

基物 1 第 1 次讨论课

胡晓凡张彬王宇逸

2022 年 3 月 24 日

1 例 1

解：对 B：

$$T^2 = m_B^2(g^2 + a^2), \quad (1)$$

对 A：

$$T = m_A a, \quad (2)$$

对整体：

$$F = (m_A + m_B + m_{\text{car}})a, \quad (3)$$

三个方程，三个未知数，解得：

$$F = \frac{m_A + m_B + m_{\text{car}}}{\sqrt{m_A^2 - m_B^2}} m_B g. \quad (4)$$

2 例 2

设：悬在空中的绳子长度为 l ，认为绳子在桌面上的部分保持静止（这合理吗？），对于绳子的悬空部分：

$$(F - mg)dt = d(mv) = vdm + m dv, \quad (5)$$

其中：

$$m = \lambda l, \quad (6)$$

则：

$$(F - \lambda l g)dt = v \lambda dl + \lambda l dv, \quad (7)$$

则:

$$F - \lambda gl = \lambda v \dot{l} + \lambda l \dot{v} = \lambda(\dot{l}^2 + l\ddot{l}). \quad (8)$$

恒定加速度时, $\ddot{l} = a, \dot{l} = at, l = \frac{1}{2}at^2$, 则:

$$F = \lambda(g + 3a)l. \quad (9)$$

恒定速度时, $\ddot{l} = 0, \dot{l} = v, l = vt$, 则:

$$F = \lambda(gl + v^2).$$

3 例 3

解: 在转动系中, 珠子沿钢丝作直线运动. 钢丝方向上的力只有离心力:

$$F = m\omega^2 x = m\ddot{x}, \quad (10)$$

这个一阶线性微分方程的解为

$$x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}. \quad (10)$$

其中 A 和 B 由初始条件决定. 如当初始位移为 x_0 , 初速度 v_0 时, 根据初始条件 $\begin{cases} A + B = x_0, \\ A\omega - B\omega = v_0 \end{cases}$ 得到 $\begin{cases} A = (x_0 + v_0/\omega)/2, \\ B = (x_0 - v_0/\omega)/2 \end{cases}$. 珠子受到杆的作用力与科里奥利力平衡. 这个力等于

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega} \quad (10)$$

在本题中, 它的大小为

$$F_C = 2m\omega^2(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}),$$

其中 A 和 B 的表达式如前述. 它的方向满足当旋转半径增大时, 使合速度加快.

一点扩充: 径向运动质点的科里奥利力

取角速度 ω 的方向为 z 轴正方向. 如果纸面上的物体逆时针旋转, 那么 ω 垂直纸面向外. 反之, 顺时针旋转, ω 垂直纸面向里.

建立平面极坐标系 (r, θ) . 物体的位置矢量为

$$\vec{r} = r\hat{r}. \quad (10)$$

基矢 \hat{r} 是从原点指向质点位置的单位矢量. 对位置矢量求变化率 (也就是速度), 得到

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (10)$$

上式第二项利用 $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$. 式中 $\hat{\theta}$ 也是单位矢量, 它的方向是 \hat{r} 方向逆时针旋转 90° . 它的变化率为 $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$. 我们现在建立的这个坐标系, 是个旋转坐标系. 质点在坐标系中做径向运动.

对位置矢量求二阶变化率, 得到加速度

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}}) + (\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}}) \\ &= (\ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}) + (\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}) \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} \end{aligned} \quad (10)$$

它在 r 分量有两项, 第一项是径向加速度, 第二项是质点随坐标系旋转向心加速度. θ 分量的两项, 第一项是径向运动带来的科里奥利加速度, 第二项是质点随坐标系旋转的切向加速度.

切向运动带来的科里奥利力, 见课件.

平面直角坐标系怎么推? 设有一个旋转参考系, 与静止系夹角为 θ , 相应的一阶和二阶变化率为 $\dot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$. 质点在旋转系中的坐标为 (x', y') , 在静止系坐标为 (x, y) . 它们的变换关系满足 $\vec{x} = R\vec{x}'$, 也就是

$$\begin{cases} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta. \end{cases} \quad (10)$$

旋转矩阵 $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, 表示绕 z 轴逆时针旋转 θ 角.

一阶导:

$$\begin{cases} \dot{x} &= (\dot{x}' \cos \theta - \dot{y}' \sin \theta) + \dot{\theta}(-x' \sin \theta - y' \cos \theta), \\ \dot{y} &= (\dot{x}' \sin \theta + \dot{y}' \cos \theta) + \dot{\theta}(x' \cos \theta - y' \sin \theta), \end{cases} \quad (10)$$

或简写为

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}R\vec{x}' = R\dot{\vec{x}}' + \dot{R}\vec{x}' = R\dot{\vec{x}}' + \vec{\omega} \times R\vec{x}' \quad (10)$$

最后一项暂不加证明. 类似的, 二阶导

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{x}} &= \frac{d}{dt}(R\dot{\vec{x}}' + \vec{\omega} \times \vec{x}) \\ &= \dot{R}\dot{\vec{x}}' + R\ddot{\vec{x}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x} + \vec{\omega} \times R\dot{\vec{x}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) \\ &= R\ddot{\vec{x}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x} + 2\dot{\vec{\omega}} \times R\dot{\vec{x}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}).\end{aligned}\quad (10)$$

第一项是在转动参考系中的加速度. 第二项是转动参考系角加速度项. 第三项是科里奥利加速度. 第四项是向心加速度.

4 例 4

A 作何运动? A 向右以速度 v_A 运动。

B 分别对 A 和 O 作何运动? B 相对 A 向左以速度 v_A 运动; 相对 O 静止。

以 A 为参考系, B 受到的惯性力为何? A 的加速度为 $a_A = \frac{v_A^2}{l_A}$ 向上, 则 B 受到的惯性力大小为 $F_0 = m_B \frac{v_A^2}{l_A}$ 方向向下。

以 A 为参考系, B 受到惯性力、重力、绳子的拉力, 三者合力提供向心加速度, 得到

$$T = m_B \left(\frac{v_A^2}{l_A} + \frac{v_A^2}{l_B} + g \right) \quad (10)$$

注意 A 的静止系不是旋转参考系, 没有科里奥利力。

如果给 A 的参考系加上角速度, 那么 B 的增加的离心力与科里奥利力的合力会提供一部分向心加速度, 结果不变。