物体在空气中下落时，以物体和地球为系统
    (2) 当地球表面物体匀速上升时，以物体与地球为系统（不计空气阻力）
    (3) 子弹水平地射入放在光滑水平桌面上的木块内，以子弹和木块为系统
    (4) 当一球沿光滑的固定斜面向下滑动时，以小球和地球为系统

讨论题

2. 判断在下列几种情况中机械能是否守恒：

(1) 当物体在空气中下落时，以物体和地球为系统

(2) 当地球表面物体匀速上升时，以物体与地球为系统（不计空气阻力）

(3) 子弹水平地射入放在光滑水平桌面上的木块内，以子弹和木块为系统

(4) 当一球沿光滑的固定斜面向下滑动时，以小球和地球为系统

解：

(1) 空气阻力（外力）对物体做负功，系统机械能不守恒；

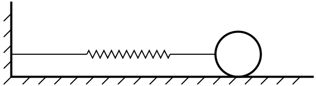
(2) 为使物体匀速上升，一定存在使物体所受重力相等的力，此力对于物体和地球系统为外力，对物体做正功，系统机械能不守恒；

(3) 对于子弹和木块系统，摩擦力做的功是非保守内力做的功，系统机械能不守恒；

(4) 对小球和地球系统，斜面的支持力为外力，但其与小球位移垂直，故不做功。而系统仅受保守内力（重力）作用，因此系统的机械能守恒。

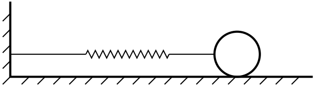
讨论题

3. 轻质弹簧放在水平光滑桌面上，一端与墙固定相连、另一端系一小球。拉长弹簧后放手，在小球的振动过程中，弹簧与小球系统的动量、动能和机械能守恒吗?



讨论题

3. 轻质弹簧放在水平光滑桌面上，一端与墙固定相连、另一端系一小球。拉长弹簧后放手，在小球的振动过程中，弹簧与小球系统的动量、动能和机械能守恒吗？

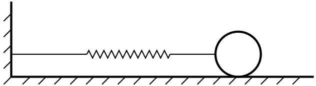


解：

- 弹簧和小球系统所受墙的作用为外力，故系统动量不守恒
- 墙对弹簧的作用力对作用点无位移，做功为 0，系统运动过程中只有保守内力作功，故系统动能不守恒，机械能守恒。

讨论题

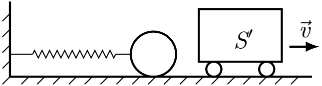
3. 轻质弹簧放在水平光滑桌面上，一端与墙固定相连、另一端系一小球。拉长弹簧后放手，在小球的振动过程中，弹簧与小球系统的动量、动能和机械能守恒吗？



解：

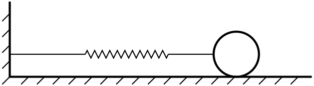
- 弹簧和小球系统所受墙的作用为外力，故系统动量不守恒
- 墙对弹簧的作用力对作用点无位移，做功为 0，系统运动过程中只有保守内力作功，故系统动能不守恒，机械能守恒。

在小车参考系 S' 中，弹簧-小球系统的机械能是否守恒？



讨论题

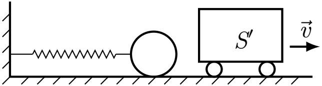
3. 轻质弹簧放在水平光滑桌面上，一端与墙固定相连、另一端系一小球。拉长弹簧后放手，在小球的振动过程中，弹簧与小球系统的动量、动能和机械能守恒吗？



解：

- 弹簧和小球系统所受墙的作用为外力，故系统动量不守恒
- 墙对弹簧的作用力对作用点无位移，做功为 0，系统运动过程中只有保守内力作功，故系统动能不守恒，机械能守恒。

在小车参考系 S' 中，弹簧-小球系统的机械能是否守恒？

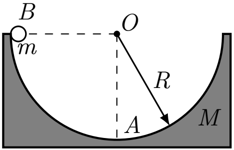


墙对系统的作用力对作用点有位移，系统机械能不守恒。

计算题

动量守恒与机械能守恒综合应用

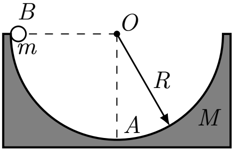
1. 一质量为 M 具有半球形凹陷面的物体静止在光滑水平桌面上。凹陷球面的半径为 R，表面光滑。在凹陷面上缘 B 处放置一质量为 m 的小球，释放后，小球下滑。当小球下滑至最低处 A 时，M 物体对小球的作用力 N 为多大?



计算题

动量守恒与机械能守恒综合应用

1. 一质量为 M 具有半球形凹陷面的物体静止在光滑水平桌面上。凹陷球面的半径为 R，表面光滑。在凹陷面上缘 B 处放置一质量为 m 的小球，释放后，小球下滑。当小球下滑至最低处 A 时，M 物体对小球的作用力 N 为多大？



$$mv_1 + Mv_2 = 0$$

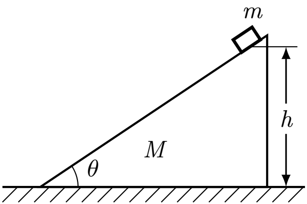
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 = mgR$$

$$N - mg = m\frac{(v_1 - v_2)^2}{R}$$

计算题

动量守恒与机械能守恒综合应用

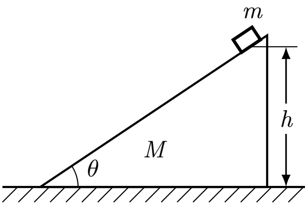
2. 一质量为 M、倾角为 θ 的斜面，放在光滑水平面上，物体 m 从高为 h 处由静止开始无摩擦地下滑。求物体 m 从 h 处滑到底端这一过程中对斜面做的功 W，以及斜面后退的距离 S。



计算题

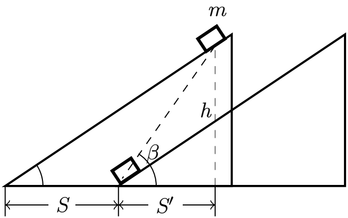
动量守恒与机械能守恒综合应用

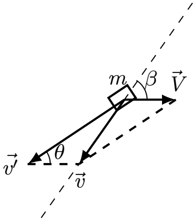
2. 一质量为 M、倾角为 θ 的斜面，放在光滑水平面上，物体 m 从高为 h 处由静止开始无摩擦地下滑。求物体 m 从 h 处滑到底端这一过程中对斜面做的功 W，以及斜面后退的距离 S。



解：物体 m 下滑时，斜面 M 也随之后退

($\vec{v}$ 为物体 m 相对地面速度，$\vec{V}$ 为斜面 M 相对地面速度，$\vec{v}'$ 为物体 m 在斜面 M 参考系的速度)





以地面为参考系。m 与 M 系统因水平方向合外力为 0，所以水平方向动量守恒。

$$mv\cos\beta - MV = 0$$

对 m、M 及地球系统，机械能是否守恒?

m、M 的相互作用力分别对 m、M 做功，这是非保守内力的功，需要证明这对力的作功之和为 0。

以 $\vec{N}$、$\vec{N}'$ 表示这对支持力，根据牛顿第三定律：$\vec{N} = \vec{N}'$。

对 m 和 M 做的功分别表示为 $\mathrm{d}W_{\vec{N}}$ 和 $\mathrm{d}W_{\vec{N}'}$，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W_{\vec{N}} + \mathrm{d}W_{\vec{N}'} &= \vec{N}\cdot\mathrm{d}\vec{S}_{m地} + \vec{N}'\cdot\mathrm{d}\vec{S}_{M地} \\ &= \vec{N}\cdot(\mathrm{d}\vec{S}_{m地} - \mathrm{d}\vec{S}_{M地}) \\ &= \vec{N}\cdot\mathrm{d}\vec{S}_{mM}\end{aligned}$$

由于 $\vec{N}\perp\mathrm{d}\vec{S}_{mM}$，因此 $\mathrm{d}W_{\vec{N}} + \mathrm{d}W_{\vec{N}'} = 0$，即这对非保守力做功为 0。

此外，由于地面对 M 的支持力不做功，因此系统的机械能守恒。

解法 1：

选择地面为势能零点，根据机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = mgh$$

S' 为 m 相对于地面的位移

$$\frac{h}{S'} = \tan\beta, \quad \frac{h}{S+S'} = \tan\theta$$

由水平方向的动量守恒：

$$mv_x = MV$$

$$m\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

$$\int m\mathrm{d}S' = \int M\mathrm{d}S$$

$$mS' = MS$$

$$W = \frac{1}{2}MV^2$$

由上述方程可得

$$W = \frac{Mm^2gh\cos^2\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}, \quad S = \frac{mh\cos\theta}{(M+m)\sin\theta}$$

解法 2：

$\vec{v'}$ 为相对于 M 的速度，由伽利略速度变换：

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{V}$$

水平方向：$v_x = v' \cos\theta - V$，（$V_x = V$）

竖直方向：$v_y = v' \sin\theta$，（$V_y = 0$）

m、M 系统水平方向上动量守恒：

$$MV - m(v' \cos\theta - V) = 0$$

系统的机械能守恒：

$$\frac{1}{2}m\left[(v' \cos\theta - V)^2 + (v' \sin\theta)^2\right] + \frac{1}{2}MV^2 = mgh$$

同样可以解出 $W = \frac{1}{2}MV^2$。

解法 3:
从牛顿第二定律出发，分析 m 和 M 受力情况。

对物体 m，沿斜面向下方向:

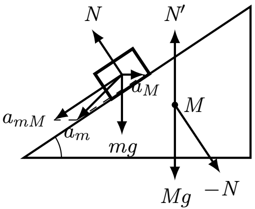
$$mg\sin\theta = ma_{mx'}$$

垂直斜面方向:

$$mg\cos\theta - N = ma_{my'}$$

对斜面 M，水平方向:

$$N\sin\theta = Ma_M$$



由于物块始终在斜面上，因此有

$$a_{my'} = a_M\sin\theta$$

由以上各式解得

$$a_M = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{m\sin^2\theta + M}$$

则对 M 做功

$$W = Ma_M S$$

从质心的角度出发计算斜面水平方向位移 S:

考虑物块和斜面组成的系统,

系统受竖直方向的重力和桌面的支持力,所受水平方向的合外力为 0。

因此系统质心在水平方向的位移为 0

$$mS' + (-S)M = 0$$

且由几何条件:

$$\frac{h}{S+S'} = \tan\theta$$

因此得到斜面 M 的位移:

$$S = \frac{mh\cos\theta}{(M+m)\sin\theta}$$

- 描述刚体转动的物理量及运动学公式
  - 角速度：$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
  - 角加速度：$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
  - 线量和角量关系：$v = r\omega$，$a_t = r\alpha$，$a_n = r\omega^2$
  - 匀角加速转动公式：$\omega = \omega_0 + \alpha t$，$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$，$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$
- 刚体定轴转动定律：$M = I\alpha$（注意 M 是外力力矩之和，不是合外力的力矩）
- 刚体的转动惯量：$I = \sum m_i r_i^2$，$J = \int r^2 dm$
  平行轴定理：$I = I_C + md^2$
- 刚体转动的功和能
  - 力矩的功：$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$
  - 转动动能：$E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$
  - 刚体的重力势能：$E_p = mgh_C$
- 刚体的机械能守恒定律：只有保守力的力矩做功时，刚体的转动动能和势能之和为常量，$\frac{1}{2} J\omega^2 + mgh_C = \mathbf{const}$
- 刚体的角动量定理：对一固定轴的合 外力矩等于刚体对该轴的角动量对时间的变化率，即 $M_z = \frac{dL_z}{dt}$，$L_z = J_z\omega$
- 刚体角动量守恒定律：刚体（系统）所受的外力对某固定轴的合 外力矩为 0 时，则刚体（系统）对此轴的总角动量保持不变，即 $\sum J_z\omega = \mathbf{const}$

讨论题

1. 有两个力作用在一个有固定轴的刚体上。判断下列说法是否正确:

   (1) 这两个力都平行于轴作用时,它们对轴和合力矩一定是零;

   (2) 这两个力都垂直于轴作用时,它们对轴和合力矩可能是零;

   (3) 当这两个力的合力为零时,它们对轴的合力矩也一定是零;

   (4) 当这两个力的合力矩为零时,它们对轴的合力也一定是零。

2. 一个质量均匀分布的物体可以绕定轴作无摩擦的匀角速度转动。当它受热或受冷(即膨胀和收缩时),角速度是否改变?

讨论题

1. 有两个力作用在一个有固定轴的刚体上。判断下列说法是否正确:
   (1) 这两个力都平行于轴作用时，它们对轴和合力矩一定是零;
   (2) 这两个力都垂直于轴作用时，它们对轴和合力矩可能是零;
   (3) 当这两个力的合力为零时，它们对轴的合力矩也一定是零;
   (4) 当这两个力的合力矩为零时，它们对轴的合力也一定是零。

2. 一个质量均匀分布的物体可以绕定轴作无摩擦的匀角速度转动。当它受热或受冷（即膨胀和收缩时)，角速度是否改变?

将物理视为绕定轴转动的质点组，因外力矩为 0，所以角动量守恒。
当物体热胀时，可认为每个质点与转轴的距离加大，转动惯量也随之变大。根据角动量守恒定律，物体的角速度要变小;
反之，物体变冷收缩时，质点与轴的距离变小，转动惯量也变小，物体的角速度变大。

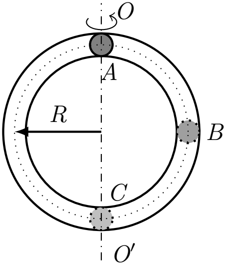
讨论题

3. 一内壁光滑的圆环形细管，正绕竖直光滑固定轴 OO' 自由转动。管是刚性的，转动惯量为 J。环的半径为 R，初角速度为 ω_0，一质量为 m 的小球静止于管内的最高点。由于微小扰动，小球向下滑动。判断小球在管内下滑过程中，下列说法是否正确：

(1) 地球、环与小球系统的机械能不守恒；

(2) 小球的动量不守恒；

(3) 小球对 OO' 轴的角动量守恒。



解：

(1) 对小球、环管和地球系统，外力的功为 0，非保守力内力只有一对小球和管壁的相互作用力 $\vec{N}$ 和 $\vec{N}'$。在小球下滑过程中，管壁压力始终与小球相对管壁的速度方向（与管壁相切）垂直，所以 $\vec{N}$ 和 $\vec{N}'$ 这一对力做功之和为 0，此结论与参考系的选择无关，所以有 $W_{\text{非保内}} = 0$，因此系统满足机械能守恒条件，其机械能是守恒的。

(2) 小球在下滑过程中始终受到管壁的作用力和重力，而此二力的方向不在同一条直线上，所以合力不为 0，这就使小球的动量不断发生变化。

(3) 小球对 OO' 轴的角动量不守恒。

- 最开始小球对 OO' 的角动量为 0；下滑至管中间时，对 OO' 轴的角动量不为 0
- 小球下滑时管壁的压力方向并不通过 OO' 轴，因而对 OO' 轴有力矩，角动量不守恒。

计算题

角动量守恒定律与机械能守恒定律的综合应用

1. 对讨论题 3，求出当小球滑到环的水平直径的端点 B 时，环的角速度为多少？小球相对环的速度为多少？当小球滑到最低处 C 点时，环的角速度及小球相对于环的速度又各是多少？

计算题

角动量守恒定律与机械能守恒定律的综合应用

1. 对讨论题 3，求出当小球滑到环的水平直径的端点 B 时，环的角速度为多少？小球相对环的速度为多少？当小球滑到最低处 C 点时，环的角速度及小球相对于环的速度又各是多少？

解：

对小球和环系统，在小球下滑过程中系统的合 外力矩为 0，系统的角动量守恒。小球从 A 到 B 的过程：

$$J\omega_0 = (J + mR^2)\omega_B$$

对小球、环、地球系统机械能守恒。取过环心的水平面为势能零点，则有

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2}J\omega_B^2 + \frac{1}{2}m(\omega_B^2 R + v_B^2)$$

其中 v_B 为小球相对于环的速度。可以解得

$$v_B = \sqrt{2gR + \frac{J\omega_0^2 R^2}{mR^2 + J}}$$

当小球滑到了 C 点，由角动量守恒定律：

$$J\omega_0 = J\omega_C \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \omega_C$$

即环的角速度又回到了 ω_0。因环的机械能 E 不变，根据机械能守恒定律

$$E + \frac{1}{2}mv_C^2 = mg(2R) + E$$

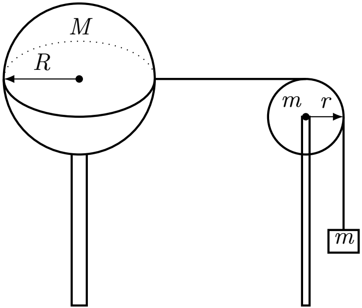
求出小球相对环的速度

$$v_C = \sqrt{4gR}$$

计算题

牛顿定律与刚体定轴转动定律的综合应用

2. 一个质量为 M、半径为 R 的均匀球壳可绕一光滑竖直中轴转动。一根不形变的轻绳绕在球壳的水平最大圆周上，又跨过一个质量为 m、半径为 r 的均匀圆盘，此圆盘具有光滑的水平轴，然后在下端系一质量也为 m 的物体。求当物体由静止下落 h 时，其速度多大？



两种可行思路：

- 分析物体受力，利用转动定理、牛顿定律求解物体 m 运动
- 利用守恒定律

解法 1：

设 $\vec{T}_1$ 为绳对球壳的水平拉力，α_1 为球壳的角加速度，则对球壳应用转动定律：

$$T_1 R = \left(\frac{2}{3} M R^2 \alpha_1\right)$$

圆盘 m 受水平拉力 $\vec{T}_1'$（$= -\vec{T}_1$）与竖直拉力 $\vec{T}_2$，以 α_2 表示圆盘的角加速度，则对圆盘 m 用转动定律可得

$$(T_2 - T_1) r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha_2$$

物体受绳子的拉力 $\vec{T}_2'$（$= -\vec{T}_2$）与重力 mg，设其加速度为 $\vec{\alpha}$，则根据牛顿定律有

$$mg - T_2 = ma$$

由于绳子在球壳表面和盘缘上不打滑，所以

$$\alpha_1 R = a \tag{1}$$

$$\alpha_2 r = a \tag{2}$$

联立以上方程可求得 a，再利用 $v = \sqrt{2ah}$ 可得

$$v = \left(\frac{12mgh}{4M + 9m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

解法 2：
对球壳、圆盘、物体和地球系统，因只有保守力做功，所以机械能守恒，现选 m 初始的高度为势能零点，则有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}MR^2\right)\omega_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega_2^2-mgh+\frac{1}{2}mv^2=0$$

上式中 ω_1 和 ω_2 分别表示球壳与圆盘在物体下落 h 时的角速度，v 为 m 的速度。它们还有下列关系：

$$\omega_1 R=v$$
$$\omega_2 r=v$$

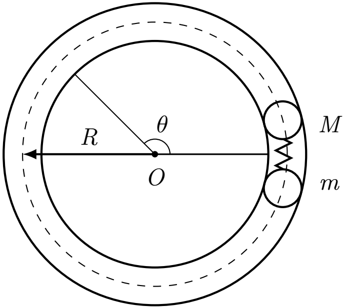
由以上各式可解出

$$v=\left(\frac{12mgh}{4M+9m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

3. 两个质量分别为 m 与 M 的小球，位于一固定的半径为 R 的水平光滑圆形槽内. 一轻弹簧被压缩在两球间 (未与球连接)，忽略两球间的微小距离. 用线将两球缚紧，并使之静止.

(1) 今把线烧断，两球被弹开后沿相反方向在沟槽运动，问此后 M 转过多大角度后会与 m 碰撞?

(2) 设原来储存在被压缩的弹簧中的势能为 U_0，问线断后两球经过多长时间发生碰撞?



解: (1) 对两球系统, 系统角动量守恒.
(弹簧对两者的推力对通过圆心 O 的竖直轴的力矩大小相等, 方向相反, 合力矩为零.
其他外力中, 重力和槽底对球的支持力沿竖直方向, 槽壁对球的压力指向圆心, 它们对上述轴的合力矩也是零)
以 ω_M 和 ω_m 分别表示二球刚脱离弹簧时角速度的大小, 由于原来二者的角动量为零, 根据角动量守恒

$$MR^2\omega_M - mR^2\omega_m = 0 \Rightarrow M\omega_M = m\omega_m$$

此后两球和角动量都不再变化, 因而都将沿槽做匀速圆周运动. 设分离后 M 转过 Θ 角, m 转过 θ 角后两者相遇, 应该有

$$\Theta + \theta = 2\pi$$

$$\omega_M = \frac{\Theta}{\Delta t}, \quad \omega_m = \frac{\theta}{\Delta t}$$

由以上各式可得

$$\Theta = \frac{2\pi m}{M+m}$$

(2) 以两球和弹簧为系统, 系统的机械能守恒.
(没有非保守内力且外力做功为零)

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_M^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega_m^2 = U_0$$

由 (1) 中 $M\omega_M = m\omega_m$ 可得

$$\omega_M = \left[\frac{2mU_0}{M(M+m)R^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

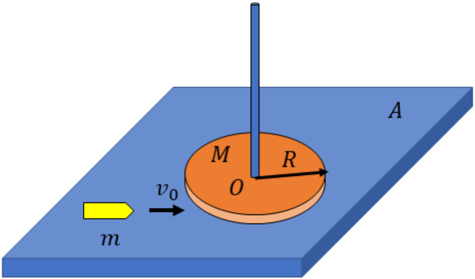
再利用 (1) 中求出得 Θ 可得

$$\Delta t = \frac{\Theta}{\omega_M} = \left[\frac{2\pi^2 mMR^2}{(m+M)U_0}\right]^{\frac{1}{2}}$$

4. 半径为 R, 质量为 M 的匀质圆盘, 可绕通过其中心 O 的竖直固定光滑轴在粗糙的水平面 A 上转动, 摩擦系数为 μ. 初始时圆盘静止, 一质量为 m 的子弹以速度 v_0 沿圆盘的切线打入圆盘, 并嵌在圆盘边缘上与圆盘一起转动. 求 (子弹的摩擦阻力矩忽略不计):

(1) 子弹嵌入圆盘后, 圆盘开始转动的角速度;

(2) 从圆盘开始转动到停止转动所经历的时间.



解:

(1) 以子弹 m 和圆盘 M 为系统, 由于子弹打入圆盘的短暂过程中, 冲力的力矩大小远大于静摩擦力矩, 因此可认为系统对固定轴 O 的角动量守恒.

设子弹 m 打入圆盘 M 后一起获得角速度 ω 但尚未转动, 则有

$$mRv_0 = \left(mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2mv_0}{(2m+M)R}$$

(2) 子弹和圆盘以角速度 ω 开始转动.

因受到摩擦力矩的作用, 其转速逐渐减小, 经过时间 t 后停止转动.

圆盘-子弹系统受到的摩擦力矩为

$$M_f = \int_0^R \mu g \frac{m+M}{\pi R^2} 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{2}{3}\mu(m+M)gR$$

由转动定律

$$-M_f = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}, \quad J = mR^2 + \frac{1}{2}MR^2$$

有

$$-\frac{2}{3}\mu(m+M)gR = \left(mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

上式分离变量后积分得

$$\int_0^t \mathrm{d}t = -\frac{3}{4}\frac{(2m+M)R}{\mu(m+M)g}\int_\omega^0 \mathrm{d}\omega$$

解得

$$t = \frac{3}{4}\frac{(2m+M)R}{\mu(m+M)g}$$

把 (1) 中结果带入上式得

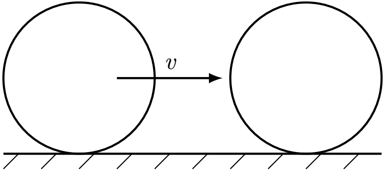
$$t = \frac{3mv_0}{2\mu(m+M)g}$$

计算题

5. 两个完全相同的均匀球, 球的质量均为 M, 一个球无滑动地水平滚动, 以速度 v 撞向另一个静止的球. 假定摩擦力足够小, 使得它在碰撞过程中的作用可以忽略. 而碰撞可以看成时完全弹性的.

(a) 在碰撞后足够长的时间之后, 每个球又作无滑动的滚动. 试求这时每个球的速度.

(b) 初始能量中由于摩擦力而转换的热能是多少?

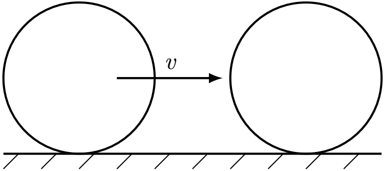


计算题

5. 两个完全相同的均匀球, 球的质量均为 M, 一个球无滑动地水平滚动, 以速度 v 撞向另一个静止的球. 假定摩擦力足够小, 使得它在碰撞过程中的作用可以忽略. 而碰撞可以看成时完全弹性的.

(a) 在碰撞后足够长的时间之后, 每个球又作无滑动的滚动. 试求这时每个球的速度.

(b) 初始能量中由于摩擦力而转换的热能是多少?



答案: (1) $\frac{2}{7}v$, $\frac{5}{7}v$. (2) $\frac{2}{7}Mv^2$