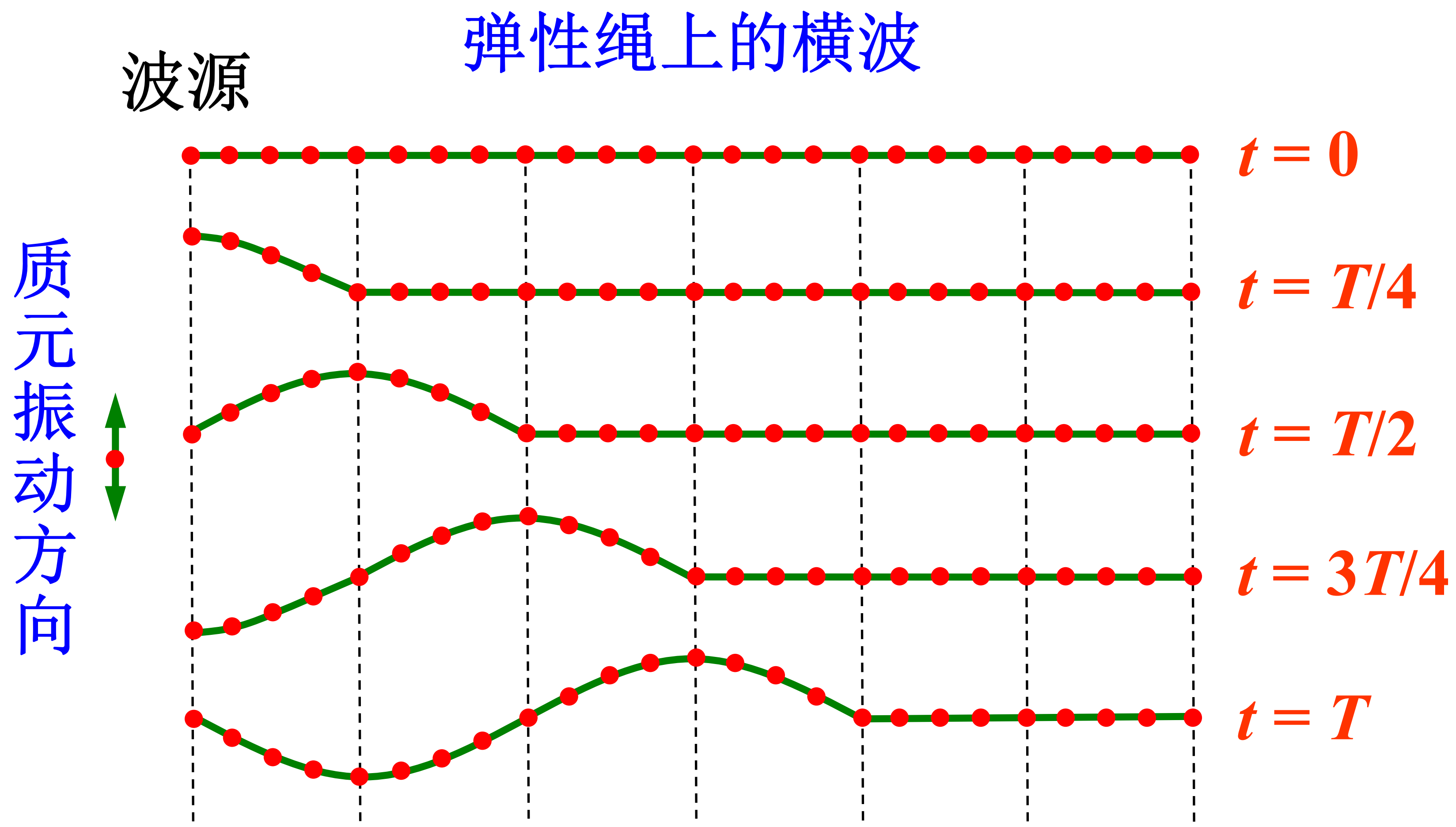
第九章 波动

§ 9.1 机械波的形成和特征

一. 机械波的形成



- 媒质质元受扰动发生振动，质元间的弹性作用可使振动传播，形成波动 — 机械波。
- “上游”质元依次带动“下游”质元振动。
- “上游”质元的振动状态在较晚时刻出现在“下游”质元上。
- 波动是振动状态的传播，不是媒质的传播，质元并未“随波逐流”。
- 形成机械波的条件：波源 ＋ 弹性媒质

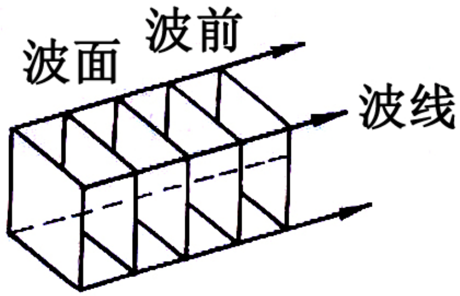
二. 波的几何描述

波（射）线：波传播方向的射线

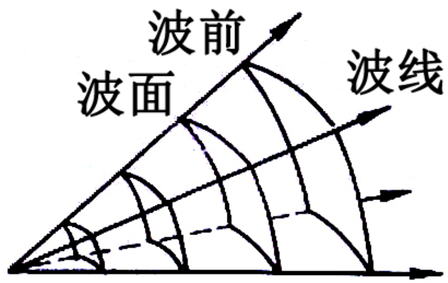
波（阵）面：振动相位相同的点组成的曲面

— 等相面

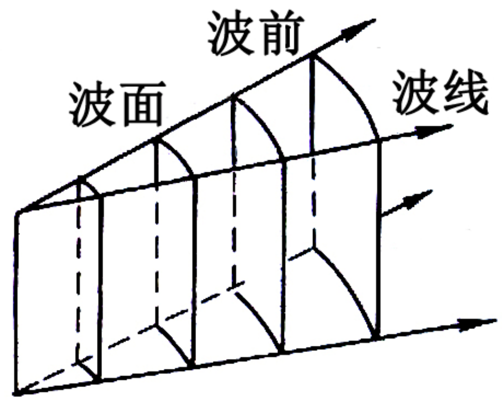
波前：最前面的波面



平面波



球面波



柱面波

三. 波的分类

按波的性质：机械波，电磁波等

按波线与振动方向关系：横波，纵波

按波面形状：平面波，球面波，柱面波

按复杂程度：简谐波，复波

按持续时间：连续波，脉冲波

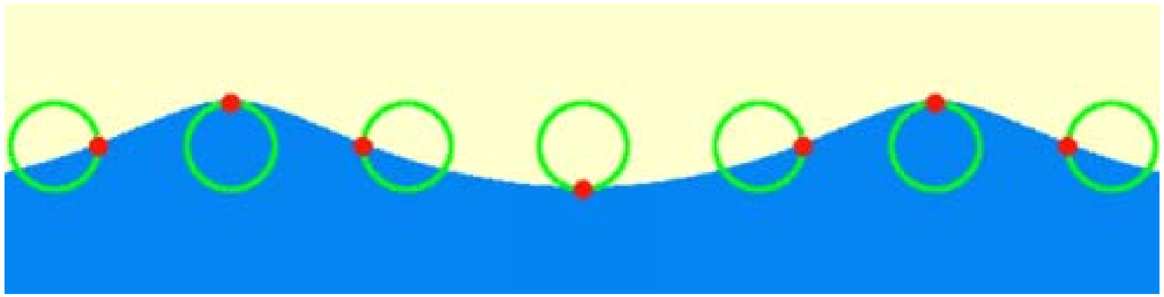
按波形是否传播：行波，驻波

……

水表面的波既非横波又非纵波：

水的流动性和不可压缩性 ⇒

水波中水质元作2维运动 $\begin{cases}\text{纵向运动}\\ \text{横向运动}\end{cases}$



【演示】横波模型、纵波模型、细弹簧纵波

四. 波的特征量

1. 波速 u

振动状态传播的速度，非媒质质元的速度。

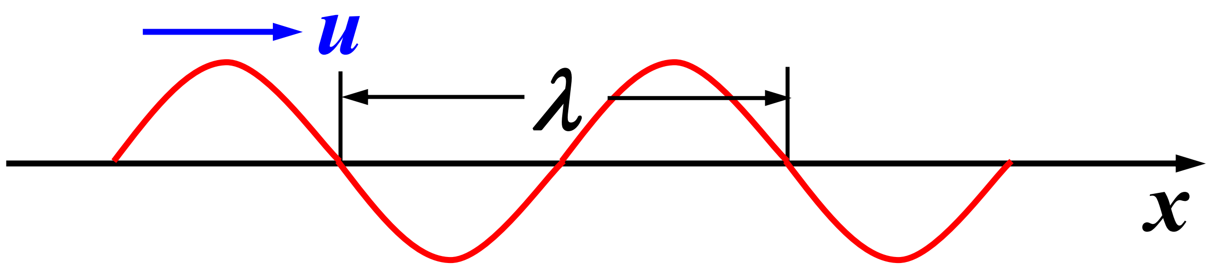
与媒质、波的类型甚至频率（色散）有关。

2. 周期 T

一个完整波通过波线上某点所需时间。

频率 $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$ 角频率 $\boxed{\omega = 2\pi\nu}$

3. 波长 λ：



波线上相邻的振动状态相同的两点间距离，反映波的空间周期。

$$\boxed{\lambda = uT}$$

波矢量 $\vec{k}$ $\begin{cases} \text{方向：波传播方向} \\ \text{大小：} \boxed{k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{u}} \end{cases}$ —— 波数

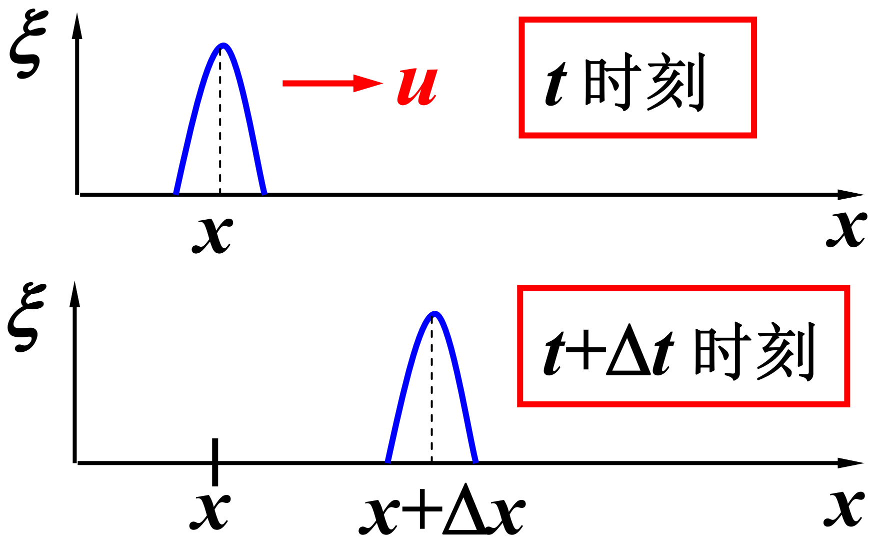
§ 9.2 行波，简谐波

一. 行波

某种物理量的扰动的传播称为行波。

设物理量 ξ 沿 x 轴传播，波速为 u，则：

$\xi=\xi(t-\dfrac{x}{u})$ 代表沿 $+x$ 方向传播的行波。



$$\xi(t+\Delta t-\frac{x+\Delta x}{u})$$

$$=\ \xi(t-\frac{x}{u})$$

$$\Delta x=u\Delta t$$

$\therefore$ t 时刻 x 处的扰动在 $t+\Delta t$ 时刻传到 $x+\Delta x$ 处。

$\therefore$ $\xi=\xi(t-\dfrac{x}{u})$ 具有沿 $+x$ 方向传播的性质。

同理 $\xi=\xi(t+\dfrac{x}{u})$ 具有沿 $-x$ 方向传播的性质。

$\xi(x,\ t)=\xi(t\pm\dfrac{x}{u})$ 是行波波函数。

波函数：被传播的物理量 $\xi(x,t)$ 的函数式，

也是媒质质元的运动函数。

二. 简谐波

简谐波传播的扰动是简谐振动，也称单色波。

1. 一维简谐波波函数

设在均匀、无限大、无吸收（振幅不变）的媒质中传播：

- 波沿 $+x$ 方向传播
- 波速为 u
- $x = 0$ 处质元振动方程

0点质元振动初相

$$y(0,\ t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

一维简谐波波函数

$$\boxed{y(x,\ t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]}$$

$$\boxed{y(x,\ t) = A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0)}$$

$$\boxed{y(x,\ t) = A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)}$$

简谐波波函数也是 x 点处质元的振动方程。

复函数表示法

$$\tilde{y}(x,\ t) = Ae^{-i(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

$$= \underbrace{Ae^{-i(-kx+\varphi_0)}}_{\text{复振幅}} \cdot \underbrace{e^{-i\omega t}}_{\text{振动因子}}$$

简谐波波函数中的 $\omega(t - \dfrac{x}{u}) + \varphi_0$ 是波的相位，反映 x 点处质元的振动状态，相位与振动状态一一对应，所以简谐波的传播也是质元振动相位的传播。

相速度 u_p

设 t 时刻 x 处的相位经 $\mathrm{d}t$ 传到 $x+\mathrm{d}x$ 处：

$$u_p = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}$$

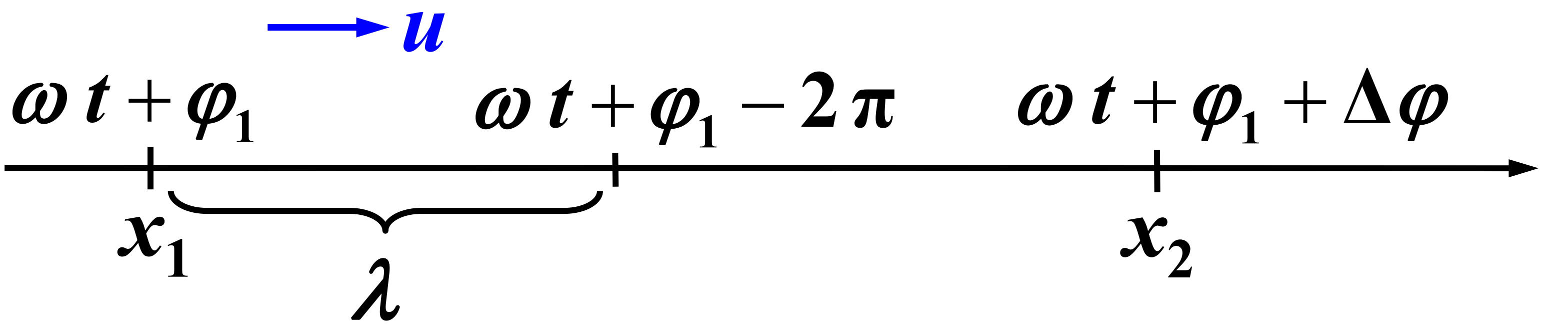
$$\omega\,(t-\frac{x}{u})+\varphi_0 = \omega[(t+\mathrm{d}\,t)-\frac{x+\mathrm{d}\,x}{u}]+\varphi_0$$

$$\Rightarrow \quad u_p = u$$

∴ 简谐波的波速就是相速度。

2. 如何求一维简谐波波函数

- 相位关系



沿传播方向每增加 λ 距离，相位落后 2π。

相差和距离差关系：

代数量

$$\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda}(x_2-x_1)=-\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

- 还需 3 条件：

① 某参考点 p 的振动方程：

$$y(x_p,\ t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

x_p — 参考点坐标

A — 振幅

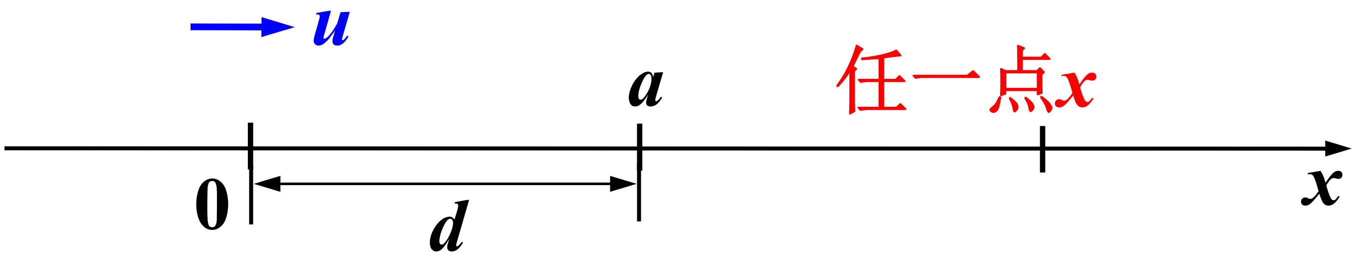
ω — 角频率

φ — 初相位

② 波长 λ（或 k, 或 u）

③ 波的传播方向

【例】波长 λ 的简谐波沿 $+x$ 方向传播，a 点 $(x=d)$ 的振动方程为 $A\cos(\omega t+\varphi_a)$，求波函数



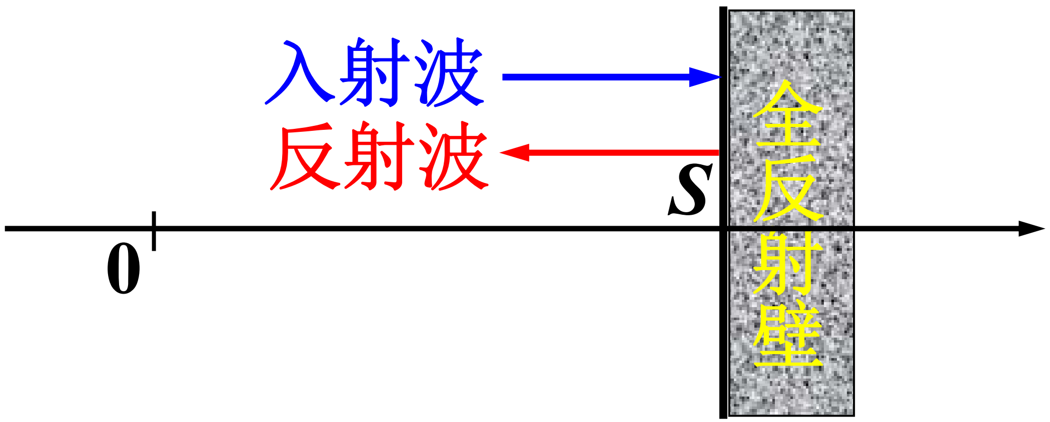
波函数 — 任一点 x 的振动方程：

$$y(x,\ t)=A\cos[\omega t+\varphi_a-\frac{2\pi}{\lambda}(x-d)]$$

【思考】上式对 a 点左方的上游点成立吗？

【例】$x = 0$ 处质元振动方程为 $A\cos\omega t$，

波长 λ，在反射壁 S 处，反射波相位突变 π。

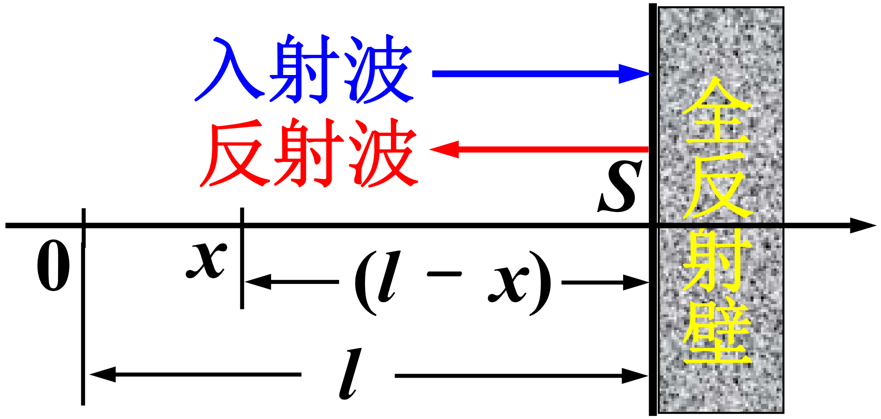


求：反射波函数 $y'(x, t)$

解：全反射，A 不变。

波由 0 点经壁反射到 x 点传播的距离为：

$$l+(l-x)=2l-x$$



相差：$-\dfrac{2\pi}{\lambda}(2l-x)$

再考虑反射壁 S 处，反射波相位突变 π，

$$y'(x,\ t)=A\cos[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}(2l-x)\pm\pi]$$

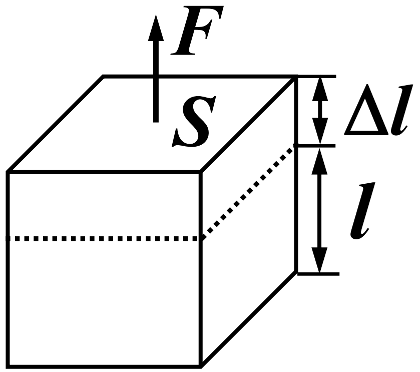
$$=A\cos[\omega t+\frac{x}{\lambda}2\pi-\frac{2l}{\lambda}2\pi\pm\pi]$$

沿 $-x$ 方向传播

取+、–均可

§ 9.3 波动方程

一. 弹性体受力和形变规律

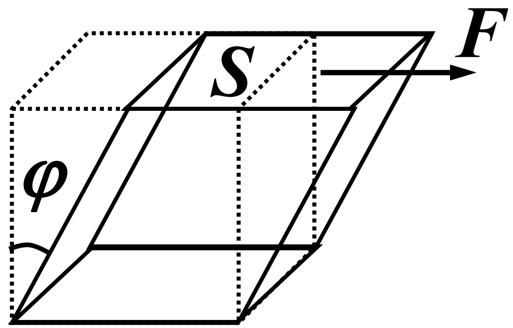


正应力 F/S

正应变 $\Delta l/l$

杨氏模量

$$E = \frac{F/S}{\Delta l/l}$$

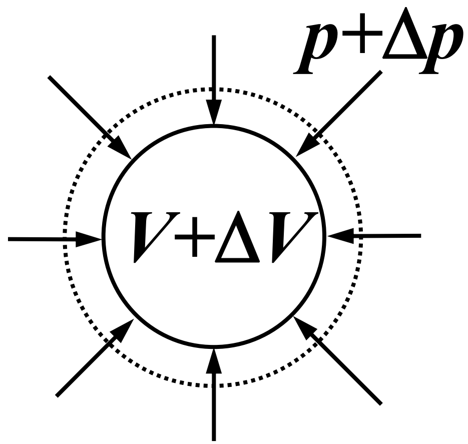


切应力 F/S

切应变 φ

切变模量

$$G = \frac{F/S}{\varphi}$$



体积模量

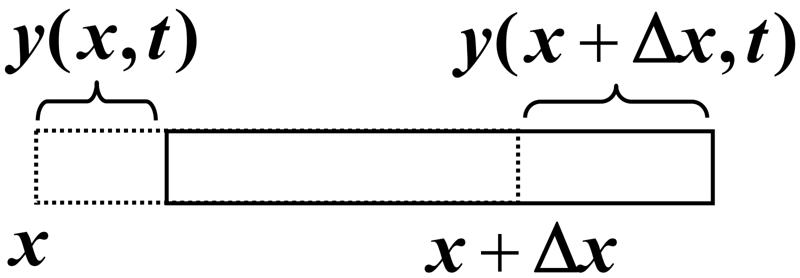
$$K = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

一般 $E > 2G$

二. 应变和波函数的关系

波函数是质元的振动函数，也是质元偏离平衡位置的位移。

以纵波为例讨论



对 $x - x+\Delta x$ 段质元，设 x 和 $x+\Delta x$ 处的位移分别是 $y(x,t)$ 和 $y(x+\Delta x,t)$，应变为：

$$[y(x+\Delta x,t)-y(x,t)]/\Delta x$$

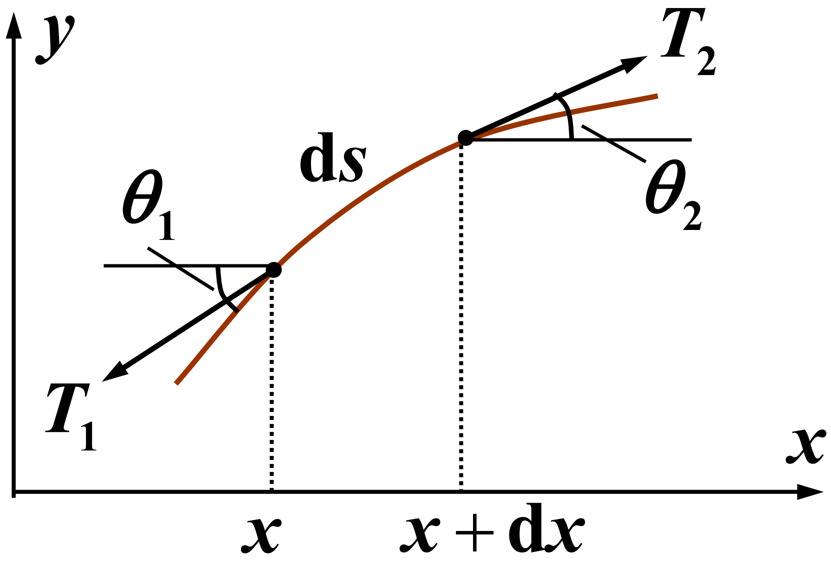
任意位置处的应变：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(x+\Delta x,t)-y(x,t)}{\Delta x}=\dfrac{\partial y}{\partial x}$

波函数对坐标的一阶偏导数就是应变。

三. 从 3 种常见的振动现象推导波动方程

思路：选质元，作受力分析，列牛顿方程

1. 弦的微小横振动



设弦张力 T，线密度 ρ_l

分析 $x - x+\mathrm{d}x$ 小段：

x 方向弦不动：

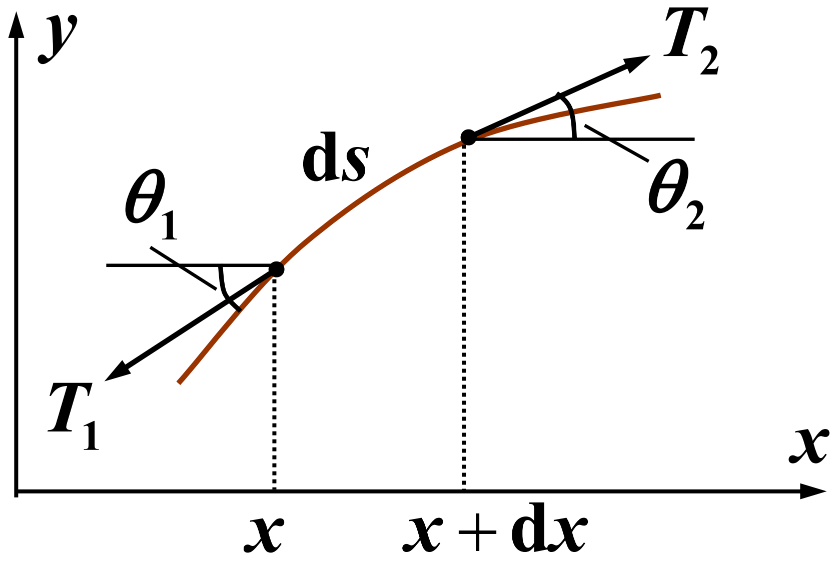
$$T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_2 \qquad (1)$$

y 方向弦运动：

$$T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_1 = \mathrm{d}m\cdot a_y = \rho_l\mathrm{d}s\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (2)$$

微小横振动：$\theta_1, \theta_2 \to 0$

$$\cos\theta_1 \approx \cos\theta_2 = 1$$



$$\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x$$

$$\sin\theta_2 \approx \tan\theta_2 = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\,\mathrm{d}x \approx \mathrm{d}x$$

把这些代入方程 (1)(2) 可得：

$$T_1 = T_2 = T$$

$$T\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\mathrm{d}x} - T\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x} = \rho_l \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{\rho_l}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

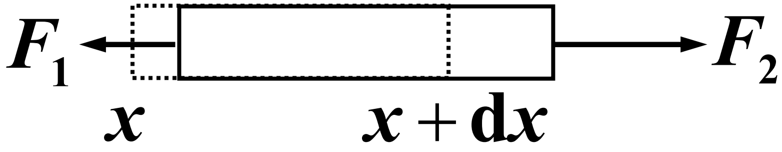
弦波动（横振动）方程

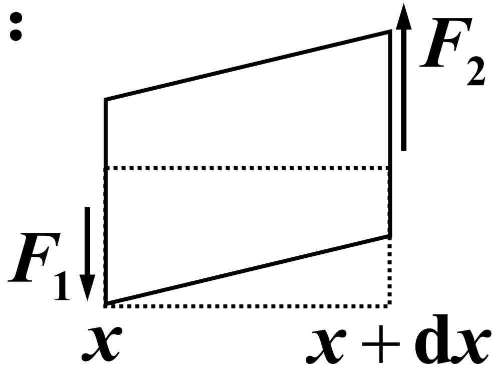
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad u = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$ — 弦中波速

2. 均匀弹性杆的纵振动和横振动

设横截面积为 S，密度 ρ，选 $x-x+\mathrm{d}x$ 小段。

设该小段处于拉伸或正切变状态：





纵向和横向力：

x 处：$$F_1 = ES\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x, \quad F_1 = GS\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x$$

$x+\mathrm{d}x$ 处：$$F_2 = ES\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x}, \quad F_2 = GS\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x}$$

纵向和横向运动方程：

$$F_2 - F_1 = \mathrm{d}m \cdot a$$

$$\begin{cases} ES\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x} - ES\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x} = \rho \mathrm{d}xS\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ GS\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x} - GS\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x} = \rho \mathrm{d}xS\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ES\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x = \rho \mathrm{d}xS\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ GS\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x = \rho \mathrm{d}xS\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{E}{\rho}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \dfrac{G}{\rho}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases}$$

弹性杆的波动（纵振动、横振动）方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

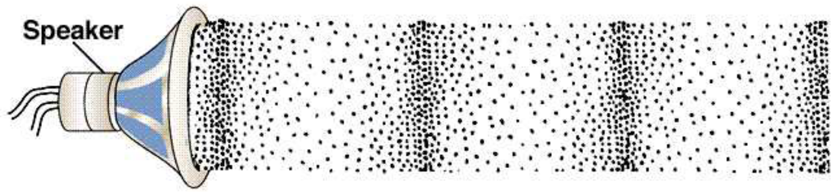
纵波波速 $u_{纵}=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 横波波速 $u_{横}=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$

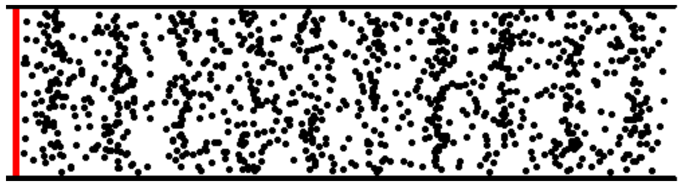
$$G<E \quad \Rightarrow \quad u_{横}<u_{纵}$$

举例：地震波传播，沙漠蝎子捕食

3. 管中气体的振动

声波在气体中疏密波，是纵波。





声波的传播过程是绝热过程：气体快速振动，声波迅速传播，以致气体来不及和周围环境交换热量。

声波的传播伴随着气体的振动：

在空间某点处（应理解成很小范围内），

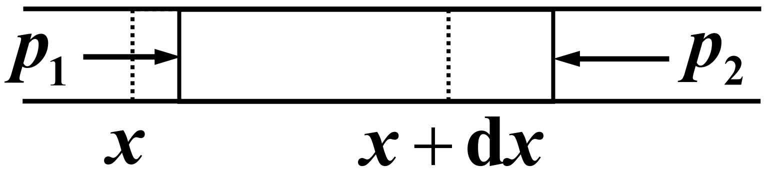
气体振动（气体位移）$\Rightarrow$ 体积变化

$\Rightarrow$ 密度变化 $\Rightarrow$ 压强变化

声压：有声波时的压强和无声波时的压强差：

$$\Delta p = p - p_0 \begin{cases} \Delta p > 0 & \text{气体稠密区} \\ \Delta p < 0 & \text{气体稀疏区} \end{cases}$$

设管横截面积为 S，密度 ρ，研究 $x-x+\mathrm{d}x$ 小段。



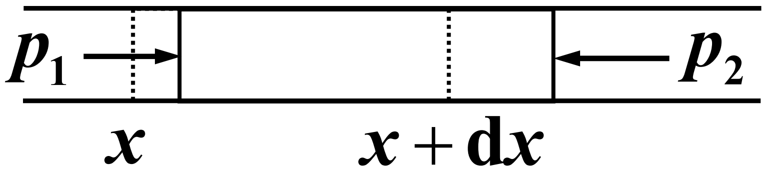
x 处体积相对变化：
$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{V}\right|_x = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x$$

$x+\mathrm{d}x$ 处体积相对变化：
$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{V}\right|_{x+\mathrm{d}x} = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x}$$

气体近似经历准静态绝热过程，满足泊松方程：

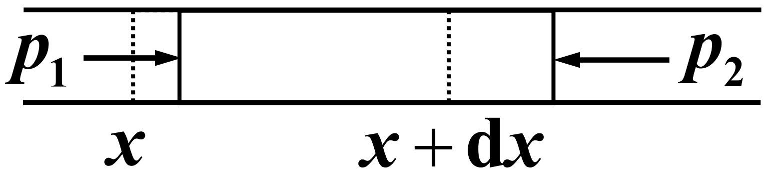
$$pV^{\gamma} = \text{常量}，\quad \gamma = \frac{C_p}{C_V} \qquad \begin{aligned} &C_p\text{ — 定压热容量} \\ &C_V\text{ — 定体热容量} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}p = -\gamma p \frac{\mathrm{d}V}{V}$$



x 处压强： $p_1 = p_0 + \Delta p\big|_x = p_0 - \gamma p \dfrac{\mathrm{d}V}{V}\Big|_x = p_0 - \gamma p \dfrac{\partial y}{\partial x}\Big|_x$

$x+\mathrm{d}x$ 处压强： $p_2 = p_0 - \gamma p \dfrac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+\mathrm{d}x}$



运动方程： $(p_1 - p_2)S = \mathrm{d}m \cdot a$

$$\gamma p\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right)S = \rho S\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma p\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}xS = \rho S\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\gamma p}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

声波波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad u = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$ — 气体中声速

γ — 比热比，p、ρ — 无波时的压强、密度

对理想气体：$u = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}} \qquad T = 0^\circ C,\ u = 332\ \mathrm{m/s}$

R 气体普适常量，T 绝对温度，M 气体摩尔质量

液体中声速 $u = \sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$ ρ — 无波时液体密度

声压表达式

声波可以用位移表示，也可以用声压表示。位移是矢量，压强是标量，实际中用声压表示方便。

可证明位移和声压表示的波函数相位差 $\pi/2$：

例如设位移波函数为： $y(x,\ t) = A\cos\omega(t - \dfrac{x}{u})$

则声压波函数为： $\Delta p(x,\ t) = -\rho u \omega A \sin\omega(t - \dfrac{x}{u})$

声压振幅： $\Delta p_{\mathrm{m}} = \rho u \omega A$

四. 1 维波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

u — 波速

方程是线性方程，解满足线性叠加性：

若干解的线性叠加仍是解。

方程在不附带任何条件的下的通解是：

$$y = f_1(t + \frac{x}{u}) + f_2(t - \frac{x}{u})$$

不同于常微分方程的通解中的任意积分常数，

f_1、f_2 是 2 个任意的行波波函数。

确定常微分方程通解中的积分常数需要附加条件：

例如：关于时间的简谐振动方程需要初始条件；

关于流管中的速度分布 — 泊肃叶公式需要边界条件。

波动方程是关于时间和空间的微分方程，确定行波波函数 f_1、f_2 既需要边界条件，又需要初始条件。

总结：求解波动方程，需要结合边界条件和初始条件（结合具体问题）。

波动方程主要用来讨论关于波的**2** 种典型问题：

- 波的传播问题

已知某列波向前传播，会经过各种不同媒质，求空间中的波函数。

本课程并不使用波动方程讨论，而是采用边界条件以及一些物理上的考虑把波在媒质界面处的反射、透射搞清楚，从而得到波函数。

- 本征值问题（简正模式）

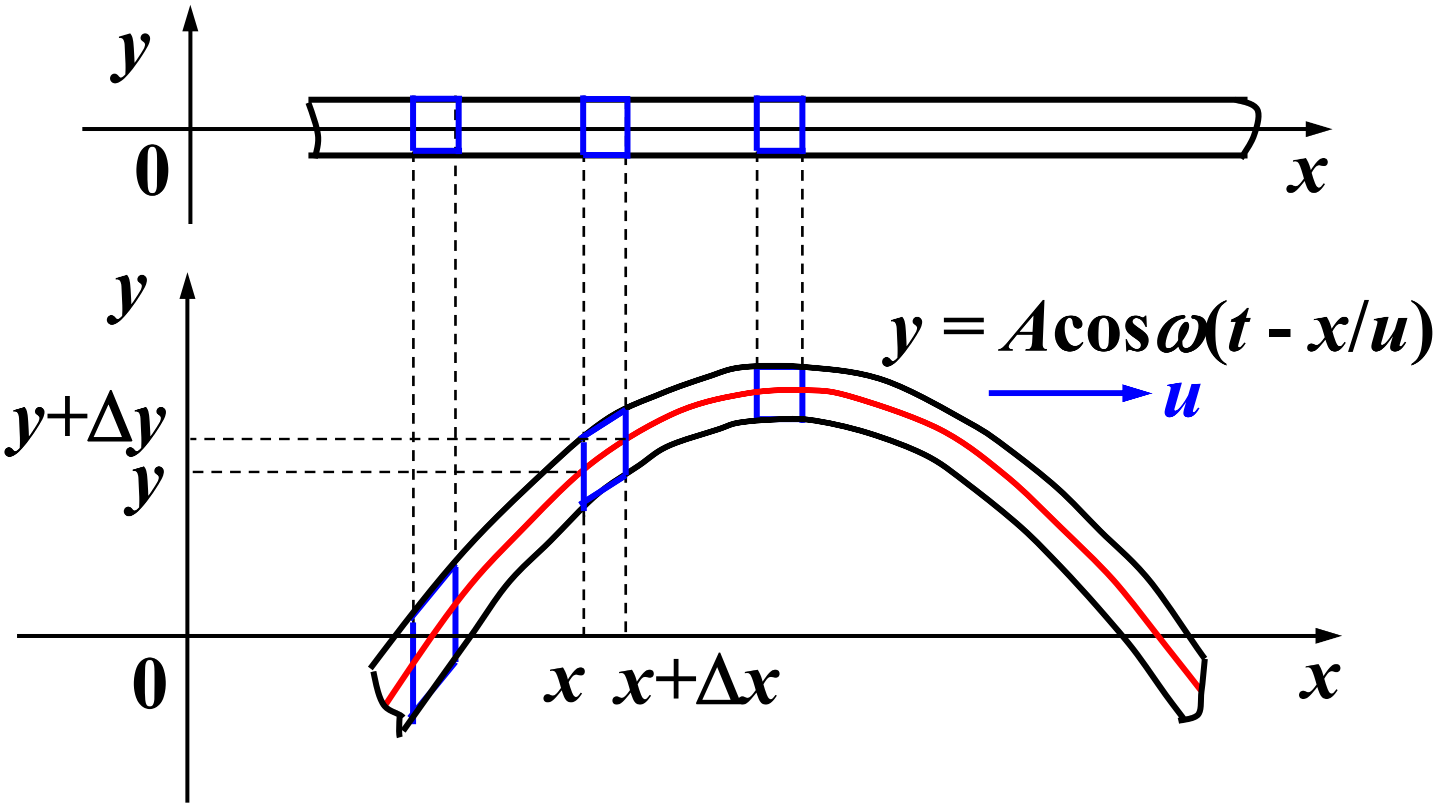
给定边界条件，求系统各种可能的振动模式。

从而了解在各种初始条件下系统一般振动行为。

和耦合振子不同，这是连续系统本征振动问题。

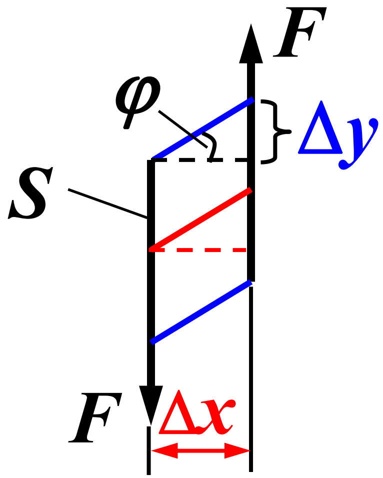
§ 9.4 波的能量

一. 波的能量



质元的形变势能大，振动动能也大。

质元形变势能 ΔW_{p}



$$\left.\begin{array}{l} \text{切变模量 } G=\dfrac{F/S}{\varphi} \\ \text{横波波速 } u=\sqrt{G/\rho} \end{array}\right\} F=u^2\rho S\varphi$$

$$\mathrm{d}y=\Delta x\cdot\mathrm{d}\varphi\,,\quad \Delta V=S\Delta x\,,\quad \varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta W_{\mathrm{p}}=\int_0^{\Delta y}F\cdot\mathrm{d}\,y=\int_0^{\varphi}u^2\rho S\varphi\cdot\Delta x\cdot\mathrm{d}\,\varphi=\frac{1}{2}u^2\rho\varphi^2\Delta V$$

$$=\frac{1}{2}u^2\rho\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\Delta V\approx\frac{1}{2}u^2\rho\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\Delta V$$

$$\Delta W_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} u^2 \rho \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right)^2 \Delta V = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

质元振动动能 ΔW_{k}

$$\Delta W_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} (\rho \Delta V) \left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

$$\Delta W_{\mathrm{p}} = \Delta W_{\mathrm{k}}$$

质元总能量

$$\Delta W = \Delta W_{\mathrm{p}} + \Delta W_{\mathrm{k}} = \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u}) \Delta V$$

能量密度 $w=\dfrac{\Delta W}{\Delta V}=\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\dfrac{x}{u})$

平均能量密度 $\overline{w}=\dfrac{1}{T}\int_0^T w\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\rho\omega^2A^2$

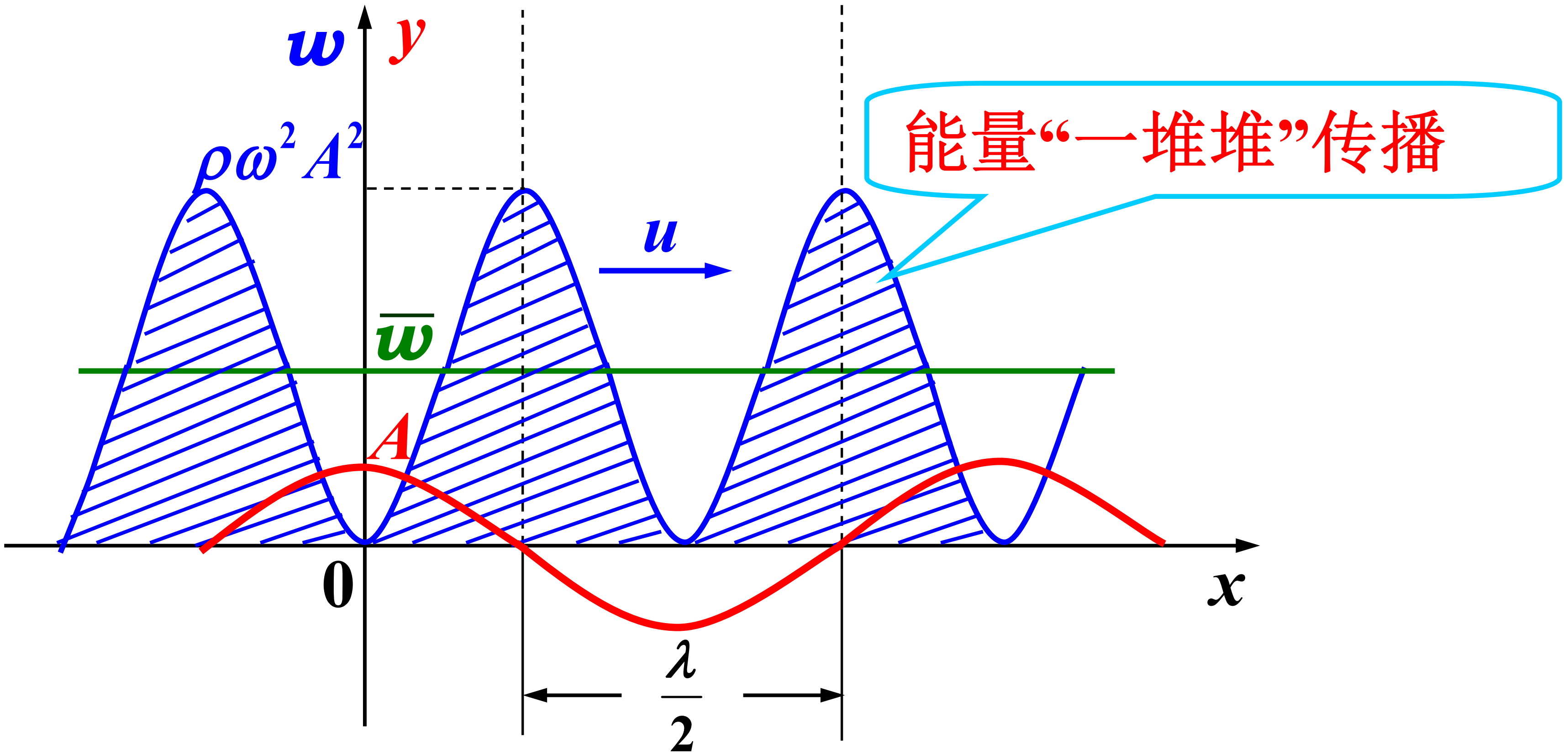
振动系统： $E_\mathrm{k}\neq E_\mathrm{p}$， $E_\mathrm{k}+E_\mathrm{p}=\mathrm{const}.$

系统与外界无能量交换

波动质元： $\Delta W_\mathrm{k}=\Delta W_\mathrm{p}$， $\Delta W_\mathrm{k}+\Delta W_\mathrm{p}\neq\mathrm{const}.$

与周围质元交换能量 — 能量传播

能量的传播



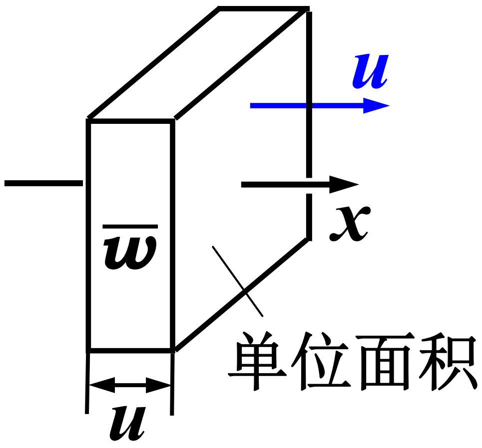
平衡位置处（$y=0$），能量密度 w 最大，

最大位移处（$y=A$），能量密度 w 为零。

二. 波的强度

波的强度 I 等于平均能流密度 $\bar{S}$：

单位时间内通过垂直于波的传播方向的单位面积的平均能量。



$$I=\bar{S}=\bar{w}u$$

$$=\frac{1}{2}\rho u\omega^2A^2=\frac{1}{2}z\omega^2A^2$$

（单位：W/m²）

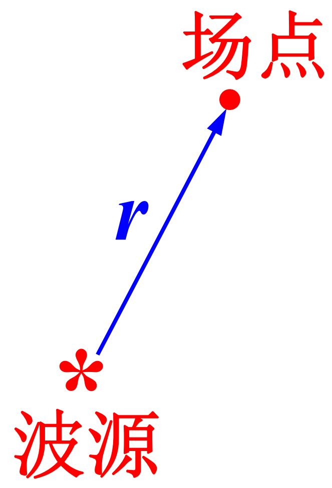
$z=\rho u$ —— 媒质“特性阻抗”

- $z_1 > z_2$，z_1— 波密媒质，z_2— 波疏媒质
- $I \propto \omega^2$，超声波比普通声波的强度大
- $I \propto A^2$，对无吸收媒质，考虑能量守恒有：

平面波 $A = \text{const}.$

球面波 $Ar = \text{const}.$，$A \propto \dfrac{1}{r}$

柱面波 $A\sqrt{r} = \text{const}.$，$A \propto \dfrac{1}{\sqrt{r}}$



声波强度

声压振幅： $\Delta p_{\mathrm{m}} = \rho u \omega A$

$$I = \frac{1}{2}\rho u \omega^2 A^2 = \frac{(\Delta p_{\mathrm{m}})^2}{2\rho u}$$

实验上通过测压强幅值变化得到声波强度。

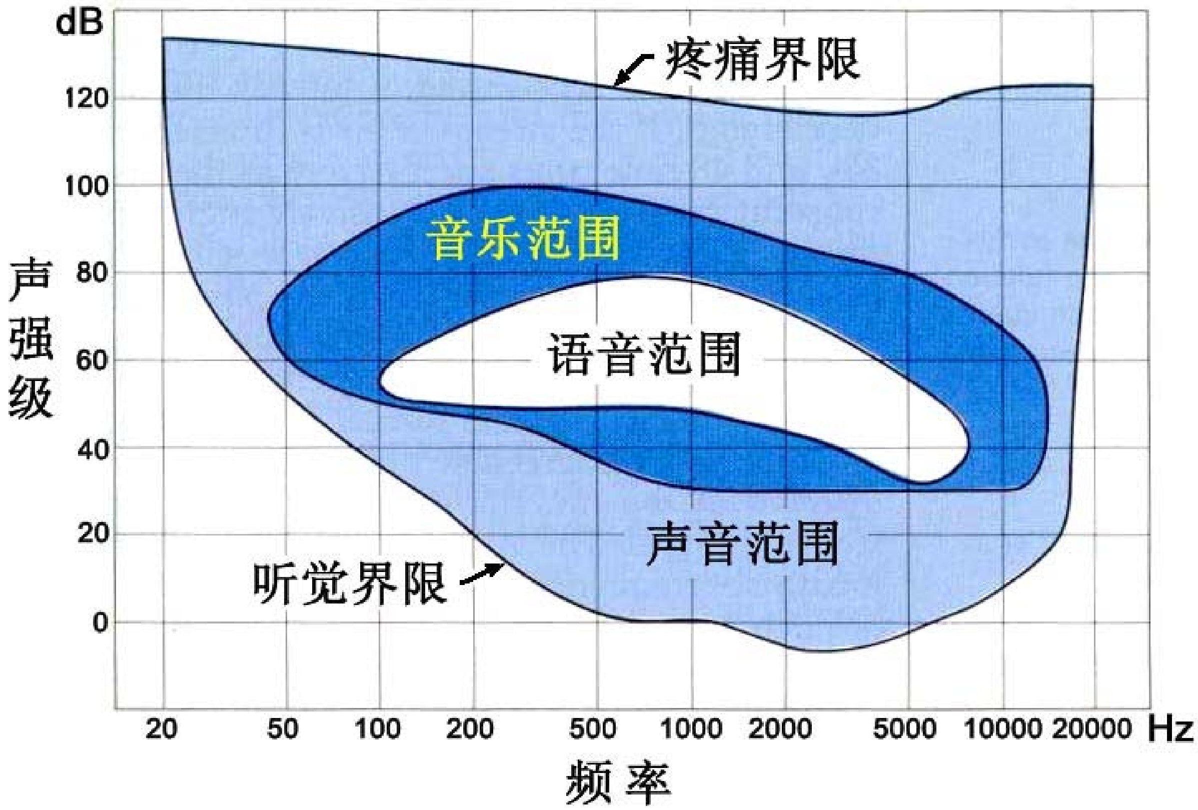
规定标准声强： $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$

声强级： $L = \log\frac{I}{I_0}(\mathrm{B}) = 10\log\frac{I}{I_0}(\mathrm{dB})$

正常说话 $\sim$ 60dB，噪声 $>$ 70dB，摇滚乐 $\sim$ 120dB。

人的听觉不仅和声强有关，也与频率有关。

例如：强度同为 **50dB**，**1000Hz** 的声音很响，而 **50Hz** 的声音还听不到。



可闻声波：20～20000Hz

次声波：ν < 20Hz 的声波

常见于地震、火山爆发、风暴、核爆炸等，穿透力极强，某些对人体伤害极大。

超声波：ν > 20000Hz 的声波

特点：频率高，波长短，能量集中，有良好的束射性和方向性。

应用：超声清洗，水下定位与通讯、体外碎石、B超，D超等。

§9.5 惠更斯原理

一. 惠更斯原理（1690）

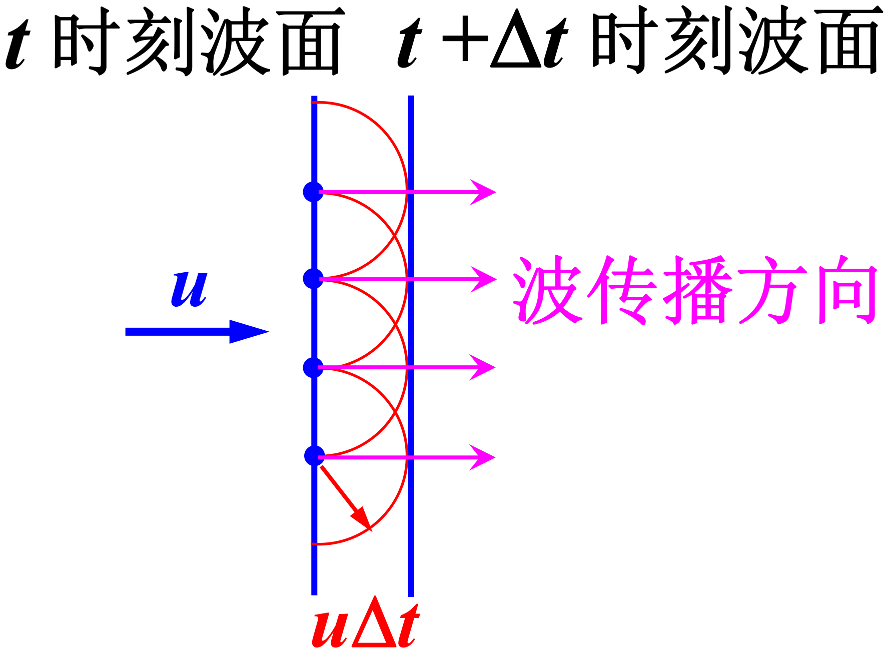
1. 波面上的各点可看作是发射子波（次级波）的波源（点源）。

2. 子波面的包络面（包迹）就是相应时刻的新波面。

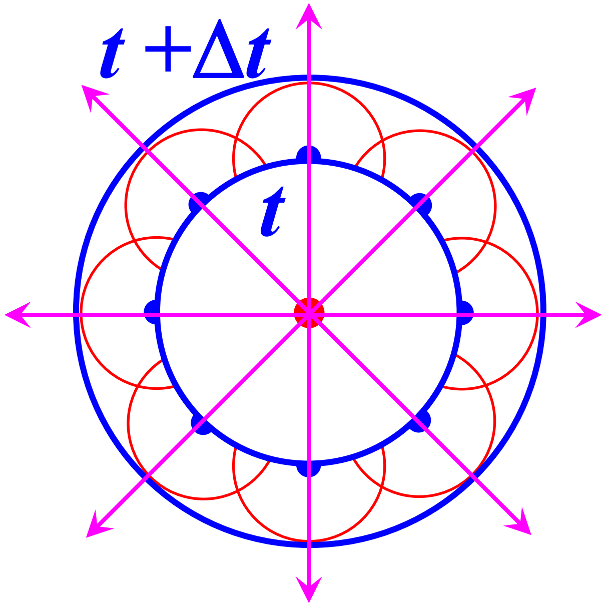
惠更斯原理给出了处理波传播方向的普遍方法，但并不能给出波的强度分布。

设波在均匀各向同性媒质中传播：

平面波

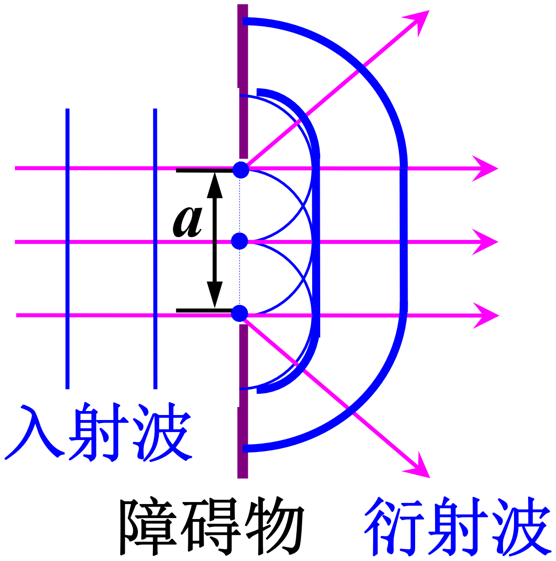


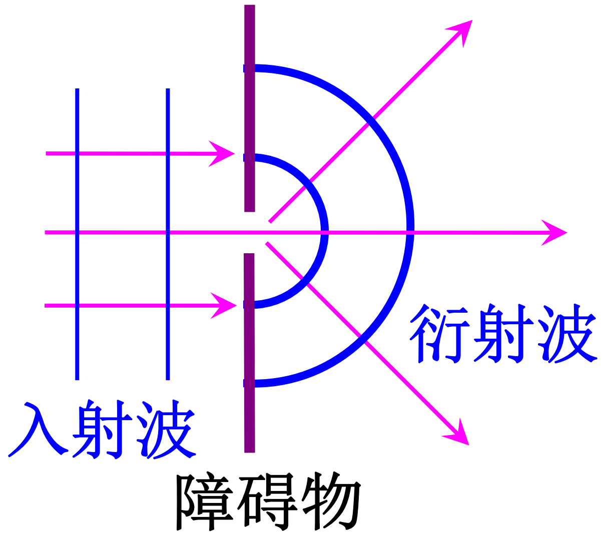
球面波



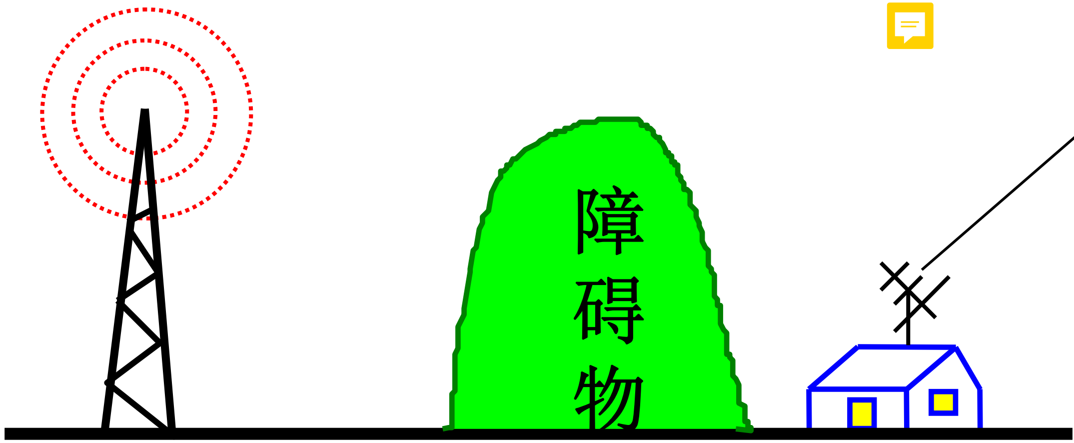
二. 波的衍射

波绕过障碍物的边缘而偏离直线传播的现象。

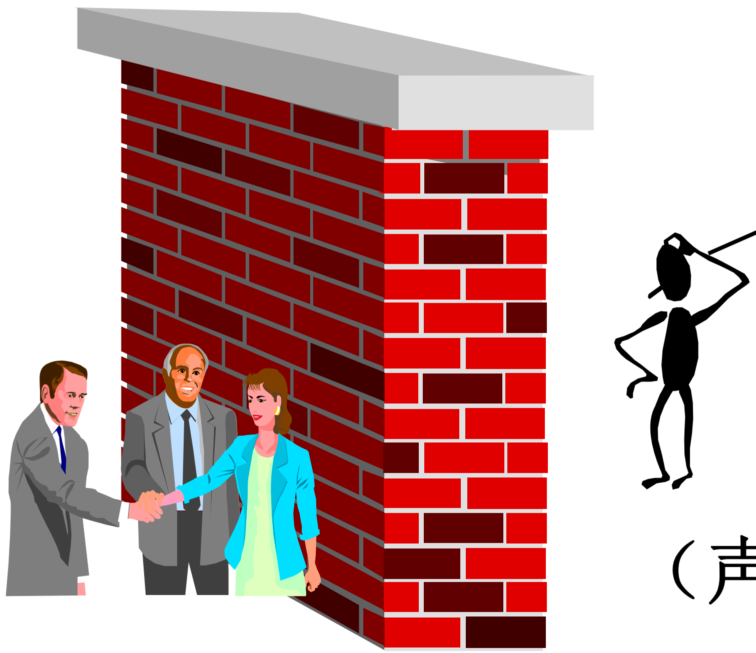




障碍物线度相对波长越小，衍射越明显。



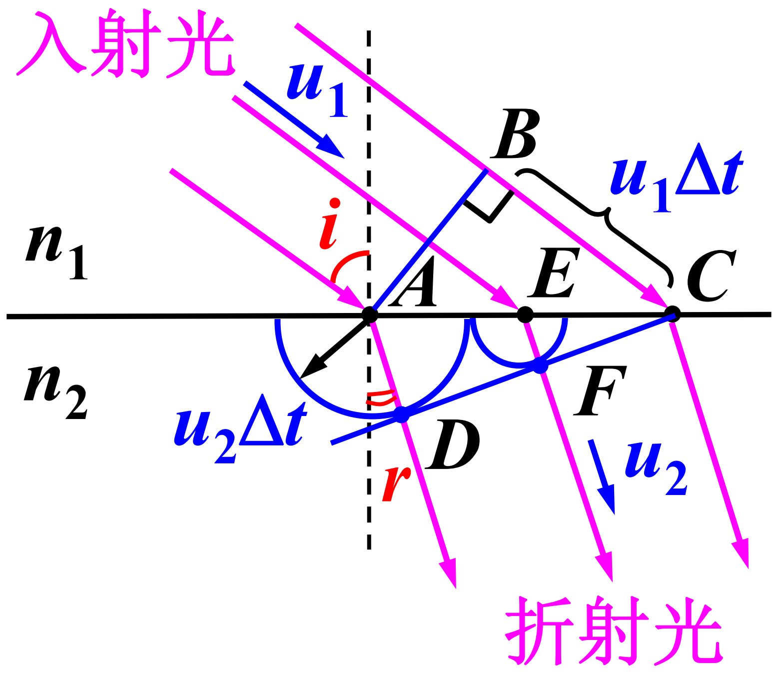
广播和电视哪个更容易收到？



更容易听到男的还是女的说话的声音？

（声音强度相同的情况下）

三. 光的折射



$$\overline{BC} = u_1\Delta t = \overline{AC}\sin i$$

$$\overline{AD} = u_2\Delta t = \overline{AC}\sin r$$

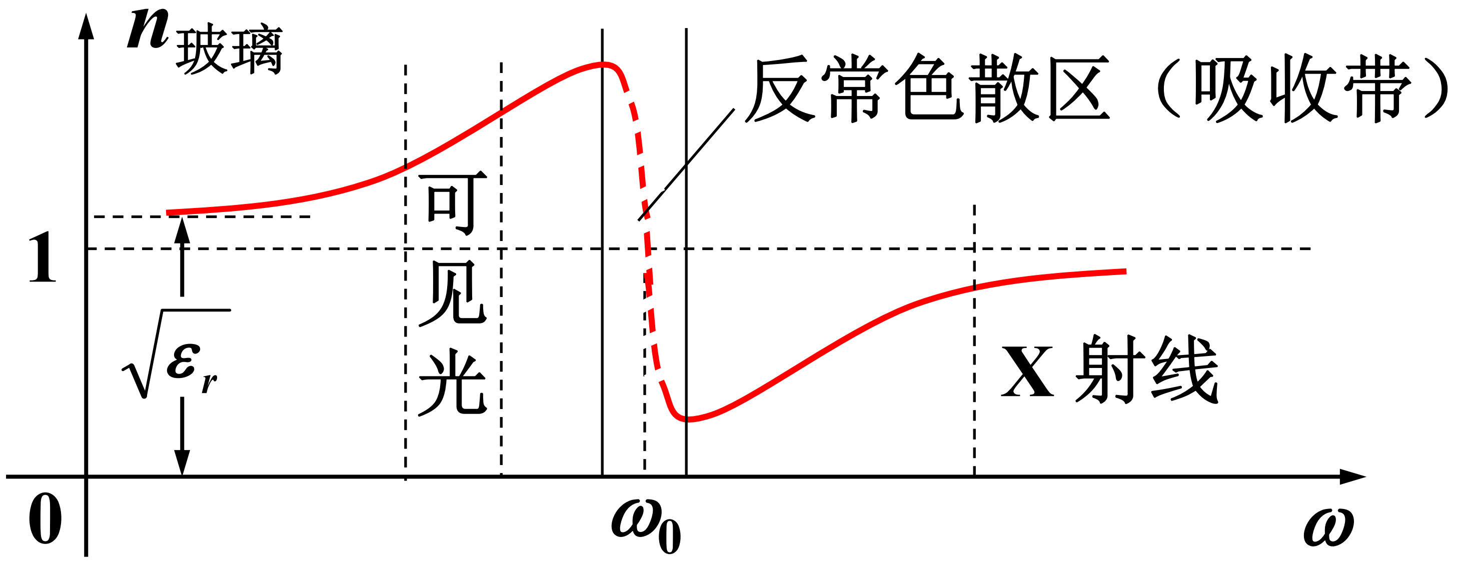
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin r}$$ — 折射定律

若 $n_1 > n_2$， n_1— 光密媒质， n_2— 光疏媒质。

光的色散

同种介质内，不同频率的光的折射率不同。



对 X 光，玻璃的折射率 < 1，故 X 光从真空或空气射向玻璃时会发生全反射。

§9.6 波的叠加和驻波

一. 波的叠加原理

波传播的独立性：几列波可以保持各自特点（传播方向、振动方向、振幅、波长、频率）同时通过同一媒质，互不影响。

如听音乐可辨出不同乐器的音色、旋律。

波的叠加原理：在几列波相遇、互相交叠的区域里，某点振动是各列波所引起的振动的合振动。

【TV】波的叠加

波的叠加原理由波动方程的线性所决定，当波的振幅、强度过大时，会出现非线性现象，叠加原理不成立。

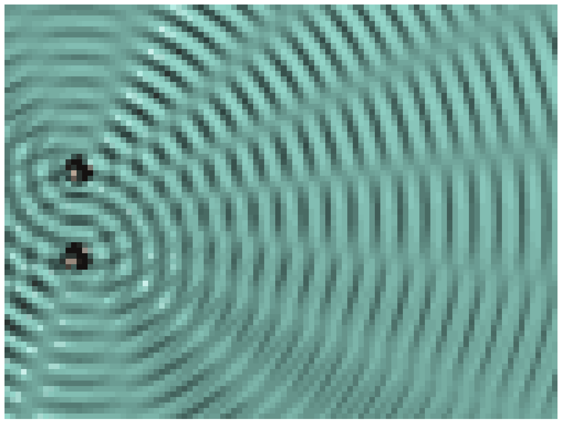
二. 波的干涉

波叠加的空间区域所产生的稳定的强度分布。

相干条件：**1.** 频率相同

2. 振动方向相同

3. 相差恒定



三. 驻波

驻波是一种重要的干涉现象。

两列相反传播的行波相干叠加就可形成驻波。

设两列相干的简谐波为：

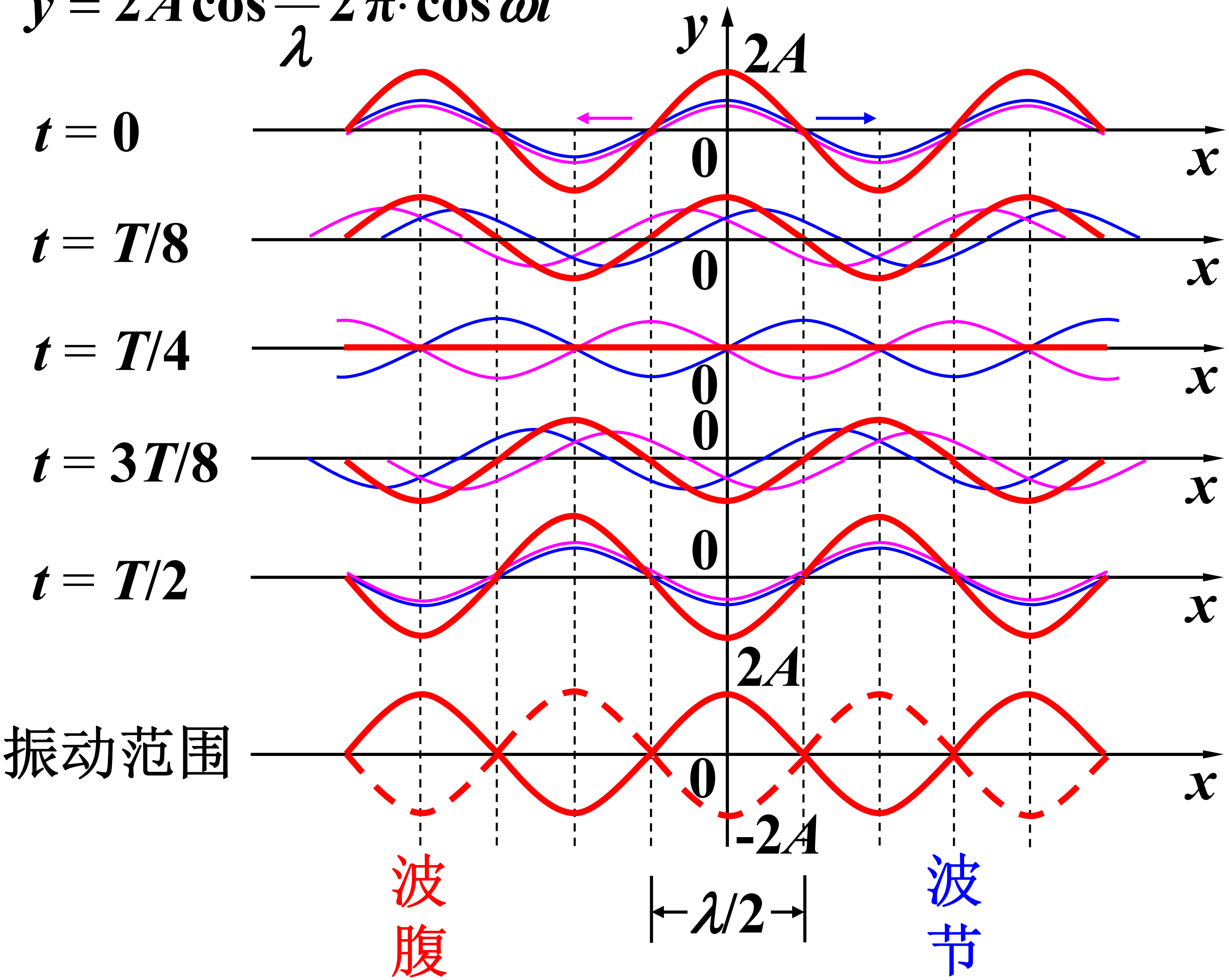
$+x$ 方向： $y_1 = A\cos(\omega t - \frac{x}{\lambda}2\pi)$

$-x$ 方向： $y_2 = A\cos(\omega t + \frac{x}{\lambda}2\pi)$

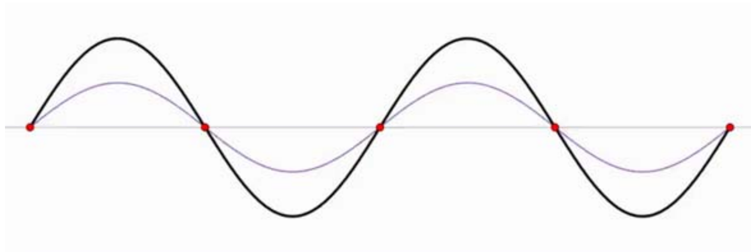
$$y = y_1 + y_2 = \underline{2A\cos\frac{x}{\lambda}2\pi \cdot \cos\omega t}$$

无传播特征

$$y = 2A\cos\frac{x}{\lambda}2\pi\cdot\cos\omega t$$



驻波特点



- 振幅： $\left|2A\cos\frac{x}{\lambda}2\pi\right|$

与坐标有关，出现振幅最大处 — 波腹和振幅最小处 — 波节，相邻波节距离是 $\lambda/2$。

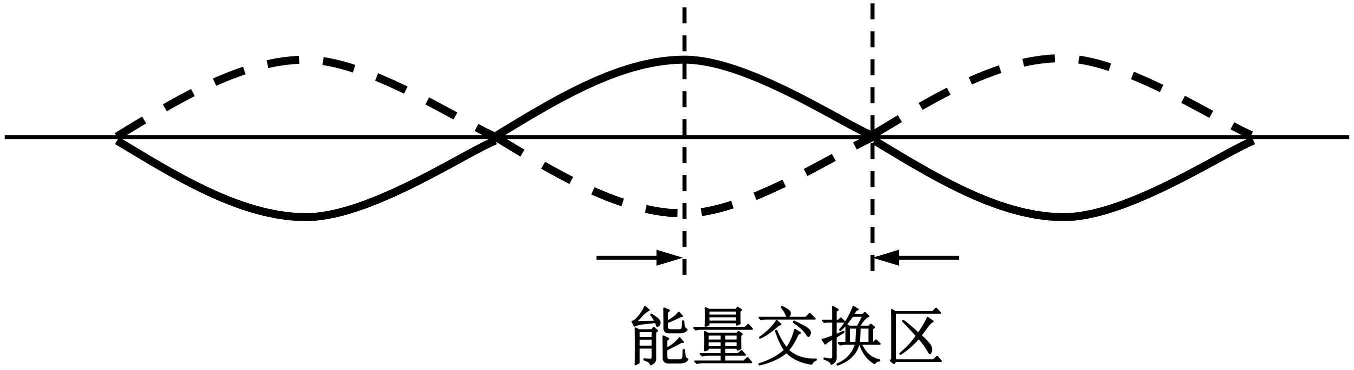
- 相位： $\cos\omega t$

与坐标无关 — 相位不传播。

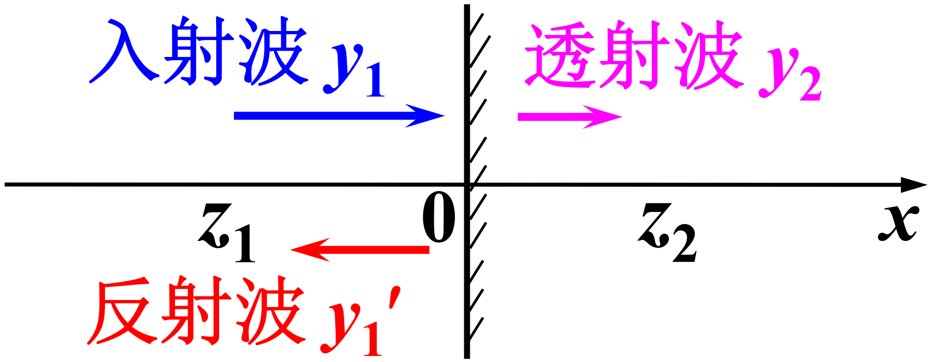
驻波本质：分段振动，相邻波节之间为一段。同段内质元振动同相，邻段的质元振动反相。

- **能量：** 合能流密度 $\overline{w}\cdot\vec{u}+\overline{w}\cdot(-\vec{u})=0$

  驻波不传播能量。能量封闭在相邻波节和波腹间，此区间内质元进行能量交换：



四. 波在界面的反射和透射



入射波 $$y_1 = A_1 \cos(\omega t - \frac{x}{\lambda_1} 2\pi + \varphi_1)$$

反射波 $$y_1' = A_1' \cos(\omega t + \frac{x}{\lambda_1} 2\pi + \varphi_1')$$

透射波 $$y_2 = A_2 \cos(\omega t - \frac{x}{\lambda_2} 2\pi + \varphi_2)$$

机械波⊥入射时，波函数满足界面关系：

① 界面两侧质元位移相同（接触）

$$[y_1 + y_1']_{x=0} = [y_2]_{x=0}$$

② 界面两侧应力相等（牛III定律）

$$\left[\frac{F_1}{S} + \frac{F_1'}{S}\right]_{x=0} = \left[\frac{F_2}{S}\right]_{x=0}$$

设是纵波： $E_1\left[\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial y_1'}{\partial x}\right]_{x=0} = E_2\left[\frac{\partial y_2}{\partial x}\right]_{x=0}$

代入波函数，利用三角函数独立性可得：

1. 相位关系

反射波：（1）若 $z_1 > z_2$，则 $\varphi_1' = \varphi_1$

波密到波疏，界面处反射波和入射波同相

（2）若 $z_1 < z_2$，则 $\varphi_1' = \varphi_1 \pm \pi$

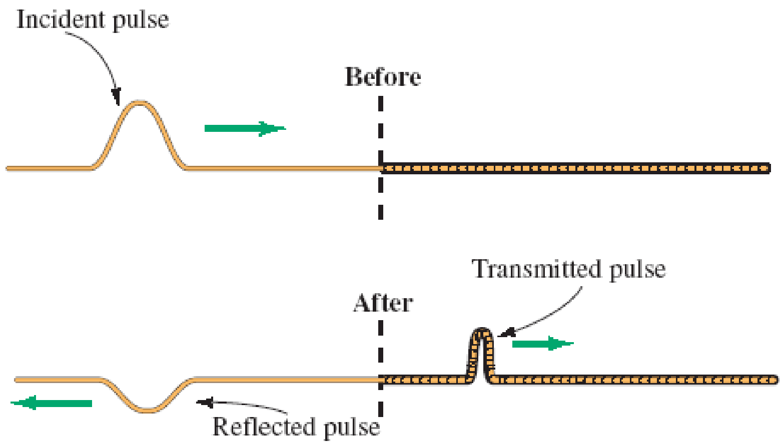
波疏到波密，界面处反射波相位突变 π

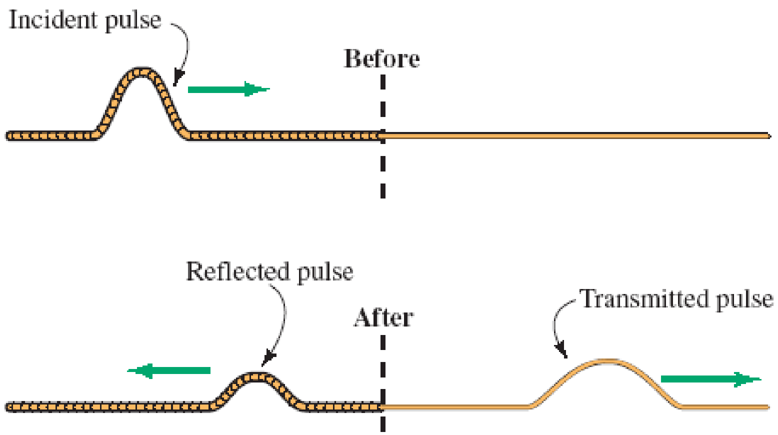
— 半波损失

透射波：不论 $z_1 > z_2$ 还是 $z_1 < z_2$，$\varphi_2 = \varphi_1$

界面处透射波总是与入射波同相

正脉冲在轻绳和密绳间的反射、透射





2. 振幅关系： $A_1' = \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} A_1$， $A_2 = \dfrac{2z_1}{z_1 + z_2} A_1$

反射比 $R = \dfrac{I_1'}{I_1} = \left(\dfrac{A_1'}{A_1}\right)^2 = \left(\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)^2$

透射比 $T = \dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{z_2 A_2^2}{z_1 A_1^2} = \dfrac{4 z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}$

$R + T = 1$（能量守恒）

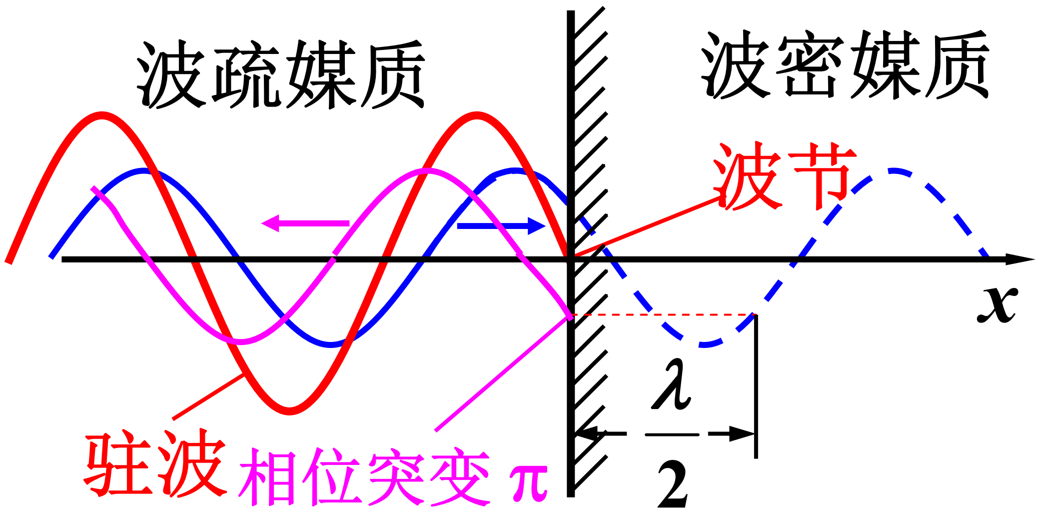
- z_1、z_2 互换， R、T 不变
- $z_1 >> z_2$ 或 $z_1 << z_2$ 时，$R \approx 1$，$T \approx 0$，全反射
- $z_1 \approx z_2$ 时，$R \approx 0$（无反射），$T \approx 1$，全透射

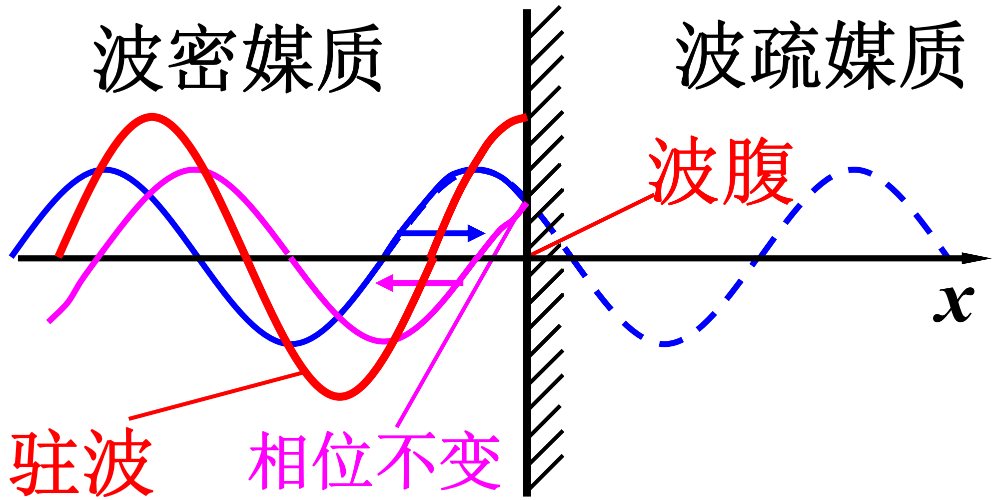
	z(kg/m^2·s)	T
空气（标准状况）	420	空气→水 0.001
水	1.5×10^6	空气→钢 0.00004
钢（按纵波算）	4.6×10^7	水 →钢 0.12

要使声波进入钢，不能有气隙。常在钢表面涂一层油以增加透射率。

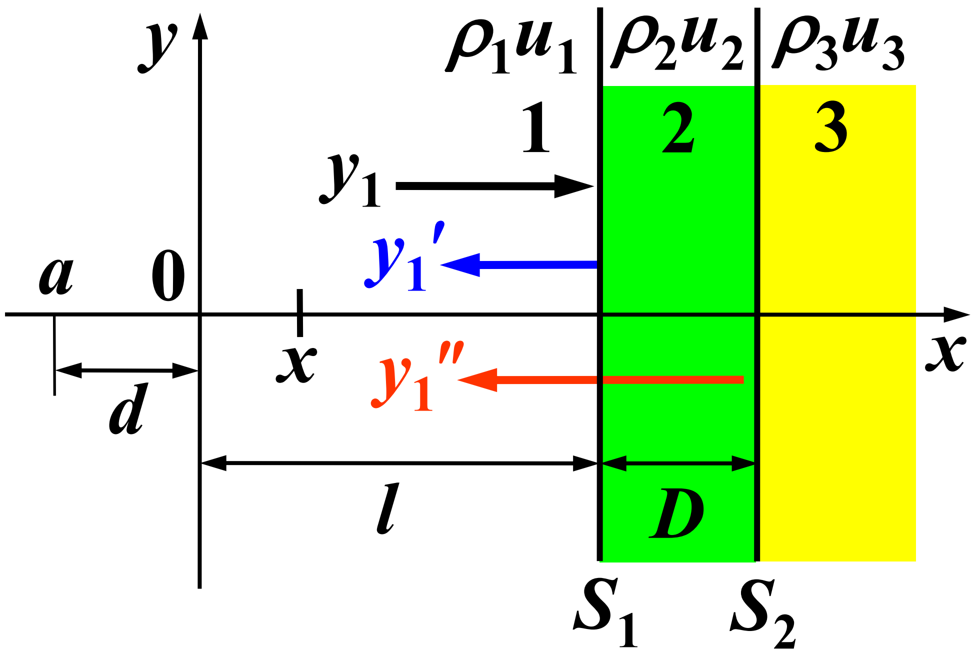
实际的波发射和接收装置都需要设置过渡层，以保证声阻抗的“匹配”，如 **B** 超。

全反射下的入射波和反射波





【例】如图示，简谐波沿 x 方向传播，a 点振动方程为 $y_a = A_1 \cos \omega t$，$\rho_1 u_1 < \rho_2 u_2 > \rho_3 u_3$ 。



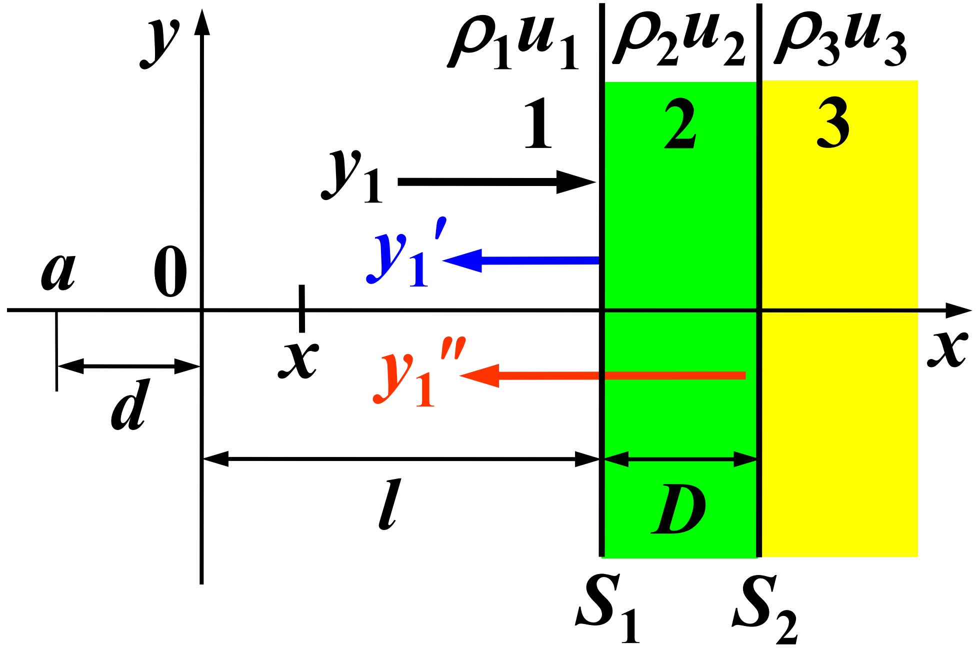
求：

1）1区入射波 y_1

2）S_1 面反射波 y_1'，设振幅为A_1'

3）S_2 面上反射回 1 区的波 y_1''，设振幅为 A_1''

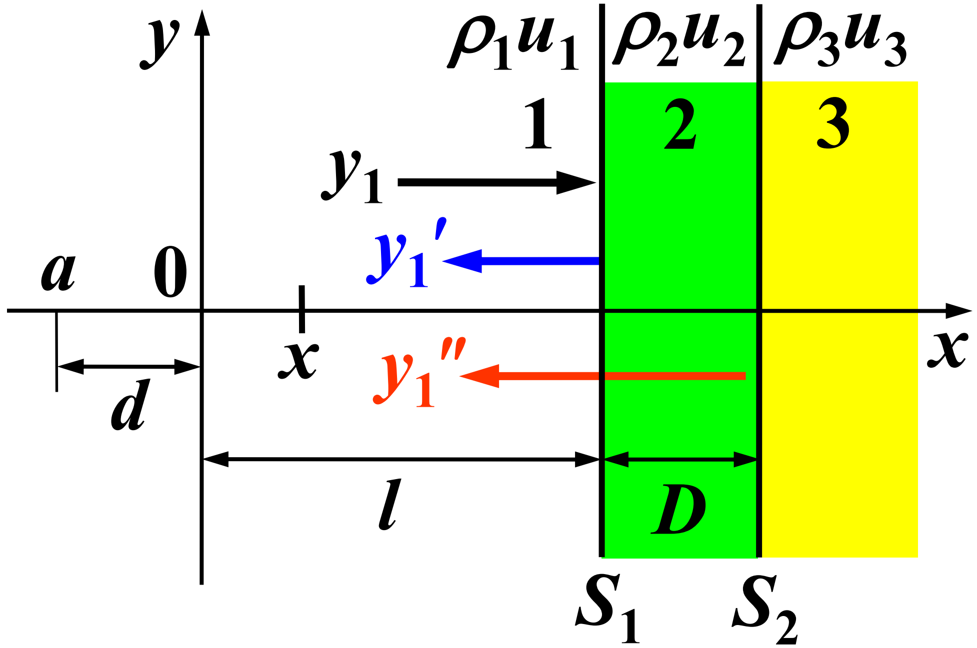
4）使反射波 y_1' 和 y_1'' 在 1 区干涉相消的 $D_{\min}$



解： 1）$y_1(x,\ t) = A_1 \cos\omega(t - \dfrac{x+d}{u_1})$

2）$y_1'(x,\ t) = A_1' \cos[\omega(t - \dfrac{d+l+l-x}{u_1}) - \pi]$

$$= A_1' \cos[\omega(t + \frac{x-2l-d}{u_1}) - \pi]$$



$$3）\ y_1''(x,\ t) = A_1''\cos\omega\left(t - \frac{d+l+l-x}{u_1} - \frac{2D}{u_2}\right)$$

$$= A_1''\cos\omega\left(t + \frac{x-2l-d}{u_1} - \frac{2D}{u_2}\right)$$

4）如何使 y_1' 和 y_1'' 产生相消干涉：

$$y_1' = A_1' \cos[\omega(t + \frac{x-2l-d}{u_1}) - \pi] \overset{令}{=} A_1' \cos[\omega t + \varphi_1'(x)]$$

$$y_1'' = A_1'' \cos\omega(t + \frac{x-2l-d}{u_1} - \frac{2D}{u_2}) \overset{令}{=} A_1'' \cos[\omega t + \varphi_1''(x)]$$

$$\varphi_1' - \varphi_1'' = -\pi + \frac{2D}{u_2}\omega$$

合振动振幅由相差 $\varphi_1' - \varphi_1''$ 决定。

相长干涉： $\varphi_1' - \varphi_1'' = 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2\ldots)$

相消干涉： $\varphi_1' - \varphi_1'' = (2k+1)\pi \quad (k = 0, 1, 2\ldots)$

使 y_1' 和 y_1'' 产生相消干涉应满足：

$$\varphi_1' - \varphi_1'' = -\pi + \frac{2D}{u_2}\omega = (2k+1)\pi$$

$$D = (k+1)\pi\frac{u_2}{\omega} = (k+1)\frac{\lambda_2}{2}$$

$$D_{\min} = \lambda_2/2$$

媒质 2 可作为隐形涂层。

【思考】此题有 Bug ，想想是什么？

§9.7 简正模式

驻波是波通过系统边界反射相干叠加产生的多自由度系统的某个特定频率的集体振动。

简正模式：任何系统都存在特定频率的集体振动。一种频率对应一种稳定的振动方式。

相应频率称作简正频率或固有频率。

驻波是一类特殊的简正模式：还有波长概念。

简正模式和频率完全由系统（含边界条件）决定，与外界因素（初始条件）无关。

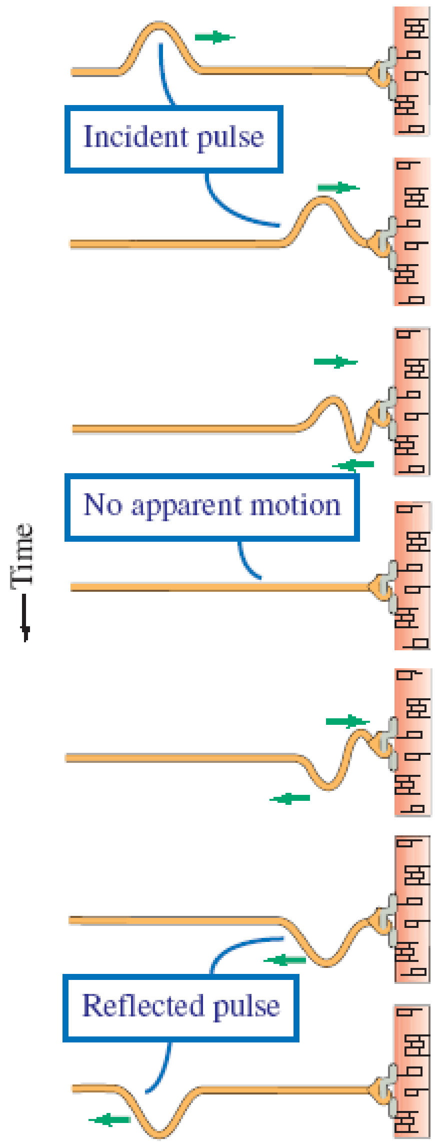
2 类常见边界条件

- 固定边界条件

正脉冲传到固定端，绳会对端点施加一个向上作用力，端点则对绳施加一个向下反作用力，从而产生反射的负脉冲。

入射波和反射波在固定端引起的振动反向，叠加后相消，固定端是波节。

$$y(x,t)\big|_{x=\text{固定端}}=0 \quad (\text{位移为零})$$



注意：波函数是入射波和反射波叠加的总波函数

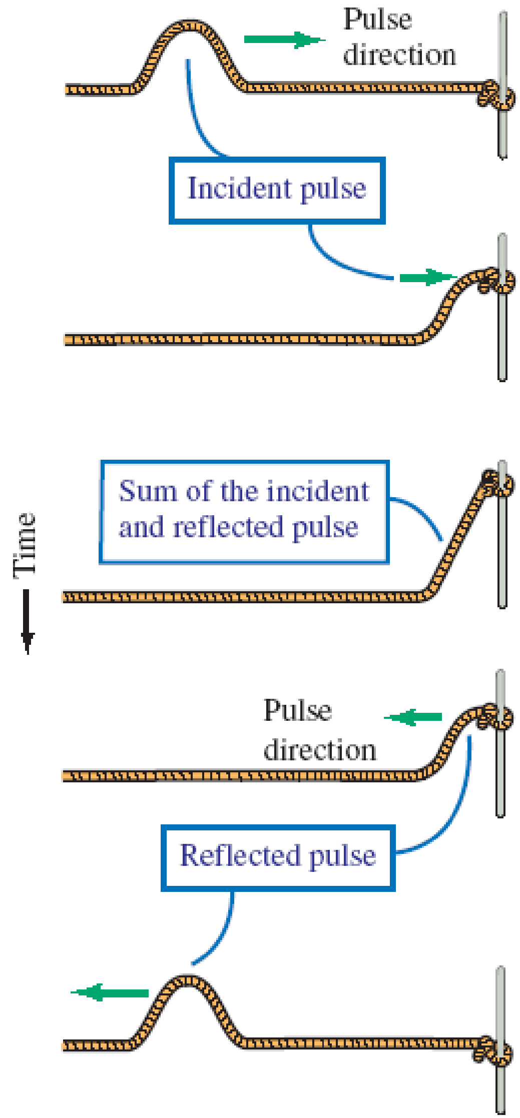
• 自由边界条件

正脉冲传到自由端，绳端点不受约束，则靠惯性继续向上运动。

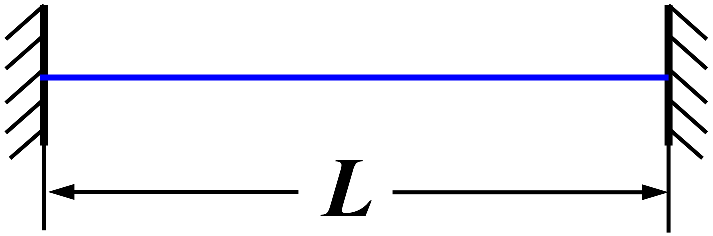
相当于对绳头施加一个向上作用力，从而产生反射的正脉冲。

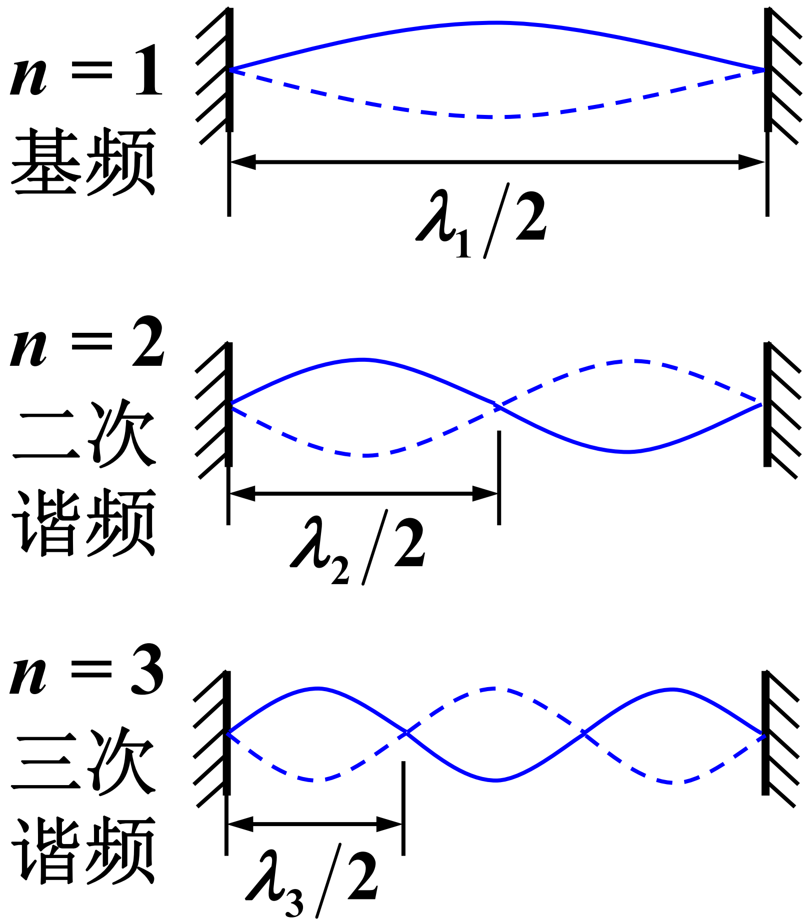
入射波和反射波在自由端引起的振动同向，叠加后加强，所以自由端是波腹。

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\text{自由端}} = 0 \quad (\text{应力为零})$$



两端固定的弦中的简正模式





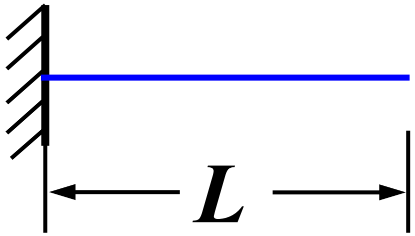
固定点为波节：

$$n\frac{\lambda_n}{2}=L，\quad n=1,2,3\cdots$$

$$\lambda_n=\frac{2L}{n}$$

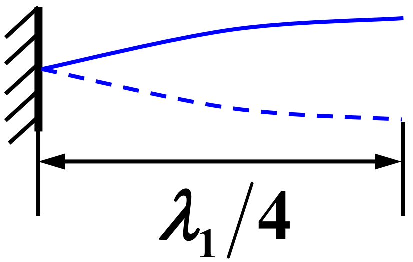
$$\nu_n=\frac{u}{\lambda_n}=n\frac{u}{2L}$$ （u 是弦中波速）

一端固定，一端自由

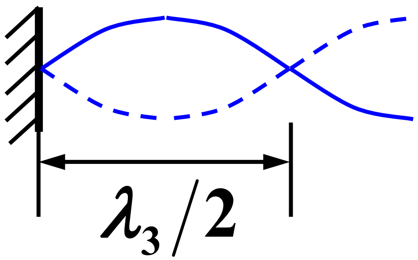


$$L = n\frac{\lambda_n}{4}, \quad n = 1,3,5\cdots$$

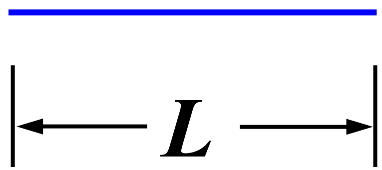
$n = 1$
基频



$n = 3$
三次
谐频

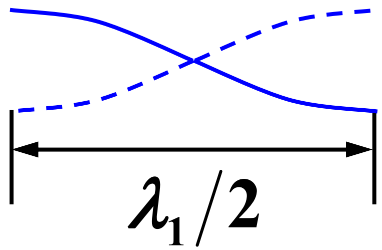


两端自由

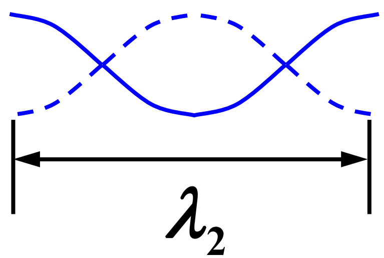


$$L = n\frac{\lambda_n}{2}, \quad n = 1,2,3\cdots$$

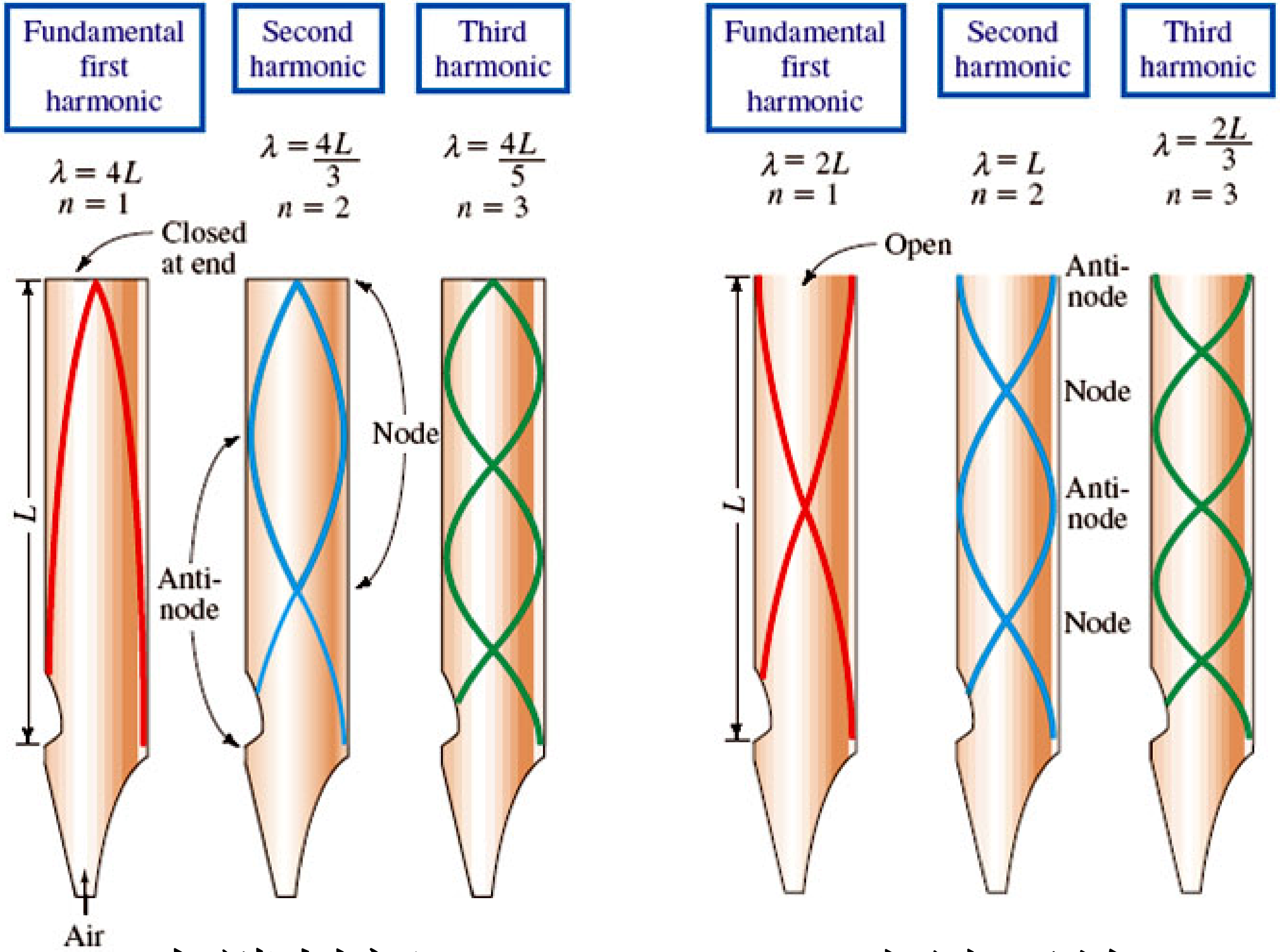
$n = 1$
基频



$n = 2$
二次
谐频

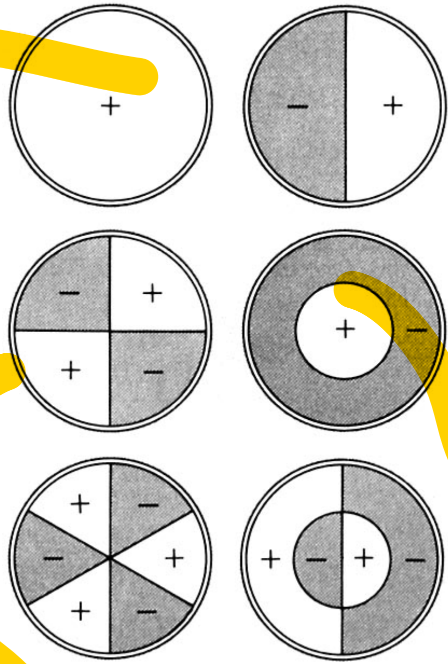


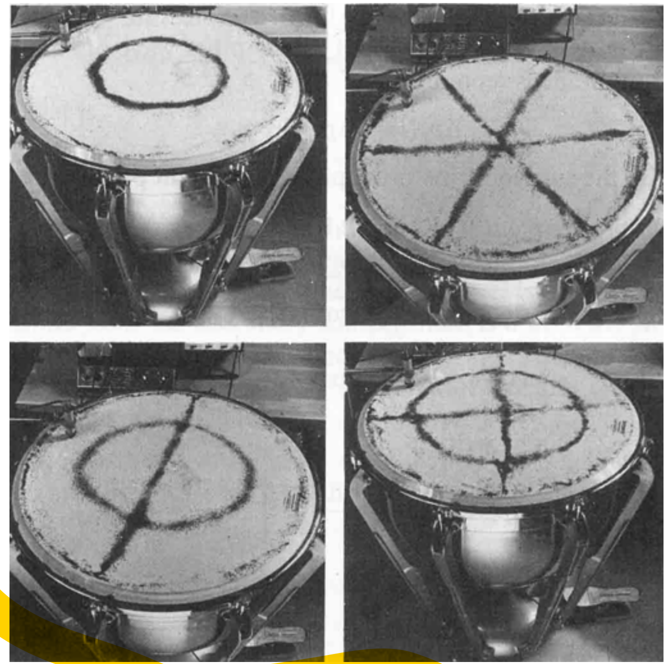
笛中简正模式

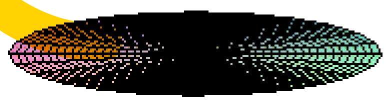


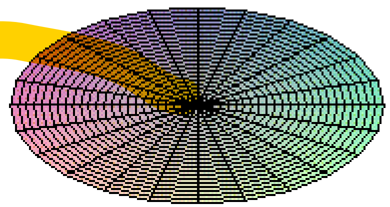
末端封闭　　末端开放

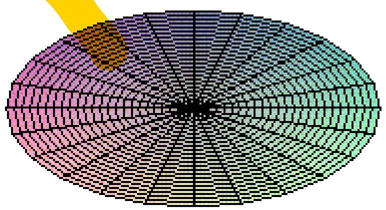
圆形薄膜中的简正模式



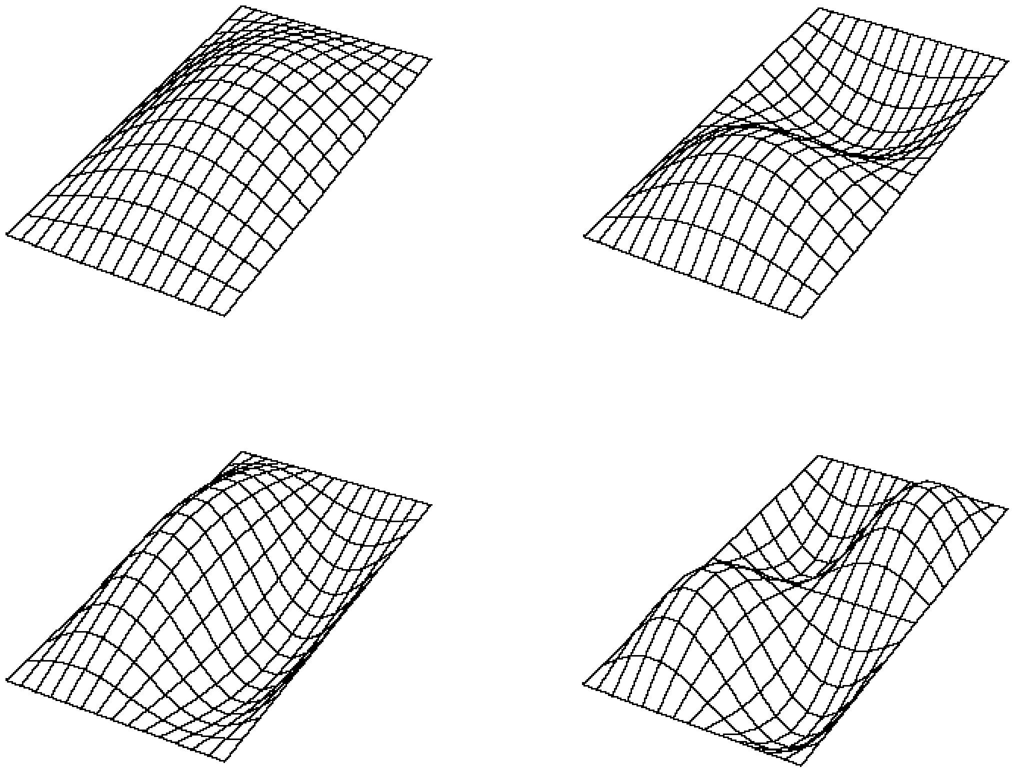






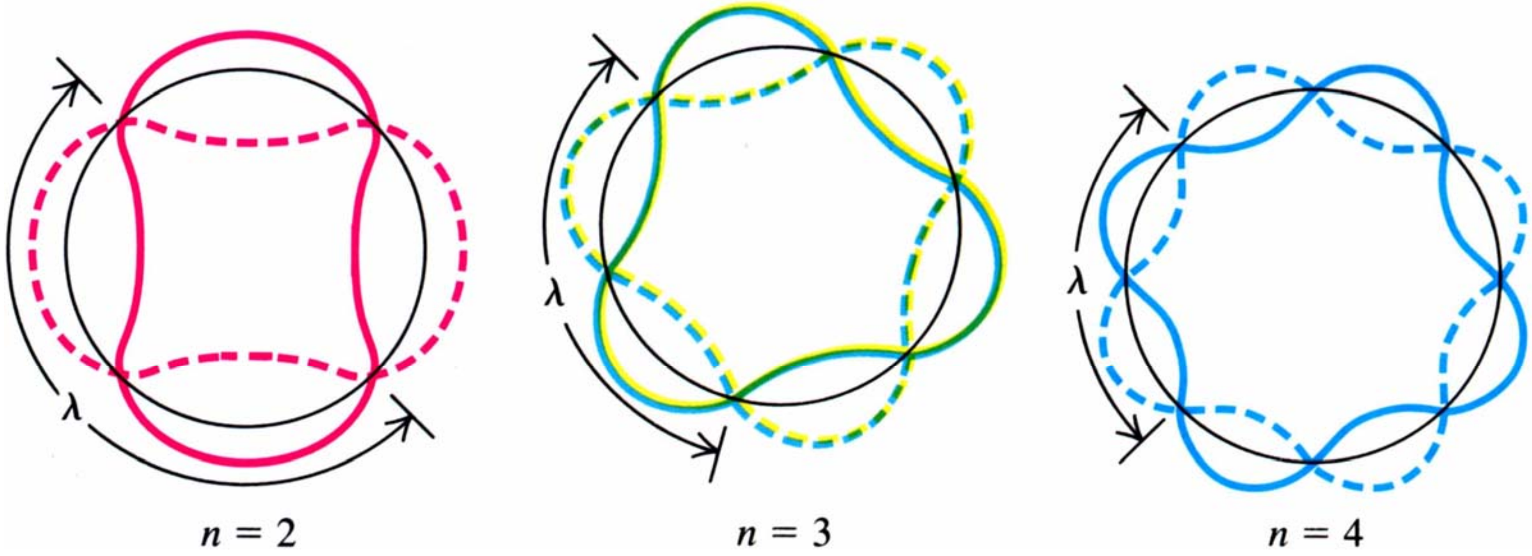


矩形薄膜中的简正模式



【TV】 薄膜驻波现象　玻璃板振动模

圆环弦中的简正模式



此模型在量子力学早期是重要物理图像

1 维简正模式的求解

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

定解条件 $\begin{cases}\text{边界条件}\\ \text{初始条件}\end{cases}$

$$\text{边界条件}\begin{cases} y(x,t)\big|_{x=\text{固定端}}=0 \\ \left.\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\text{自由端}}=0 \end{cases}$$

$$\text{初始条件}\begin{cases} y(x,t)\big|_{t=0}=f(x)\Rightarrow\text{每个质元初始位移} \\ \left.\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)\Rightarrow\text{每个质元初始速度} \end{cases}$$

初始条件可类比离散的耦合振子系统就能理解。

既然简正模式是种集体振动：不同位置振幅不同，但频率相同，这说明简正模式的波函数或振动函数形式为：

$$y(x,t)=Y(x)\cdot T(t)$$

$Y(x)$：反映不同位置处的位 移，最大值为振幅

$T(t)$：反映同频率的振动因子，应是 $\cos\omega t$ 或 $\sin\omega t$

数学上称为分离变量法：齐次线性微分方程附加齐次边界条件，一定可以用分离变量法求解。

将上面波函数代入波动方程可得：

$$\frac{\mathrm{d}^2 Y(x)}{\mathrm{d}x^2}T=\frac{1}{u^2}Y\frac{\mathrm{d}^2 T(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2T(t)}{\mathrm{d}t^2}\equiv -C$$

上式可分为下面两个常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}+Cu^2T=0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}x^2}+CY=0$$

边界条件 $\begin{cases} y(x,t)\big|_{x=\text{固定端}}=0 \\ \left.\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\text{自由端}}=0 \end{cases}$ 换为 $\begin{cases} Y(x)\big|_{\text{固定端}}=0 \\ \left.\dfrac{\partial Y(x)}{\partial x}\right|_{\text{自由端}}=0 \end{cases}$

要满足边界条件，必须 $C>0$，令：

$C=k^2$ 从量纲判断，k 是波数

关于空间部分 Y 的方程变为求解本征值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}x^2}+k^2Y=0 \\ \text{边界条件}\quad Y(x)\Big|_{\text{固定端}}=0 \ \text{或}\ \dfrac{\partial Y(x)}{\partial x}\Bigg|_{\text{自由端}}=0 \end{cases}$$

可解出本征函数、本征波矢、固有频率：

$$\left\{Y_n(x),\ \ k_n,\ \ \omega_n,\ \ n=1,2,\ldots\right\}\quad(\omega_n=k_nu)$$

即：

$$\frac{\mathrm{d}^2Y_n(x)}{\mathrm{d}x^2}+k_n^2Y_n(x)=0$$

特别是本征函数具有正交性:

$$\int_{\text{边界内}} Y_n(x)Y_m(x)\mathrm{d}x = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

关于时间部分 T 的方程变为:

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} + \omega_n^2 T = 0$$

两个线性无关解: $\cos\omega_n t$ 和 $\sin\omega_n t$

简正模式

空间和时间函数乘积就是简正模式的波函数或振动函数：

$$\left\{ Y_n(x)\cos\omega_n t,\ \ Y_n(x)\sin\omega_n t,\ \ n = 1,2,... \right\}$$

注意：简正模式通过求解本征值问题得到，本征值问题完全决定于系统，特别是边界条件至关重要，和初始条件（外界扰动）无关。所以简正模式只决定于系统。

在数学上，求解简正模式就是求解波动方程在特定条件下（边界条件）的所有可能的特解。

系统中的波或振动

一般情况下，系统中的任何波扰动（振动）由有限或无限个简正模式线性叠加而成。

$$y(x,t)=\sum_n[A_nY_n(x)\cos\omega_n t+B_nY_n(x)\sin\omega_n t]$$

组合系数 A_n、B_n 由初始条件定。

$$\text{初始条件}\begin{cases} y(x,t)\big|_{t=0}=f(x)\ \Rightarrow \text{每个质元初始位移} \\ \left.\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)\ \Rightarrow \text{每个质元初始速度} \end{cases}$$

在数学上，上面关系就是通解和特解的关系：

初始条件不一样，通解不一样，但特解不变。

组合系数 A_n、B_n 可由本征函数的正交性来确定：

$$y(x,t)=\sum_n [A_n Y_n(x)\cos\omega_n t + B_n Y_n(x)\sin\omega_n t]$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=\sum_n [-A_n\omega_n Y_n(x)\sin\omega_n t + B_n\omega_n Y_n(x)\cos\omega_n t]$$

令 $t=0$ 得：

$$y(x,0)=\sum_n A_n Y_n(x)=f(x)$$

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_n B_n\omega_n Y_n(x)=g(x)$$

两边同乘以 $Y_m(x)$ 在边界内积分可得：

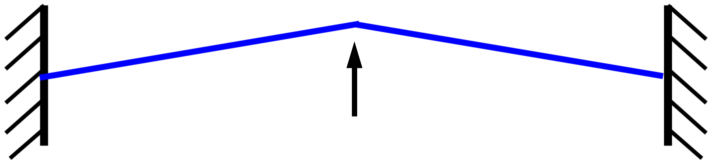
$$\int_{边界内} \sum_{n} A_n Y_n(x) Y_m(x) \mathrm{d}x = \int_{边界内} f(x) Y_m(x) \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad A_m = \int_{边界内} f(x) Y_m(x) \mathrm{d}x$$

$$\int_{边界内} \sum_{n} B_n \omega_n Y_n(x) Y_m(x) \mathrm{d}x = \int_{边界内} g(x) Y_m(x) \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad B_m = \frac{\int_{边界内} g(x) Y_m(x) \mathrm{d}x}{\omega_m}$$

不同的波扰动，所包含的每种简正模式的“比重”不同，有些模式可能不出现：

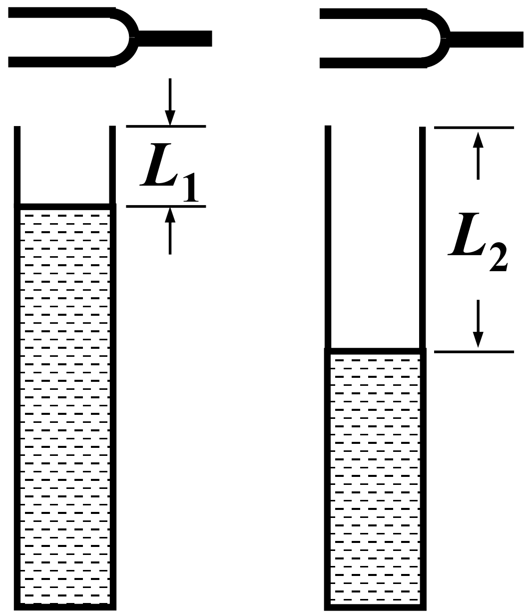


从中间拨动琴弦，则中点必为波幅，所以中点为波节的那些模式不出现。（控制音色）

通过共振可激发单个简正模式。（调音准）

【例】一频率为 248.5Hz 的音叉放在盛水的细管口，连续调节水面高度，当空气柱的高度相继为 $L_1 = 0.34\text{m}$ 和 $L_2 = 1.03\text{m}$ 时发生共鸣。

求：声波在空气中的声速 u 。



解：发生共鸣时形成驻波，

管口为波腹，水面为波节。

空气柱长度满足条件：

$$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}，\quad n = 0, 1, 2\cdots$$

两次共鸣的频率不变 — 两次激发模式相同，

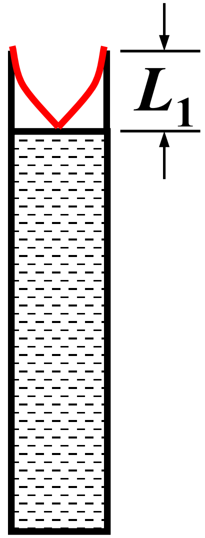
波长满足： $L_1=(2n+1)\dfrac{\lambda}{4}$， $L_2=[2(n+1)+1]\dfrac{\lambda}{4}$

$$\therefore\ \ \lambda=2(L_2-L_1)=1.38\,\mathrm{m}\,,\qquad n=\frac{3L_1-L_2}{2(L_2-L_1)}\approx 0$$

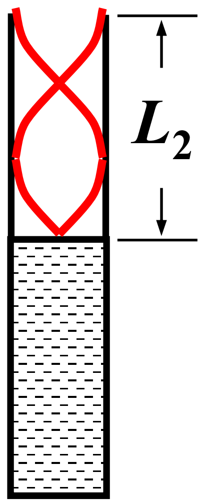
声速： $u=\lambda\nu=1.38\times 248.5=343\,\mathrm{m/s}$

对声音的压强纵波，需把波节和波幅调换（为何）

$$L_1=\frac{\lambda}{4}$$



$$L_2=\frac{3\lambda}{4}$$



§ 9.8 多普勒效应

多普勒效应：由于波源或观察者的运动，使接收到的频率不同于波源频率的现象。

一. 机械波的多普勒效应

波的频率 ν ：单位时间内，媒质质元的振动次数，或通过媒质中某点完整波的数目。

$$\nu = \frac{u}{\lambda}$$

波源频率 ν_S：波源在单位时间内振动的次数，或发出的完整波的数目。

接收频率 ν_R **：** 接收器（观察者）在单位时间内接收的振动次数或完整波的数目。

参考系和速度： 参考系是媒质，波源速度 $\boldsymbol{v}_S$ 和接收器速度 $\boldsymbol{v}_R$ 是相对媒质的速度。

运动方向： 在波源 $\boldsymbol{S}$ 和接收器 $\boldsymbol{R}$ 的连线方向。

符号规定： 波源向着接收器运动 $\boldsymbol{v}_S > 0$，背着接收器运动 $\boldsymbol{v}_S < 0$；接收器向着波源运动 $\boldsymbol{v}_R > 0$，背着波源运动 $\boldsymbol{v}_R < 0$；声速取绝对值 $\boldsymbol{u} > 0$ 。

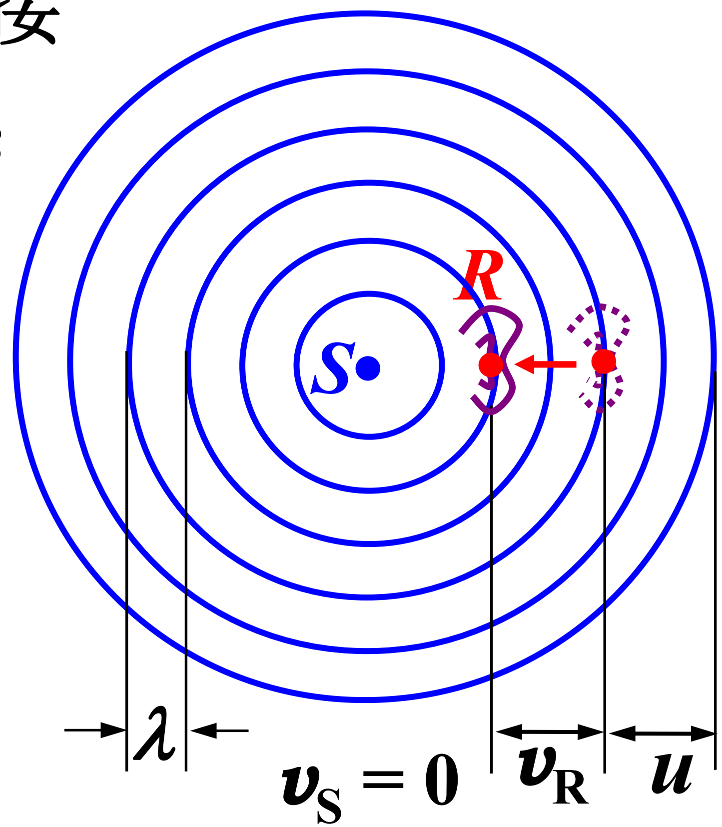
$\boldsymbol{S} \longrightarrow \boldsymbol{v}_S > 0$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{v}_R < 0$

1. 波源静止 $v_S = 0$，接收器运动 $v_R \neq 0$

波源静止，所以：$\nu = \nu_S = \dfrac{u}{\lambda}$

接收器运动，单位时间内接收的完整波个数发生变化：

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{\lambda} = \frac{u + v_R}{u}\nu_S$$

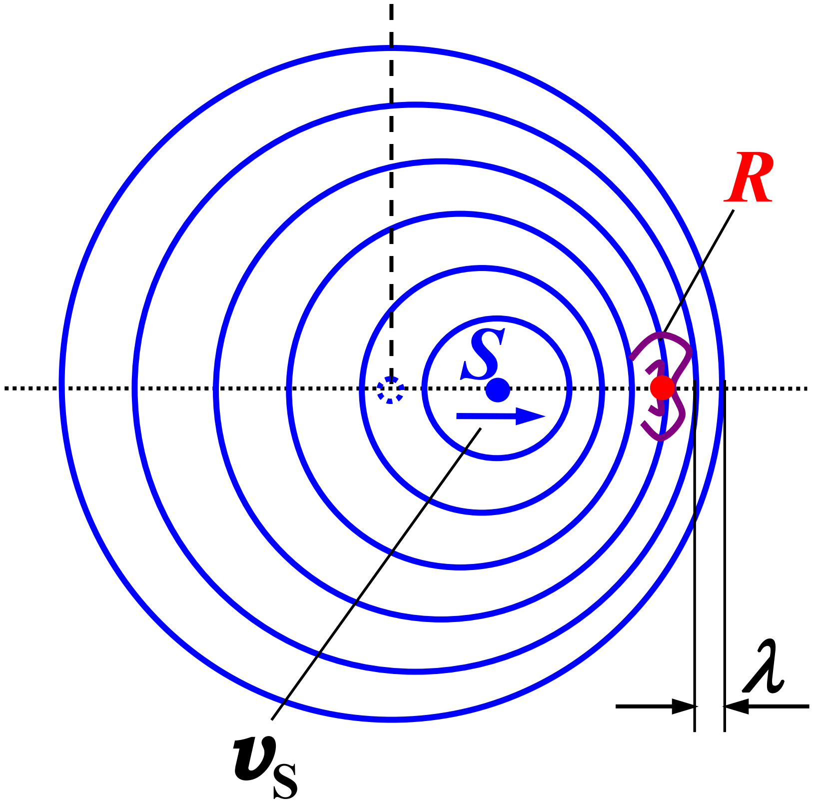


R 接近 S：$\nu_R > \nu_S$

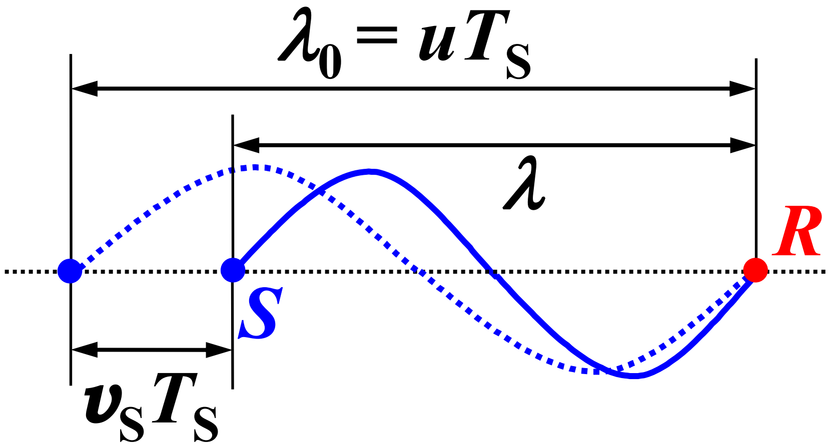
R 远离 S：$\nu_R < \nu_S$

2. 波源运动 $\boldsymbol{v}_S \neq 0$，接收器静止 $\boldsymbol{v}_R = 0$

接收器静止，所以：$\nu_R = \nu = \dfrac{u}{\lambda}$



波源运动前方波长缩短



$$\nu_R = \nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{(u - \boldsymbol{v}_S)T_S} = \frac{u}{u - \boldsymbol{v}_S}\nu_S$$

水波的多普勒效应，波源向左运动

3. 波源运动 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{S}} \neq 0$，接收器运动 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{R}} \neq 0$

这种情况下： $\nu_{\mathrm{S}} \neq \nu \neq \nu_{\mathrm{R}}$

考虑波源对媒质的运动，应有：

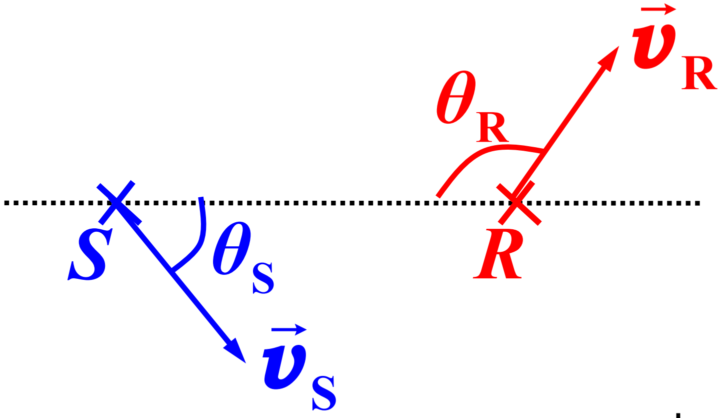
$$\nu = \frac{u}{u - v_{\mathrm{S}}} \nu_{\mathrm{S}}$$ （媒质中的波长变）

考虑接收器对媒质的运动，应有：

$$\nu_{\mathrm{R}} = \frac{u + v_{\mathrm{R}}}{u} \nu$$ （接收波的数目变）

$$\therefore \ \nu_{\mathrm{R}} = \frac{u + v_{\mathrm{R}}}{u} \cdot \frac{u}{u - v_{\mathrm{S}}} \nu_{\mathrm{S}} = \frac{u + v_{\mathrm{R}}}{u - v_{\mathrm{S}}} \nu_{\mathrm{S}}$$

*4. 机械波的多普勒效应的一般形式



θ_R 是 $\vec{v}_R$ 与 $\overrightarrow{RS}$ 之间夹角

θ_S 是 $\vec{v}_S$ 与 $\overrightarrow{SR}$ 之间夹角

$$\nu_R = \frac{u + |\boldsymbol{v}_R| \cdot \cos\theta_R}{u - |\boldsymbol{v}_S| \cdot \cos\theta_S} \nu_S$$

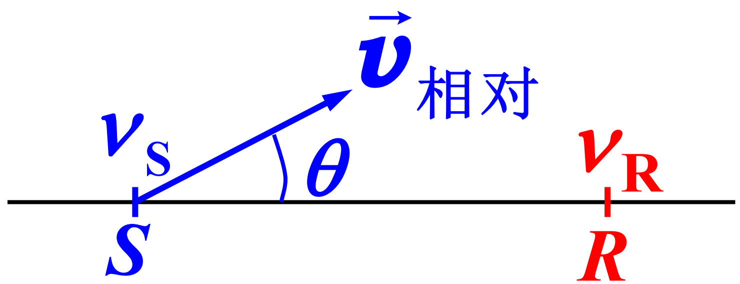
无相对运动情形：$\vec{v}_R = \vec{v}_S$，$\theta_R + \theta_S = \pi$，$\nu_R = \nu_S$

横向运动情形：$\theta_R = \theta_S = \pi/2$，$\nu_R = \nu_S$

机械波不存在横向多普勒效应

二. 电磁波的多普勒效应

电磁波不同于机械波，不需要媒质。



由相对论可导出：

$$\nu_R = \frac{\sqrt{c^2 - v_{相对}^2}}{c - |v_{相对}| \cdot \cos\theta} \nu_S$$

$\theta = \pi/2$，$\nu_R \neq \nu_S$ — 横向多普勒效应

注意：起作用的是相对运动（相对速度），按“波源相对接收器运动”或按“接收器相对波源运动”，结果是一样的。

纵向多普勒效应

光源和接收器相对接近时，$\theta = 0$ ：

$$\nu_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{c+|\boldsymbol{v}|}{c-|\boldsymbol{v}|}}\,\nu_{\mathrm{S}}$$ 频率增大

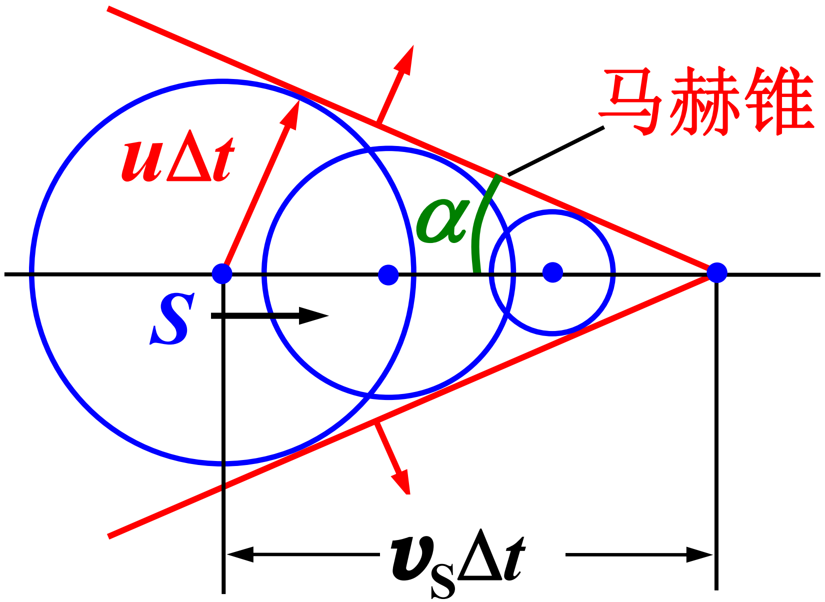
光源和接收器相对远离时，$\theta = \pi$ ：

$$\nu_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{c-|\boldsymbol{v}|}{c+|\boldsymbol{v}|}}\,\nu_{\mathrm{S}}$$ 频率减小

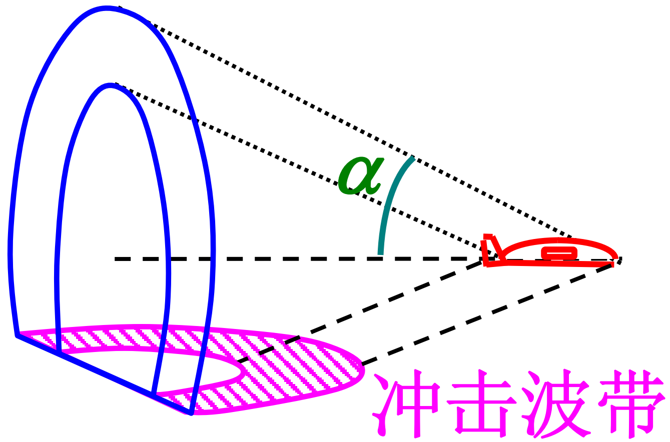
频率变化与机械波的情形一样。

三. 激波

波源速度 v_S > 波速 u 时，后发出的波面将超越先发出的波面，形成锥形波面 —— 冲击波。

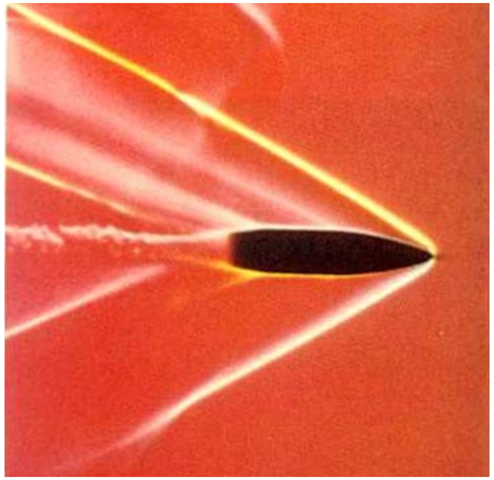


马赫数：$$\frac{v_S}{u} = \frac{1}{\sin\alpha}$$



对超音速飞机的最小飞行高度要有一定限制。

Fig. 18-24 Shock waves produced by the wings of a Navy FA 18 jet. They are visible because the sudden decrease in air pressure in the shock waves caused water molecules in the air to condense, forming a fog.



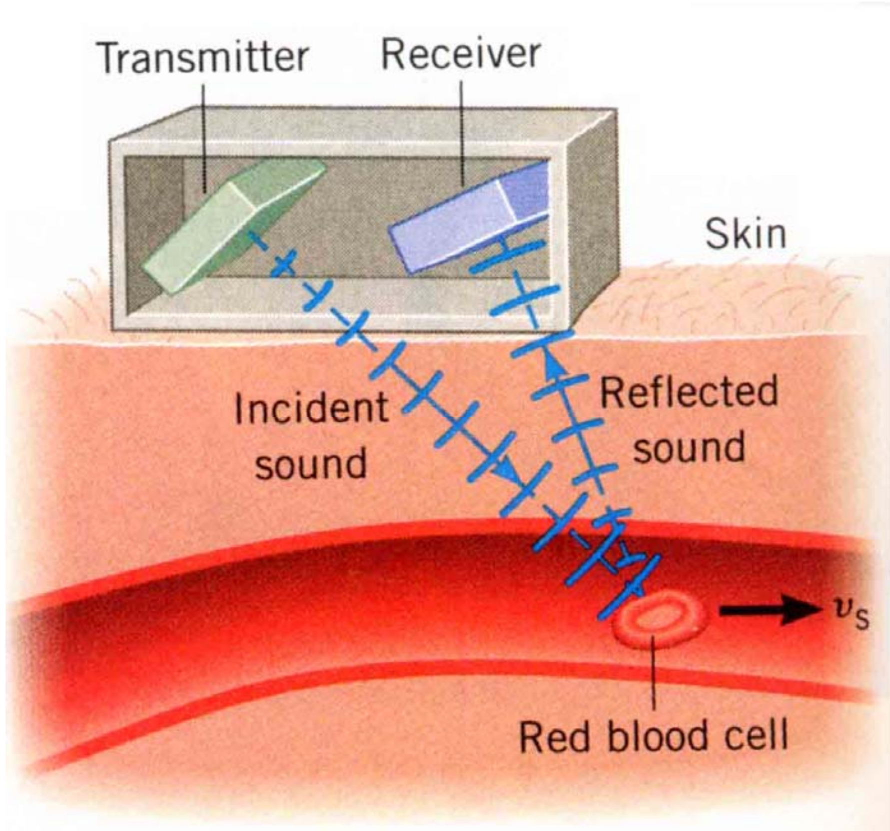
超音速子弹在空气中形成激波，马赫数 2

*电磁激波 — 切连柯夫辐射

在介质中，高能带电粒子速度超过光在介质中的速度时，产生锥形电磁波 — 切连柯夫辐射。它发光持续时间短（数量级10^{-10}s），不易引起脉冲重叠，可用来探测高能带电粒子，也可用来作起始脉冲和截止脉冲。

四. 多普勒效应的应用

- 测速（固、液、气）
- 多普勒红移（“大爆炸”宇宙论）
- 卫星跟踪

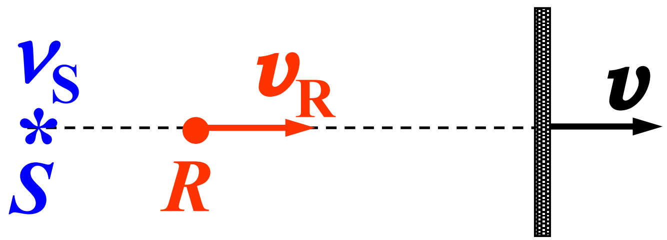


多普勒测速仪　　超声多普勒效应测血流速

【演示】多普勒效应

【例】一静止声源 S 的频率 $\nu_S = 300\text{Hz}$，声速 $u = 330\text{m/s}$，观察者 R 以速度 $v_R = 60\text{m/s}$ 向右运动，反射壁以速度 $v = 100\text{m/s}$ 也向右运动。

求：R 测得的拍频?



解：R 收到的声源发射波的频率：

$$\nu_R = \frac{u - v_R}{u}\nu_S$$ （各量为绝对值，下同）

反射壁收到的声源发射波的频率：

$$\nu' = \frac{u - v}{u}\nu_S$$

R 收到的反射壁反射波的频率：

$$\nu_{\mathrm{R}}' = \frac{u+\upsilon_{\mathrm{R}}}{u+\upsilon}\nu' = \frac{u+\upsilon_{\mathrm{R}}}{u+\upsilon}\cdot\frac{u-\upsilon}{u}\nu_{\mathrm{S}}$$

拍频： $$|\nu_{\mathrm{R}} - \nu_{\mathrm{R}}'| = |2\frac{\upsilon-\upsilon_{\mathrm{R}}}{u+\upsilon}\nu_{\mathrm{S}}|$$

$$= 2\times\frac{100-60}{330+100}\times 300$$

$$\approx 55.8\,\mathrm{Hz}$$

§9.9 复波，群速度

一. 复波

简谐波频率单一（单色波），在时间、空间上无限延续（波列无限长），除了频率和振幅外不携带任何信息，称为载波。

复波是非简谐波，由有限多或无限多个不同频率的简谐波叠加而成。

可按某种规律对作为载波的简谐波进行调制，有调幅、调频、调相等方式。被调制的简谐波是复波，可以携带和传递信息。

例如，把传播方向相同、振幅相同、频率相近、波速相近的两个简谐波叠加可得调幅波：

$$y_1 = A\cos(\omega_1 t - k_1 x)\text{，}\quad y_2 = A\cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

其中 $\omega_1 \approx \omega_2, \quad u_1 \approx u_2, \quad k_1 \approx k_2$

记 $\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad k = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 << \omega, \quad \Delta k = k_1 - k_2 << k$$

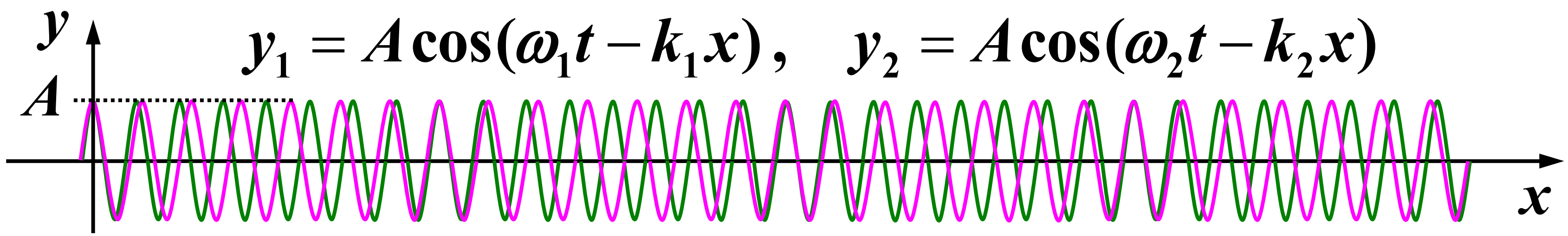
$$u_p = \frac{u_1 + u_2}{2} \approx \frac{\omega}{k} \qquad u_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

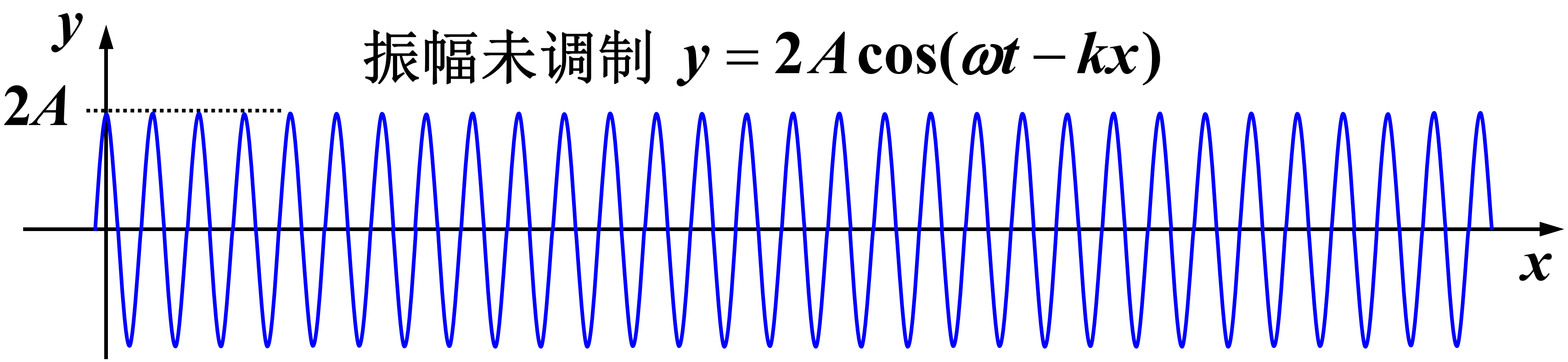
$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x)\cos(\omega t - kx)$$

小　　小　　　　大　大

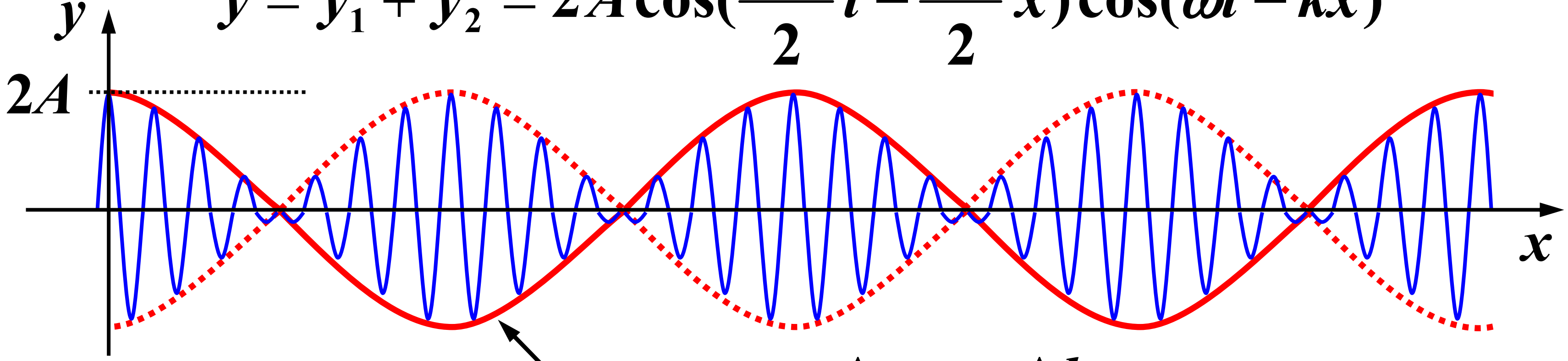
振幅　　　　　　相位

特点：振幅缓慢变化、相位迅速变化的调幅波





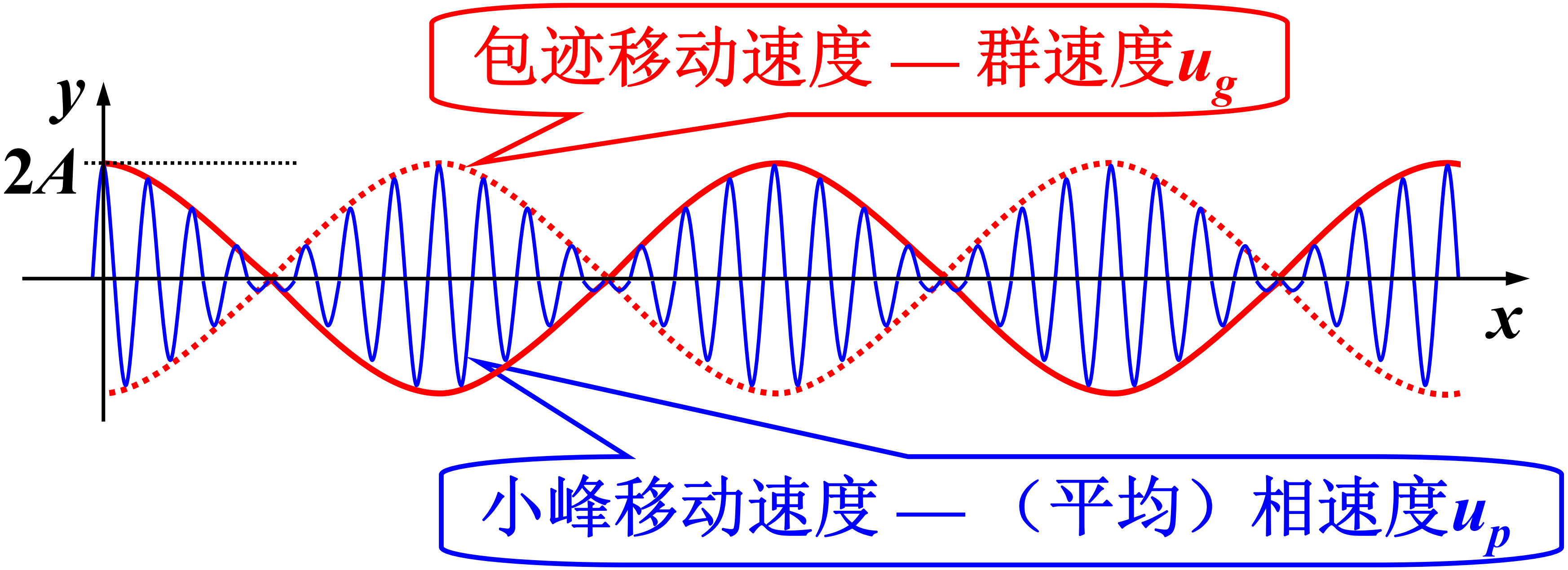
$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x)\cos(\omega t - kx)$$



包络因子 $\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x)$

振幅受包络因子调制，产生“波拍”现象。

调幅波又称波群或波包，波群整体移动速度或波包移动速度称为群速度。



$$u_p = \frac{\omega}{k} \qquad u_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

二. 色散

色散指不同频率 ω（或波数 k、波长 λ）的波在媒质中以不同的波速 u 传播的现象。

无色散媒质	色散媒质
$\omega_1 \neq \omega_2$ 时，$u_1 = u_2$	$\omega_1 \neq \omega_2$ 时，$u_1 \neq u_2$

在无色散媒质中，频率和波数是线性关系：

$$\omega = uk \qquad u = \text{常数}$$

在色散媒质中，频率和波数关系为：

$$\omega = u(k)k = \omega(k)$$

$\omega(k)$、$u(k)$ 称为色散关系，反映媒质的色散规律，由波和物质的相互作用机制决定。

例如，深水表面重力波的色散关系：

$$\omega = \sqrt{gk}$$

传播于1维刚性棒的横波的色散关系：

$$\omega = ak^2 \quad 或 \quad u = ak$$

正常色散：$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}k} < 0$　　反常色散：$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}k} > 0$

三. 波包、群速度

实际的波包一般由频率 ω（波数 k、波长 λ）连续变化的简谐分波构成，频率 ω（波数 k、波长 λ）分布在一定范围内。

波包波函数：

$$y(x,t)=\int_0^{\infty} a(k)\cos[\omega(k)t-kx]\,\mathrm{d}k$$

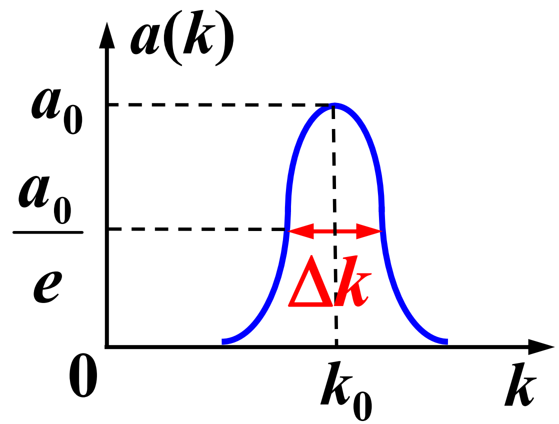
$a(k)$ — 振幅谱密度函数，振幅按波数 k 的分布

$a(k)\mathrm{d}k$ 是频率为 $\omega(k)$ 的简谐分波的振幅

用波数 k 作自变量是习惯，也方便：这样色散关系 $\omega(k)$ 可直接显示出色散将对波包传播有影响。

下面用一个典型的振幅谱密度函数 $a(k)$，求出波包函数 $y(x, t)$，考虑色散的影响，研究波包的性质和运动，所得结论具有普适性。

设 $a(k)$ 是高斯型函数：



$$a(k) = a_0 e^{-\alpha(k-k_0)^2}$$

$$\text{谱线宽度}\Delta k = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

为了计算积分，把 $\omega(k)$ 在 k_0 附近作展开，保留到 2 阶求导项：

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0}(k-k_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right|_{k_0}(k-k_0)^2$$

令 $K=k-k_0$，$\omega(k_0)=\omega_0$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0}=\dot{\omega}$，$\left.\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right|_{k_0}=\ddot{\omega}$

$$a(k)=a_0e^{-\alpha K^2}\qquad \omega(k)=\omega_0+\dot{\omega}K+\ddot{\omega}K^2$$

为计算积分： $y(x,t)=\int_0^\infty a(k)\cos[\omega(k)t-kx]\,\mathrm{d}k$

用欧拉公式把三角函数写成复指数函数更容易求，求出积分取实部即可（注意：这种技巧要求原三角函数只有加、减线性运算，没有乘除运算）：

$$\tilde{y}(x,t)=\int_0^\infty a(k)e^{i[kx-\omega(k)t]}\mathrm{d}k$$

$$=a_0e^{i(k_0x-\omega_0t)}\int_{-k_0}^\infty e^{-\alpha K^2}e^{i[Kx-\dot{\omega}Kt-\ddot{\omega}K^2t]}\mathrm{d}K$$

一般振幅谱线宽度 Δk 很窄，积分可扩展至 $-\infty$：

$$\tilde{y}(x,t)=a_0 e^{i(k_0 x-\omega_0 t)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha K^2} e^{i[Kx-\dot{\omega}Kt-\ddot{\omega}K^2 t]}\mathrm{d}K$$

利用数学积分公式：

$$I(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(\xi+b)^2}\mathrm{d}\xi=I(a,0)=\frac{I(1,0)}{a}=\frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

其中 a、b 是复数，积分收敛条件：$\mathrm{Re}\,a^2>0$

若 $-\dfrac{\pi}{4}<\mathrm{Arg}\,a<\dfrac{\pi}{4}$，积分收敛条件总能满足

$$I(1,0)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi=\sqrt{\pi}$$

可得积分结果：

$$\tilde{y}(x,t)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+i\ddot{\omega}t}}\cdot e^{-\frac{(\dot{\omega}t-x)^2}{4(\alpha+i\ddot{\omega}t)}}[a_0e^{i(k_0x-\omega_0t)}]$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2+\ddot{\omega}^2t^2}}}\cdot e^{-i\frac{1}{2}\arctan(\frac{\ddot{\omega}t}{\alpha})}\cdot e^{i\frac{\ddot{\omega}t(\dot{\omega}t-x)^2}{4(\alpha^2+\ddot{\omega}^2t^2)}}$$

$$\times e^{-\frac{\alpha(\dot{\omega}t-x)^2}{4(\alpha^2+\ddot{\omega}^2t^2)}}\cdot[a_0e^{i(k_0x-\omega_0t)}]$$

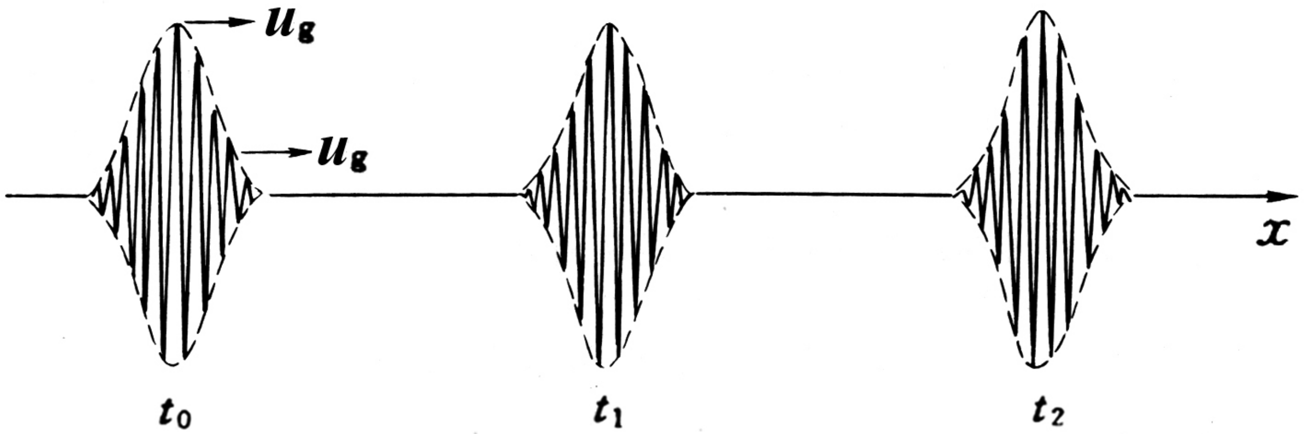
1. 1阶色散效应、群速度

只考虑1阶色散效应，令 $\ddot{\omega}=0$ ，波函数变成：

$$\tilde{y}(x,t)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot e^{-\frac{(\dot{\omega}t-x)^2}{4\alpha}}[a_0 e^{i(k_0 x-\omega_0 t)}]$$

$$y(x,t)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot e^{-\frac{(\dot{\omega}t-x)^2}{4\alpha}}[a_0\cos(\omega_0 t-k_0 x)]$$

空间高频振荡因子 $a_0\cos(\omega_0 t-k_0 x)$ 被高斯型包络因子 $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot e^{-\frac{(\dot{\omega}t-x)^2}{4\alpha}}$ 调制

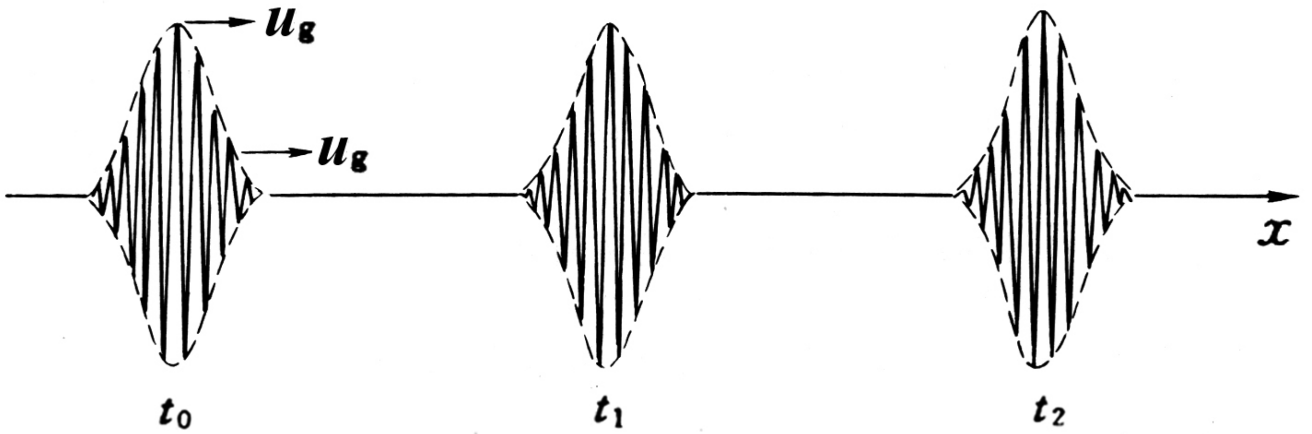


波包移动的速度 — 群速度 u_g 可通过包络因子

$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{(\dot{\omega}t-x)^2}{4\alpha}}$ 的宗量 $\dot{\omega}t - x$ 求出：

令 $\dot{\omega}t - x = \dot{\omega}(t + \mathrm{d}t) - (x + \mathrm{d}x)$ 得：

$$u_g = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \dot{\omega} = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0}$$

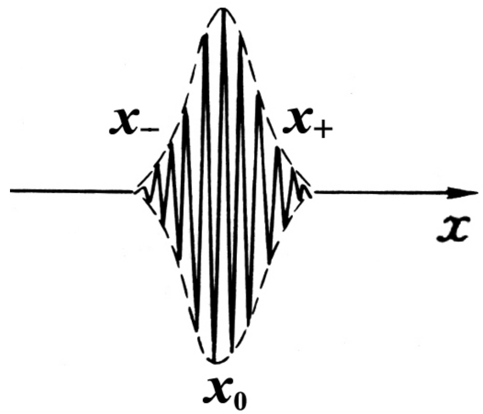


只考虑 1 阶色散效应，波包包络线上每一点移动速度都一样，都是群速度 u_g

由包络因子 $\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{(\dot{\omega}t - x)^2}{4\alpha}}$

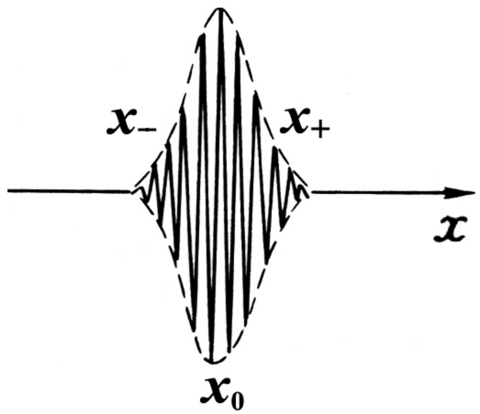
可得波包中心位置：

$$x_0 = \dot{\omega}t$$



令波包从中心最大值降到 $\dfrac{1}{e}$

对应的坐标为 x_+和 x_-



由包络因子 $\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}\cdot e^{-\frac{(\dot{\omega}t-x)^2}{4\alpha}}$ 可得波包宽度：

$$\Delta x = x_+ - x_- = 4\sqrt{\alpha}$$

波包宽度和振幅谱线宽度乘积：

$$\Delta x \cdot \Delta k = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \cdot 4\sqrt{\alpha} = 8$$

2. 2阶色散效应、波包塌缩

考虑2阶色散效应，波函数为：

$$\tilde{y}(x,t)=\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2+\ddot{\omega}^2t^2}}}\cdot e^{-i\frac{1}{2}\arctan(\frac{\ddot{\omega}t}{\alpha})}\cdot e^{i\frac{\ddot{\omega}t(\dot{\omega}t-x)^2}{4(\alpha^2+\ddot{\omega}^2t^2)}}$$

$$\times e^{-\frac{\alpha(\dot{\omega}t-x)^2}{4(\alpha^2+\ddot{\omega}^2t^2)}}\cdot[a_0e^{i(k_0x-\omega_0t)}]$$

其中实指数因子 $e^{-\frac{\alpha(\dot{\omega}t-x)^2}{4(\alpha^2+\ddot{\omega}^2t^2)}}$ 对波包的形状和运动起主要作用，用它作分析。

由因子 $e^{-\frac{\alpha(\dot{\omega}t-x)^2}{4(\alpha^2+\ddot{\omega}^2t^2)}}$ 可知波包中心位置：

$$x_0=\dot{\omega}t=u_g t$$

波包中心的速度仍等于群速度：

$$u_0=\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}=u_g$$

但考虑波函数中的因子 $\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2+\ddot{\omega}^2t^2}}}$，波包中心的幅值会随时间降低。**2** 阶色散 $\ddot{\omega}$ 值越大，波包幅值降低越快。

由因子 $e^{-\frac{\alpha(\dot{\omega}t-x)^2}{4(\alpha^2+\ddot{\omega}^2t^2)}}$ 可求出波包宽度：

$$e^{-\frac{\alpha(\dot{\omega}t-x_{\pm})^2}{4(\alpha^2+\ddot{\omega}^2t^2)}}=e^{-1} \quad \Rightarrow \quad x_{\pm}=\dot{\omega}t\pm 2\sqrt{\alpha}\sqrt{1+\left(\frac{\ddot{\omega}t}{\alpha}\right)^2}$$

$$\Delta x = x_{+}-x_{-}=4\sqrt{\alpha}\sqrt{1+\left(\frac{\ddot{\omega}t}{\alpha}\right)^2}$$

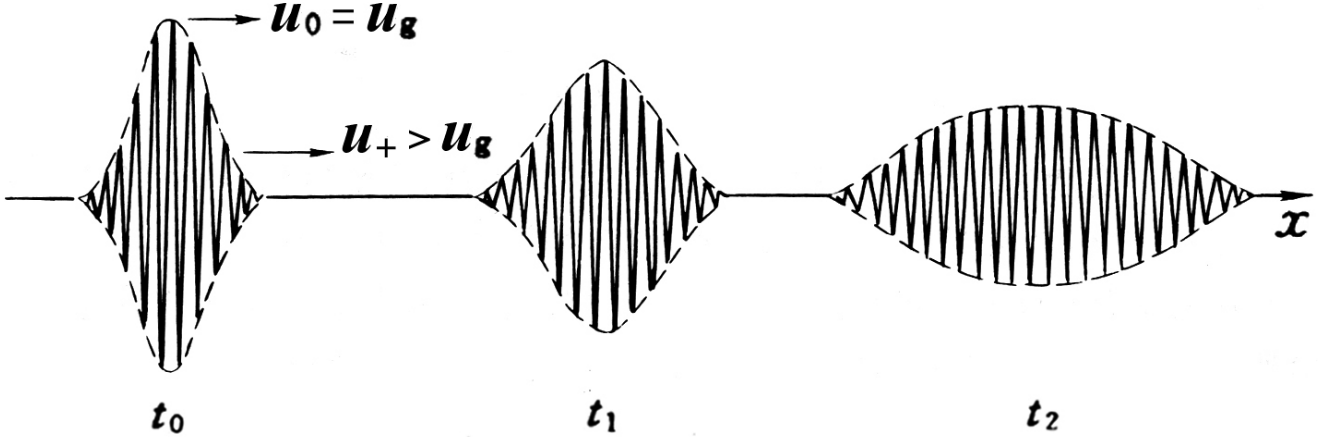
表明波包宽度随时间增长而增大，2 阶色散 $\ddot{\omega}$ 值越大，波包展宽越快。

由于 2 阶色散效应，波包展宽，导致包络线上每一点移动速度不一样。

波包前沿坐标： $x_+ = \dot{\omega} t + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{1+\left(\frac{\ddot{\omega} t}{\alpha}\right)^2}$

波包前沿速度：

$$u_+ = \frac{\mathrm{d}x_+}{\mathrm{d}t} = u_g + \frac{2}{\sqrt{\alpha^3}} \frac{\ddot{\omega}^2 t}{\sqrt{1+\left(\frac{\ddot{\omega} t}{\alpha}\right)^2}} > u_g \text{ 或 } u_0$$



由于 2 阶色散效应，波包前沿速度比中心速度快，波包展宽，直至塌缩消失。

3. 总结

群速度、相速度及其关系

$$\boxed{u_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}}\qquad\boxed{u=\frac{\omega}{k}}\qquad\boxed{u_g=u+k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}k}}$$

色散项

在介质中，群速度、相速度的求解需要知道色散关系 $\omega(k)$ 或 $u(k)$ 。

波包宽度和振幅谱线宽度关系

$$\boxed{\Delta x\cdot\Delta k\approx 1}$$

例如，对于前面的深水表面重力波：

色散关系： $\omega = \sqrt{gk}$

相速度： $u = \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{\dfrac{g}{k}}$

群速度： $u_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{k}}$

对中心波数为 k_0 的波包，其相速度和群速度分别为：

$$u_g = \sqrt{\frac{g}{k_0}}, \quad u_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k_0}}$$

对群速度几点说明：

- 群速度是能量和信号传播的速度，是真实的物理速度，不能超过真空中的光速，相速度可以超过真空中的光速。
- 对简谐波，不论是否是色散介质，群速度总等于相速度。
- 对无色散介质，相速度为常数，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}k = 0$，波包的群速度等于相速度，波包在传播过程中波形保持不变。

- 对色散介质，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}k \neq 0$，波包的群速度不等于相速度。

$|\mathrm{d}u/\mathrm{d}k|$ 越大，色散越严重，波包越不稳定。只有在 $|\mathrm{d}u/\mathrm{d}k| = 0$ 或 $|\mathrm{d}u/\mathrm{d}k|$ 很小的情况下，波包才稳定。

色散较大时，波包会扩散直到消失，此时群速度将失去意义。

孤子

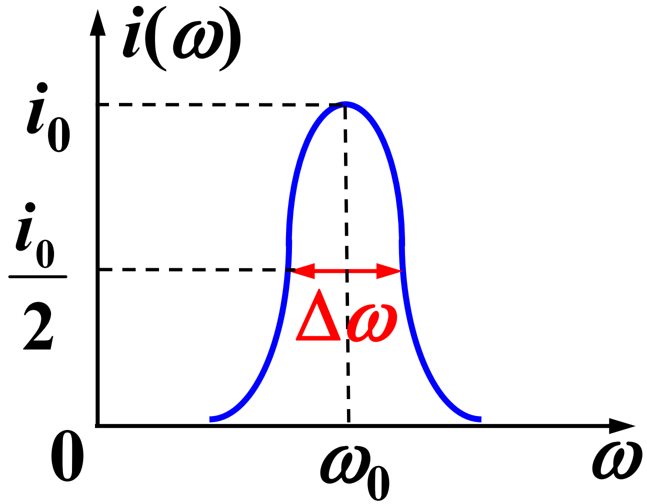
非线性介质中，相速度和振幅有关，非线性效应可引起波包挤压，抵消色散引起的波包扩散，形成形状不变的孤立波 — 孤子。

孤子在信号传播中有重要应用。

四. 波的单色性和准单色波

波的单色性可由强度谱密度函数 $i(\omega)$ 反映。

$i(\omega)$是频率$\omega-\omega+\mathrm{d}\omega$的简谐分波贡献的强度，反映波的强度按频率的分布，由波源决定。



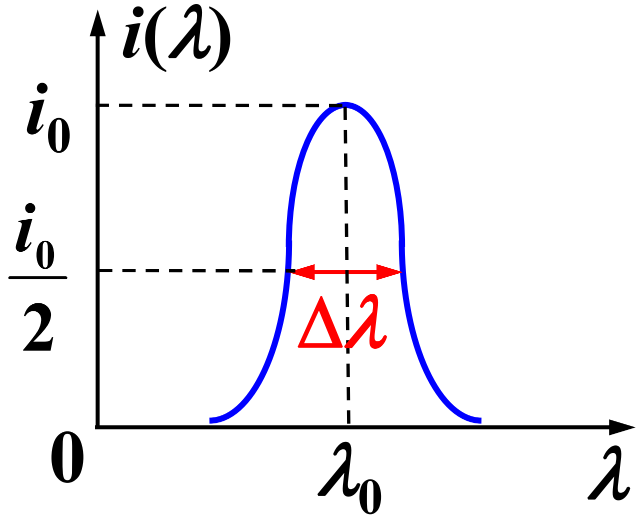
$$i(\omega)=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\omega}$$

$$I=\int_0^{\infty} i(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$\Delta\omega$— 谱线宽度，ω_0— 中心频率

强度谱密度函数也可以用波长作变量 $i(\lambda)$。

$i(\lambda)$是波长 $\lambda - \lambda + d\lambda$ 的简谐分波贡献的强度，反映波的强度按波长的分布。



$$i(\lambda) = \frac{dI}{d\lambda}$$

$$I = \int_0^\infty i(\lambda) d\lambda$$

$\Delta\lambda$ — 谱线宽度，λ_0 — 中心波长

准单色波条件用频率或波长表达为：

$$\Delta\omega << \omega_0 \qquad \Delta\lambda << \lambda_0$$

比值 $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}$ 或 $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ 越小，波的单色性越好。

一般 “频率为ω或波长为 λ 的波” 是指：

中心频率为 ω_0 或中心波长为 λ_0 的准单色波。

【思考】 $\omega_0\lambda_0 = 2\pi u$ 吗？

【思考】右图是什么波？