第八章 振动

§ 8.1 简谐振动

§ 8.2 简谐振动的合成

§ 8.3 傅里叶级数和谐振分析

§ 8.4 二阶线性常微分方程

§ 8.5 阻尼振动

§ 8.6 受迫振动

§ 8.7 耦合振子和简正模式

- 振动
  - 自由振动
    - 阻尼自由振动
    - 无阻尼自由振动
      - 无阻尼自由非谐振动
      - 无阻尼自由谐振动（简谐振动）
  - 受迫振动（有阻尼）— 共振

§ 8.1 简谐振动

一. 简谐振动定义

物理量随时间按正弦或余弦变化的过程：

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

x 可以是位移、电流、场强、温度…

▲ 简谐振动是最简单、最基本的振动，可用来研究复杂振动。

▲ 简谐振动是理想化模型，许多实际的小幅振动都可以看成简谐振动。

【例】竖直弹簧振子

平衡位置： $mg = k\Delta l$

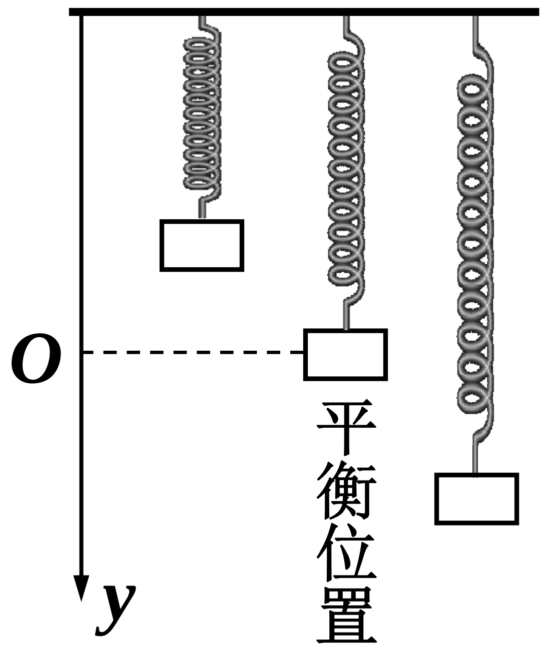
合力：

$$F = mg - k(\Delta l + y) = -ky$$

动力学方程

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -ky$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



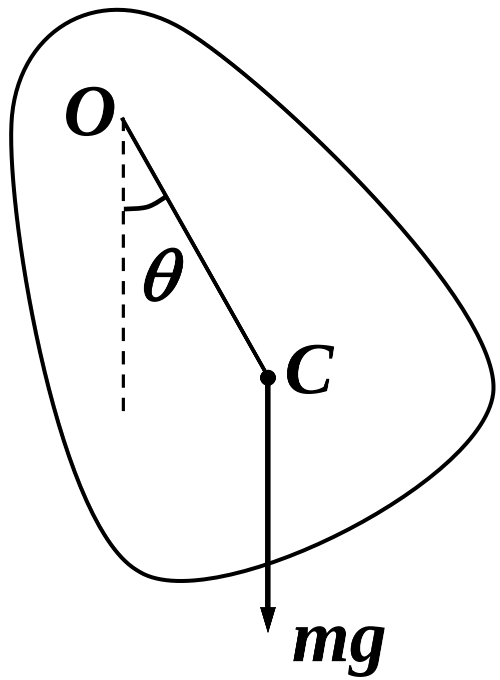
【例】复摆（物理摆）

对过 O 点的水平轴，设顺时针为正：

$$M_{O\text{轴}} = mgr_{CO}\sin\theta = J_{O\text{轴}}\alpha$$

$$\omega = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgr_{CO}}{J_{O\text{轴}}}\sin\theta = 0$$



角度很小的情况：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgr_{CO}}{J_{O\text{轴}}}}$$

动力学方程

振动的物理量都满足相同的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

（二阶常系数线性齐次常微分方程）

两个线性无关的特解： $\cos\omega t$、 $\sin\omega t$

通解的数学写法： $x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$

通解的习惯写法： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

简谐振动的 3 个特征量

1. 角频率、圆频率、固有频率、特征频率 ω

只决定于系统

2. 振幅

$$\boxed{A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{\frac{2E}{k}}}$$

3. 初相（位）

$$\boxed{\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)}$$

（一般取主值）

根据初始条件可得：

$$\left.x\right|_{t=0}=x_0=A\cos\varphi$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0=-\omega A\sin\varphi$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{v_0^2}{\omega^2}}\\ \tan\varphi=-\dfrac{v_0}{\omega x_0}\end{cases}$$

φ所在象限由 $\sin\varphi$ 或 $\cos\varphi$ 的符号定

根据谐振子能量守恒：

$$E=\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}kA^2 \quad\Rightarrow\quad A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

A 和 φ 和初始条件、系统都有关。

给定角频率 ω、振幅 A、初相 φ，就给定了一个简谐振动。

二. 简谐振动判据

1. 受力特征 $\boxed{F=-kx}$

F — 广义恢复力：力、力矩

x — 广义位移：位移，角度

k — 等效劲度系数

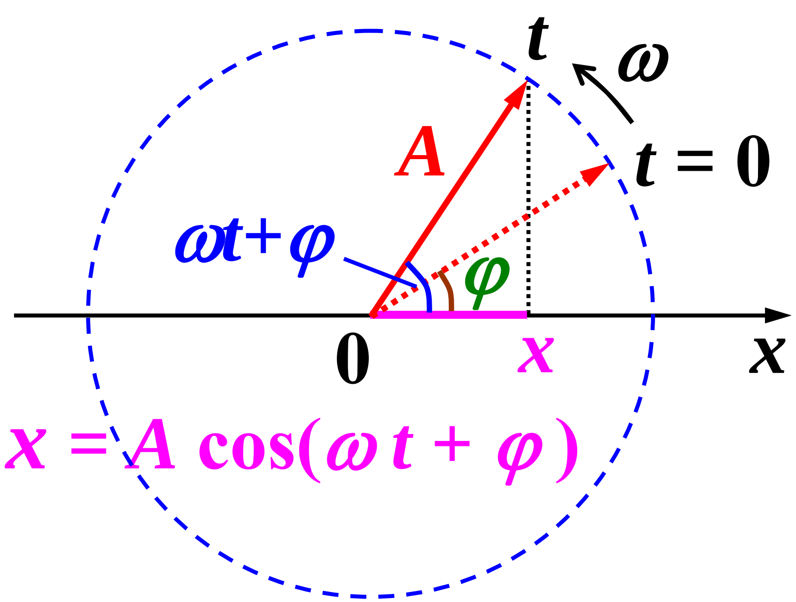
2. 微分方程 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 x=0}$

ω— 角频率或圆频率

3. 能量特征

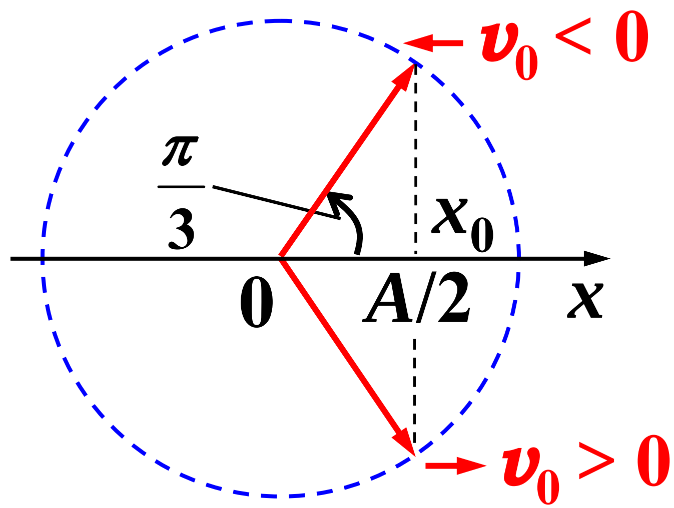
$$\begin{cases}\text{总能量 } E=\mathrm{const.}\\ \text{势能 } E_\mathrm{p}=\dfrac{1}{2}kx^2 \text{（平衡位置为 } E_\mathrm{p}\text{的零点）}\end{cases}$$

三. 旋转矢量法、相矢量法



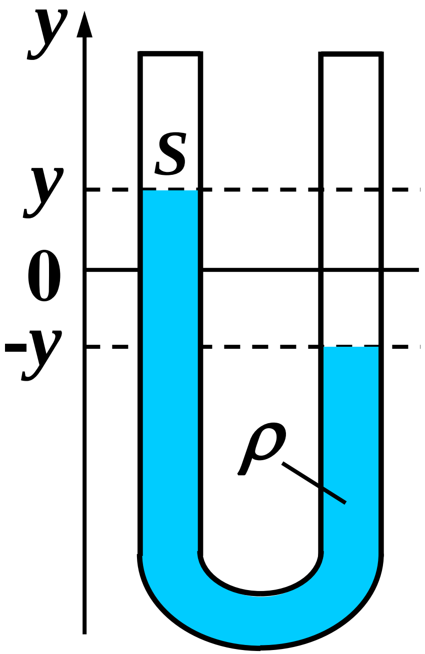
已知：$x_0 = A/2$，$v_0 > 0$

求：φ



答：$\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$

【例】截面积 S 的 U 形管内装有质量 m、密度 ρ 的液体，使两边液面有高度差，忽略管壁和液体间的摩擦，判断液体柱振动性质。



解：分析受力

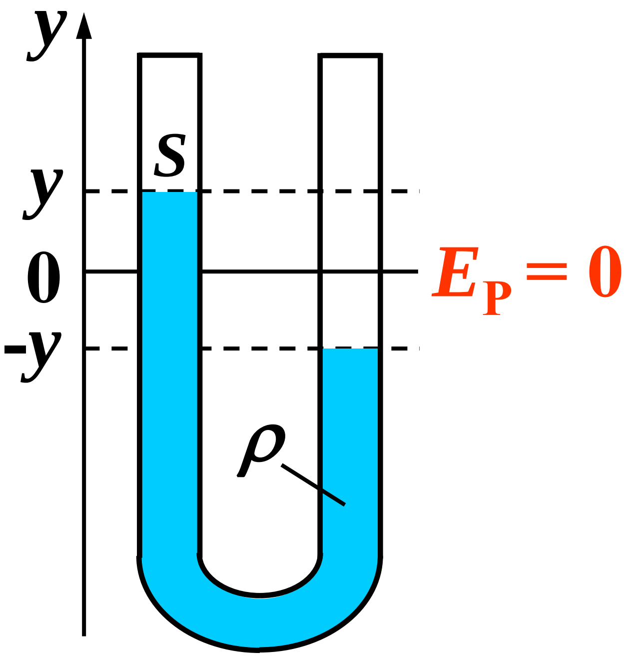
恢复力 $F=-2\rho gSy\overset{令}{=}-ky$

$$k=2\rho gS=\text{const}.$$

$\therefore$ 是简谐振动

角频率 $\omega=\sqrt{k/m}=\sqrt{2g\rho S/m}$

另法，分析能量



$$E_p = (\rho g S y)\cdot y = \frac{1}{2}ky^2$$

$$k = 2\rho g S$$

无损耗 $E = \text{const.}$

$\therefore$ 是简谐振动

角频率 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{2g\rho S}{m}}$

【例】证明稳定平衡位置附近的微振动是简谐振动。

证明：在 $x=0$ 附近将势能展开：

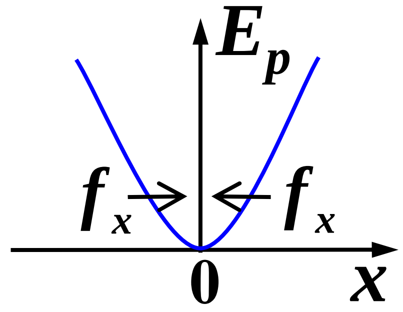
$$E_p(x)=E_p(0)+\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_0 x+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 x^2+\ldots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_0=0,\qquad \left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_0>0$$

对微振动，可取到 x^2 项，且令 $E_p(0)=0$

$$\therefore\quad E_p(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 x^2 \overset{令}{=} \frac{1}{2}kx^2$$

$$k=\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_0>0$$



$$f_x=-\left(\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}\right)=-\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 x=-kx$$

∴ 稳定平衡位置附近的微振动是简谐振动。

§ 8.2 简谐振动的合成

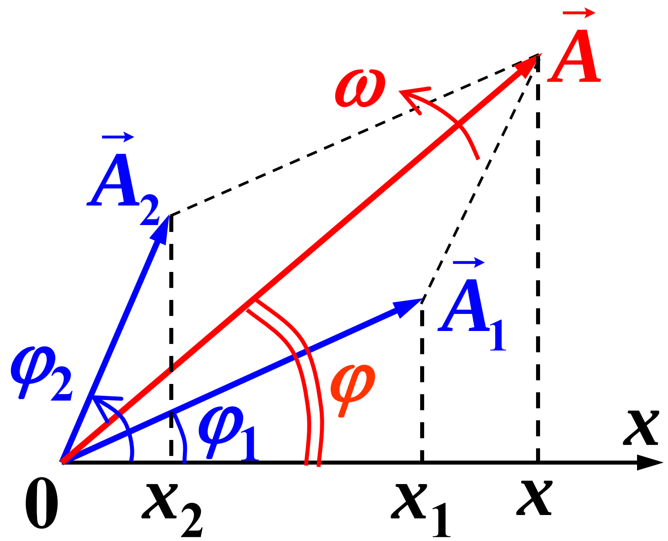
一. 振动方向相同、频率相同

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

结果是同频率简谐振动

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



重要特例：

同相 $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$, $A = A_1 + A_2$ $(k = \text{整数})$

反相 $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$, $A = |A_1 - A_2|$

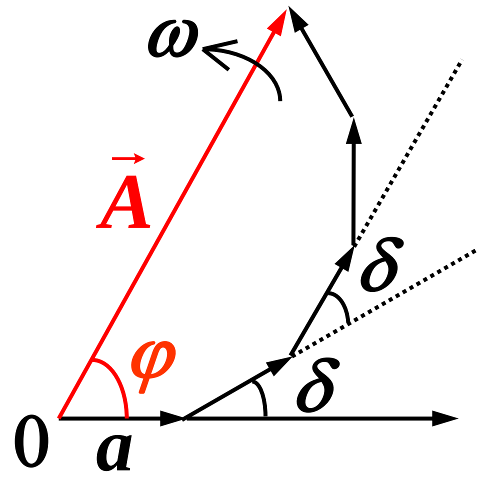
n 个振幅相等、初相依次相差常量 δ 的简谐振动的合成

$$x_1 = a\cos(\omega t)$$

$$x_2 = a\cos(\omega t + \delta)$$

$$\cdots$$

$$x_n = a\cos[\omega t + (n-1)\delta]$$



结果是同频率简谐振动： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$A = a\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}, \qquad \varphi = \frac{n-1}{2}\delta$$

重要特例：

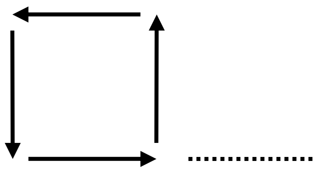
n 个分振动同相：$\delta = 2k\pi \;\; (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$

$$A = na$$

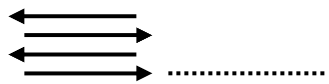
n 个分振动初相依次差：$\delta = \dfrac{2k'\pi}{n} \;\; (k' \neq nk)$

$A = 0$，分振动的旋转矢量构成封闭多边形

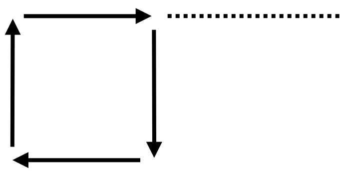
例 $n = 4$：$k' = (0), \pm 1, \pm 2, \pm 3, (\pm 4), \pm 5, \pm 6, \ldots$



$k' = 1$



$k' = 2$



$k' = 3$

二. 振动方向相同、频率不同

为简单设： $x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi)$

$$x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi)$$

合成结果为非简谐振动：

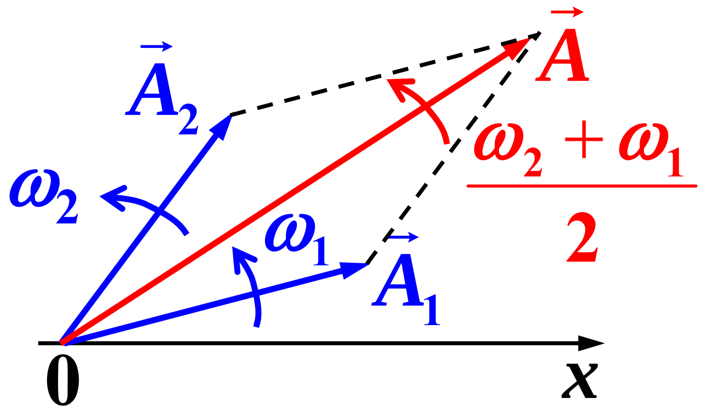
$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\underbrace{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t}_{\text{变化慢}} \cdot \cos\left(\underbrace{\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t}_{\text{变化快}} + \varphi\right)$$

重要特例：若 ω_1、ω_2 大，而差值小，则合振动振幅时大时小，称为“拍”。

“拍”现象

振幅缓慢变化：

$$A_{合}=\left|2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right|$$

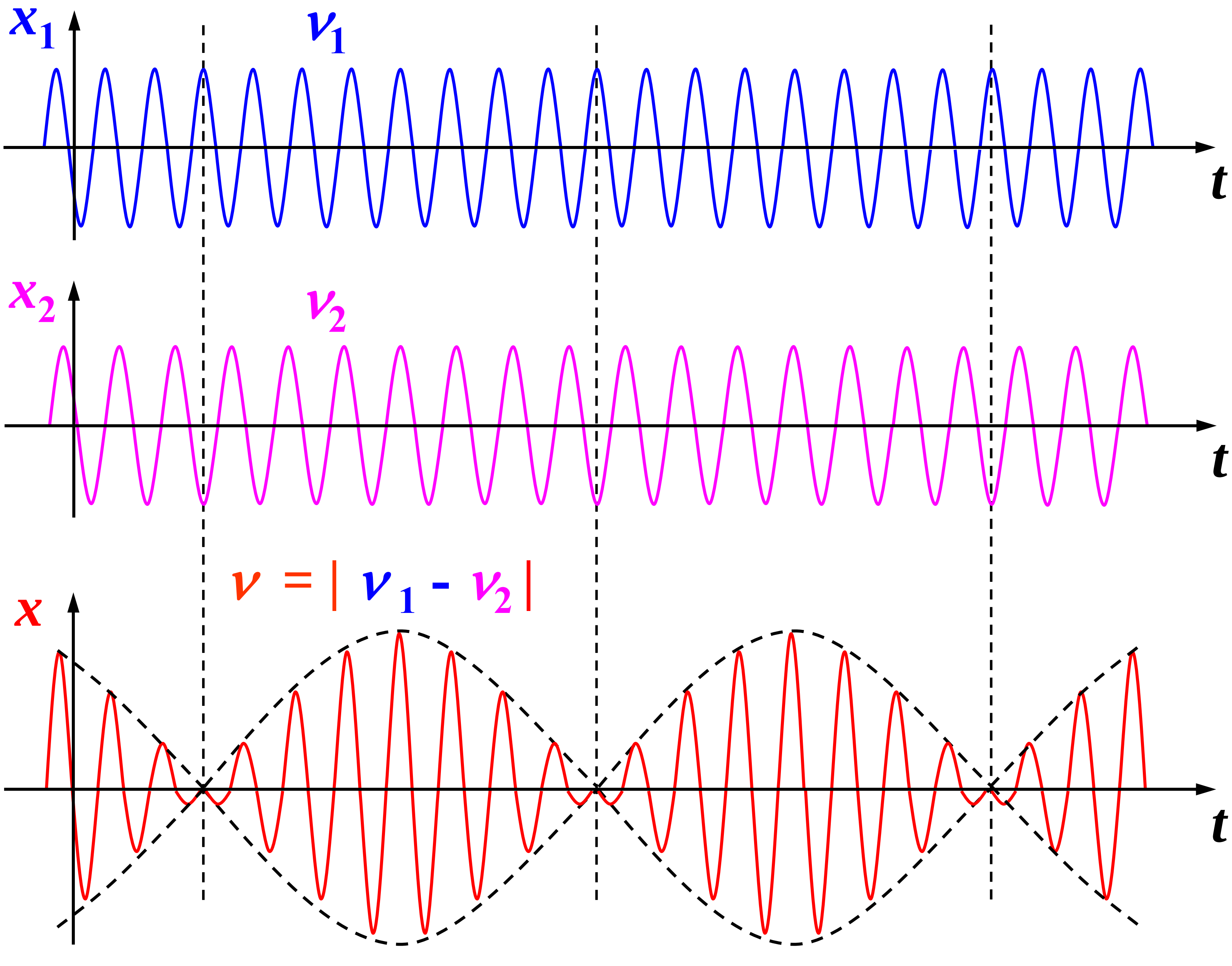


$\vec{A}_1$，$\vec{A}_2$ 同向重合时， $A=A_{max}=2A$

$\vec{A}_1$，$\vec{A}_2$ 反向重合时， $A=A_{min}=0$

拍频 $\boxed{\nu_{拍}=|\nu_1-\nu_2|}$

可用来测频率，或得到更低频的振动。



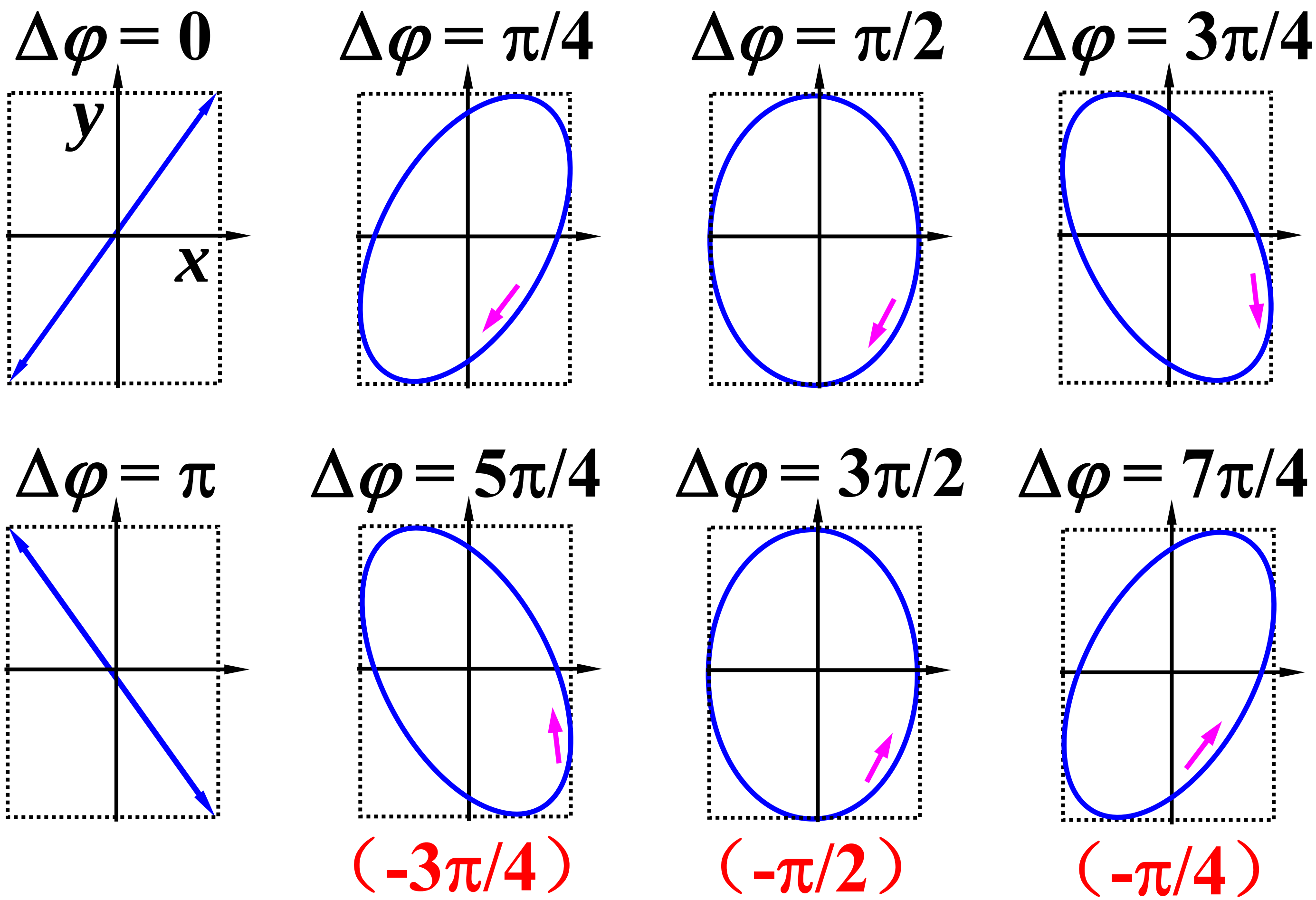
x1
ν1
t
x2
ν2
t
ν = | ν1 - ν2 |
x
t

三. 振动方向垂直、频率相同

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x), \qquad y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

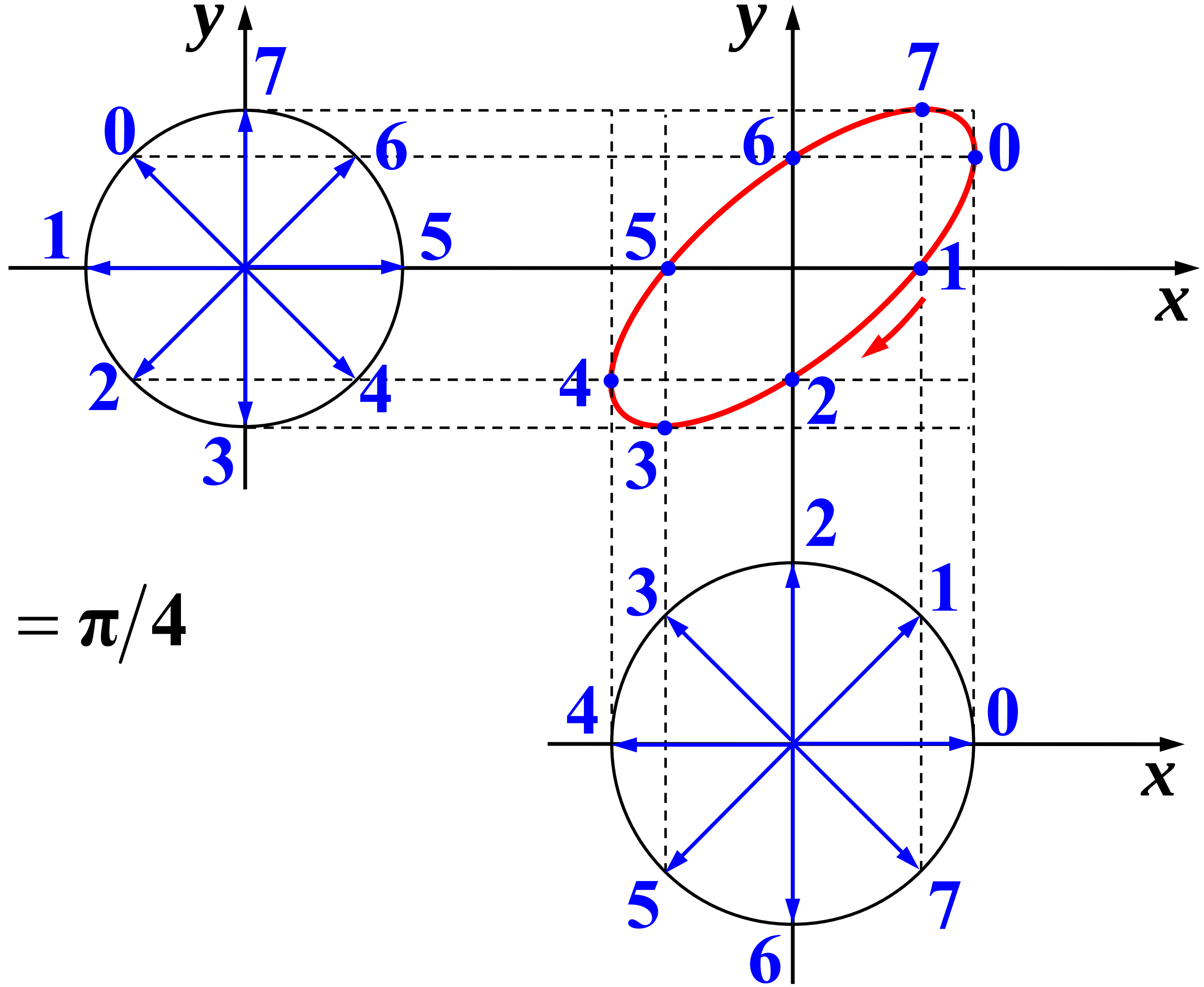
$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y}\cos(\varphi_y - \varphi_x) = \sin^2(\varphi_y - \varphi_x)$$

$\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$	0, π	±π/2	其它
轨迹	线	$A_x \neq A_y$，正椭圆 $A_x = A_y$，圆	斜椭圆



$$\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x \begin{cases} (0, \pi)\text{，} y \text{ 领先 } x\text{，右旋} \\ (-\pi, 0)\text{，} y \text{ 落后 } x\text{，左旋} \end{cases}$$

旋转矢量作图法

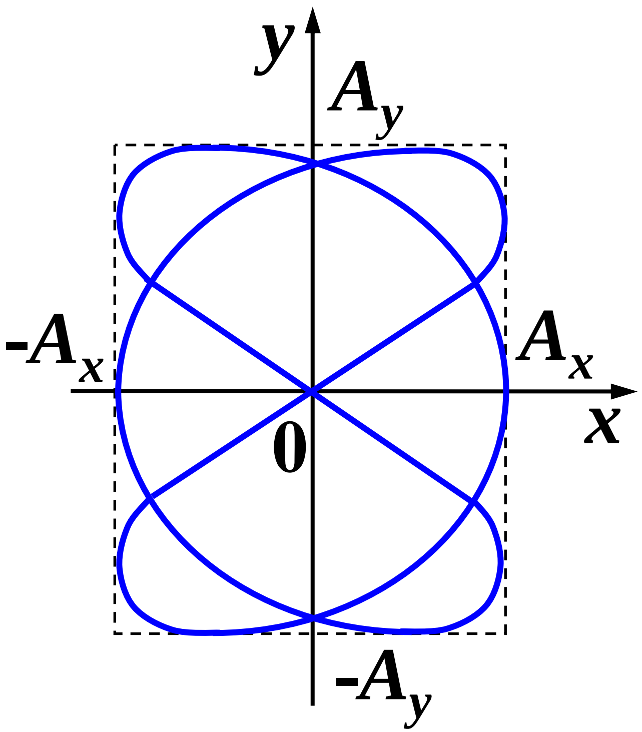


$$\varphi_y - \varphi_x = \pi/4$$

四. 振动方向垂直、频率不同

1. $\omega_1/\omega_2 = m/n$，m, n 是整数

轨迹为稳定闭合曲线 — 李萨如图形

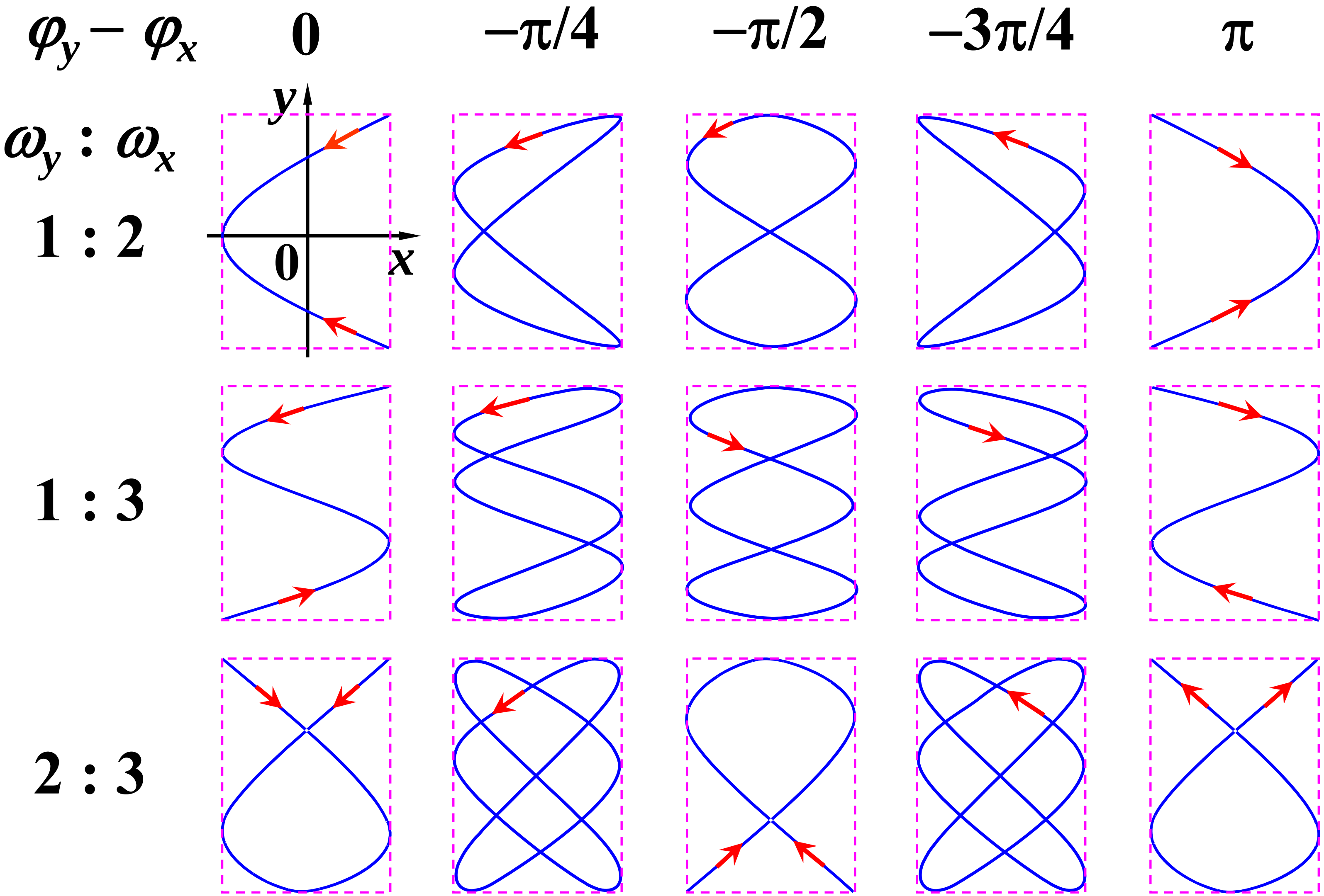


$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{x\text{达到最大次数}}{y\text{达到最大次数}}$$

例如左图：$\dfrac{\omega_x}{\omega_y} = \dfrac{3}{2}$

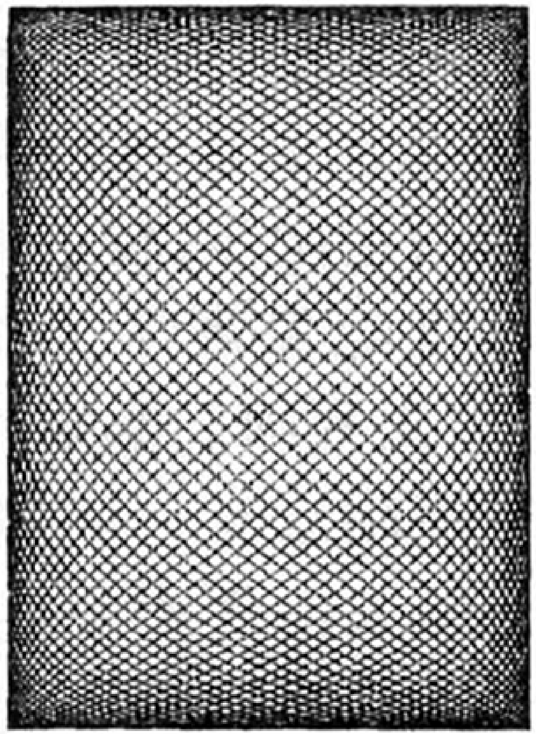
应用：测定未知频率

$A_y : A_x = 3 : 2$



2. ω_1/ω_2 = 无理数

合成轨迹为非闭合曲线



两振动若有弱耦合，

$\omega_1 : \omega_2$ 就近锁定为两

整数比 — 锁频现象，

如生物钟现象。

§ 8.3 傅里叶级数和谐振分析

一. 实数形式的傅里叶级数

不同频率的三角函数构成正交函数集：

$$\{1,\ \cos n\omega t,\ \sin n\omega t,\ \omega=\frac{2\pi}{T},\ n=\text{正整数}\}$$

$$\frac{2}{T}\int_{\Delta}^{T+\Delta}1\cdot\begin{Bmatrix}\cos n\omega t\\ \sin n\omega t\end{Bmatrix}\mathrm{d}t=0\quad(n\neq 0,\ \Delta\text{是任意实数})$$

$$\frac{2}{T}\int_{\Delta}^{T+\Delta}\begin{Bmatrix}\cos n\omega t\cdot\cos m\omega t\\ \sin n\omega t\cdot\sin m\omega t\end{Bmatrix}\mathrm{d}t=\delta_{nm}=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

$$\frac{2}{T}\int_{\Delta}^{T+\Delta}\cos n\omega t\cdot\sin m\omega t\,\mathrm{d}t=0$$

周期为 T 的实函数可展开为傅里叶级数：

$$f(t) = f(t+T) \qquad t \in (-\infty,+\infty) \qquad \omega = 2\pi/T$$

$$\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)}$$

利用三角函数正交性求傅里叶展开系数：

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\Delta}^{T+\Delta} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\Delta}^{T+\Delta} f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\Delta}^{T+\Delta} f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t \quad n \neq 0$$

傅里叶级数的收敛性判定 — 狄利克雷定理

若函数 $f(t)$ 满足条件：（1）处处连续或在每个周期内只有有限个第一类间断点，（2）在每个周期内只有有限个极值点，

则（1）在连续点 t 处

$$\text{傅里叶级数} = f(t)$$

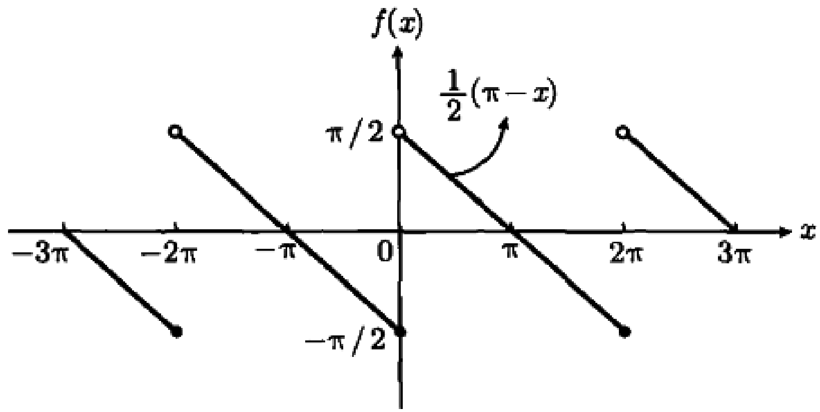
（2）在间断点 t 处

$$\text{傅里叶级数} = \frac{\overbrace{f(t-0)+f(t+0)}^{\text{间断点处的左、右极限}}}{2}$$

狄利克雷定理中关于周期函数的 2 个条件是傅里叶级数收敛的充分条件，充分必要条件尚不清楚。

【例】锯齿函数的傅里叶级数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\pi-x) & (0<x\leqslant 2\pi)\\ f(x+2\pi) & (x\text{在其他点})\end{cases}$$

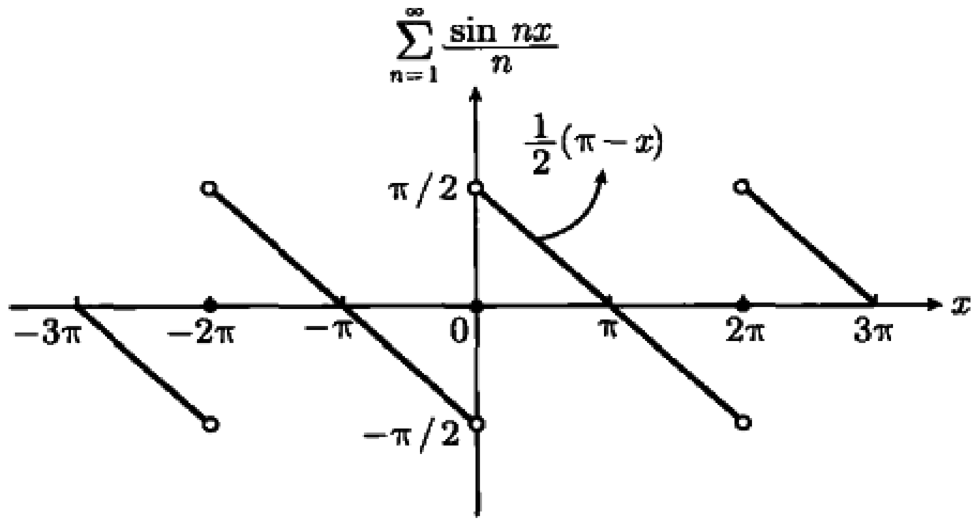


$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\pi - x)\mathrm{d}x = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\pi - x)\cos nx\mathrm{d}x = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\pi - x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$$

锯齿函数的傅里叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$



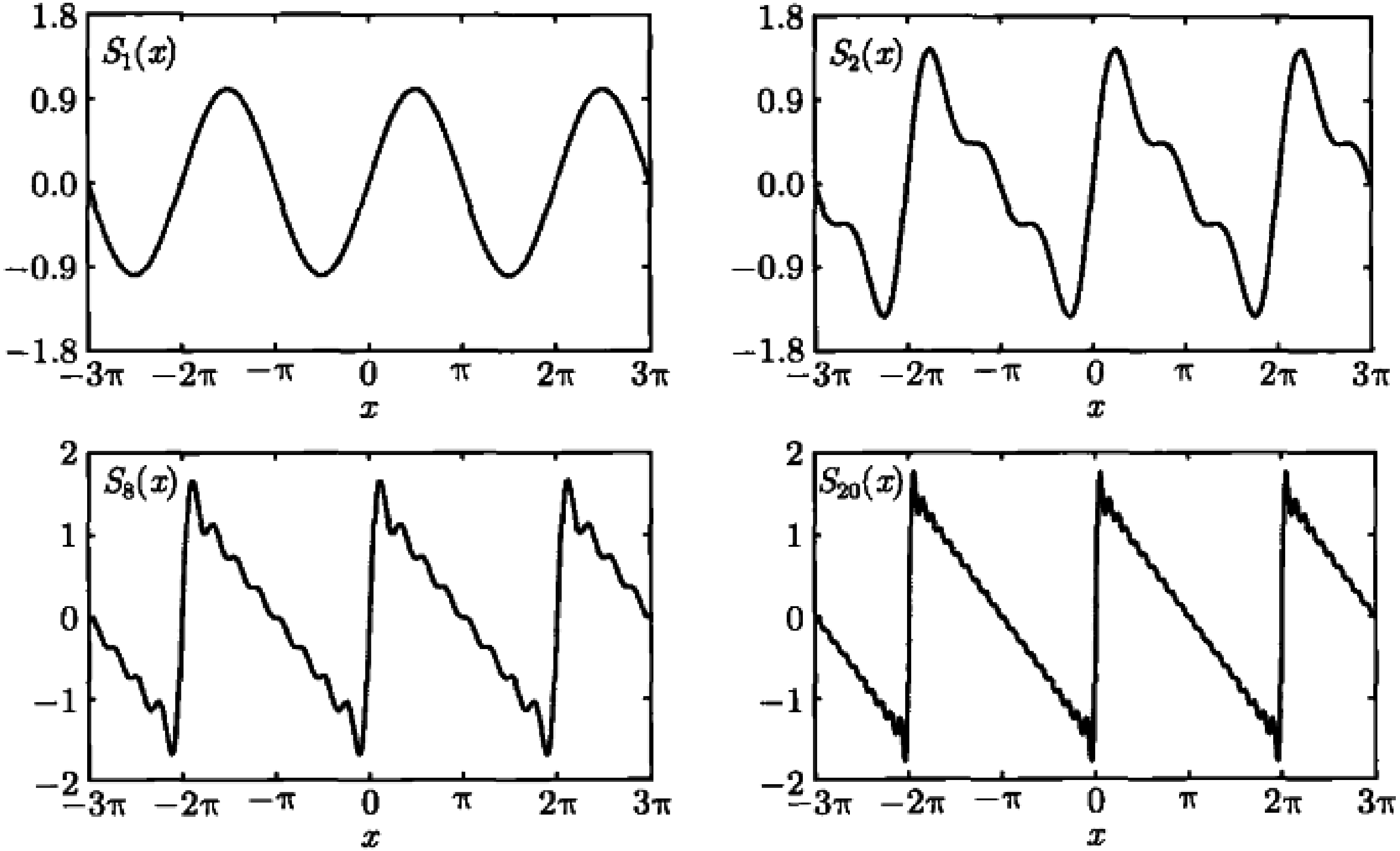
在连续区域 $0 < x < 2\pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2}(\pi - x) = f(x) \quad (0 < x < 2\pi)$$

在间断点 $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = [f(x-0) + f(x+0)]/2 = 0 \quad (x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots)$$

级数的部分和 (前 m 项之和) 为 $S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin nx}{n}$



锯齿函数的傅里叶级数的部分和 $S_m(x)$

可把三角函数看成是线性空间的基

$$A=\sum_i A_i e_i \qquad \underbrace{e_i\cdot e_j=\delta_{ij} \qquad A_i=A\cdot e_i}_{\text{向量内积}}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2}{T}\int_{\Delta}^{T+\Delta}\cos n\omega t\cdot\cos m\omega t\,\mathrm{d}t=\delta_{nm}\\&a_n=\frac{2}{T}\int_{\Delta}^{T+\Delta}f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t \quad n\neq 0\end{aligned}\right\}\text{函数内积}$$

不同频率的三角函数是线性独立的

【思考】下面方程能得到什么？

$$(a-b^2)\cos\omega t+(b+2c)\sin 2\omega t=0$$

二. 复数形式的傅里叶级数

如下复指数函数构成正交函数集：

$$\{ e^{in\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad n = \text{整数} \}$$

$$\frac{1}{T}\int_{\Delta}^{T+\Delta} e^{in\omega t} \cdot e^{im\omega t} \, dt = \delta_{n,-m} \quad (\Delta\text{是任意实数})$$

周期为 T 的实函数可展开为傅里叶级数：

$$f(t) = f(t+T) \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad \omega = 2\pi/T$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (c_n\text{是复数})}$$

利用复指数函数的正交性求傅里叶展开系数：

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_{\Delta}^{T+\Delta} f(t)\cdot e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t, \quad c_n^* = c_{-n}}$$

利用欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 可证明实数和复指数形式的傅里叶级数的系数关系：

$$\boxed{\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_n &= \frac{a_n + ib_n}{2} \\ c_{-n} &= \frac{a_n - ib_n}{2} \end{aligned}}$$

三. 谐振分析

任意振动 $\xrightarrow[\text{分解}]{\text{傅里叶分析}}$ 简谐振动线性叠加

周期为 T 的任意振动可分解为傅里叶级数：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)] \qquad (\omega = 2\pi/T)$$

$k = 1$　　基频（ ω）　　决定音调

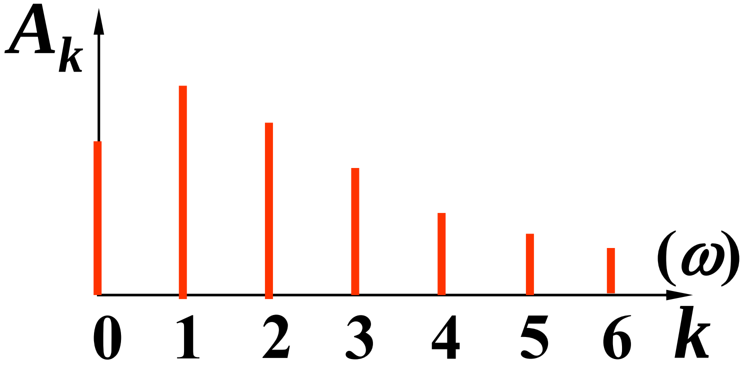
$k = 2$　　二次谐频（2ω）

$k = 3$　　三次谐频（3ω）

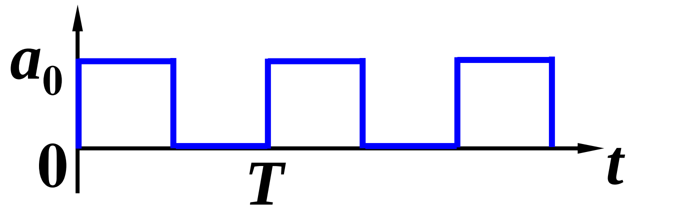
……

$\left.\begin{array}{l} k=2 \\ k=3 \\ \cdots \end{array}\right\}$ 高次谐频　　决定音色

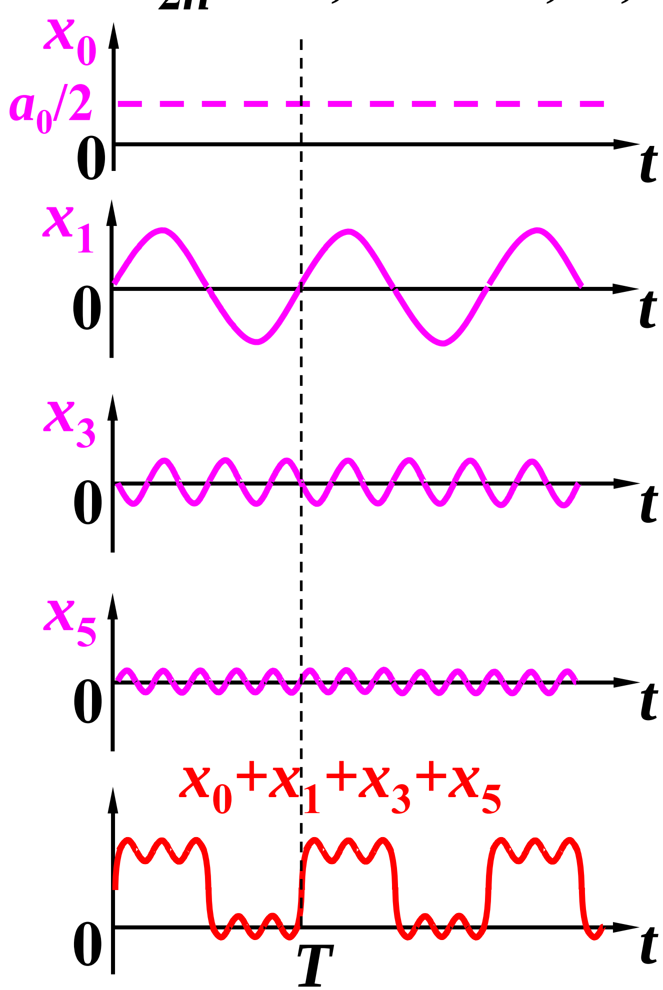
分立谱：



例如方波：



$$x_{2n} = 0,\ n = 1, 2, \ldots$$



赞美歌唱家：

“声音洪亮，

音域宽广，

音色甜美”，

各指什么因素?

§8.4 二阶线性常微分方程

$$a_0(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_2(x)y=f(x)$$

$f(x)=0$：齐次的， $f(x)\neq 0$：非齐次的

$a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ 若都是常数：常系数的

如果 $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ 及 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内连续，则对任意给定的“初始”条件：

$$y(x_0)=b_0，\quad y'(x_0)=b_1$$

b_0、b_1 是实数，方程存在唯一解：$y=y(x)$

函数的线性相关性

对函数 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 如果有不全为零的常数 c_1, c_2 使等式 $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ 在区间 $[a, b]$ 上成立，

称函数 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上线性相关，

否则称线性无关。

一. 二阶齐次线性常微分方程

$$a_0(x)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_2(x)y=0$$

若方程有 2 个线性无关的特解 $y_1(x)$、$y_2(x)$，则方程通解是这 2 个线性无关特解的线性叠加：

$$y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x) \quad （ c_1, c_2 \text{ 是任意常数 }）$$

把通解 $y(x)$ 代入"初始"条件 $y(x_0)=b_0$， $y'(x_0)=b_1$ 可确定系数 c_1、c_2 。

二. 二阶非齐次线性常微分方程

$$a_0(x)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_2(x)y=f(x)$$

通解是其某个特解叠加相应齐次线性方程的通解：

$$y(x)=y^*(x)+c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)$$

求特解 $y^*(x)$ 方法："常数变易法"或"待定系数法"

"待定系数法"是一种观察和尝试法：

利用非齐次项 $f(x)$ 的特点猜测特解形式。

三. 二阶常系数齐次线性常微分方程

$$a_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$$

特征方程： $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ 特征根：λ_1, λ_2

特征根	2个特解
λ_1、λ_2 是互异实根	$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$， $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$
$\lambda = \alpha + i\beta$ 是单根， $\lambda = \alpha - i\beta$ 也是单根	$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$
λ 是重根	$y_1(x) = e^{\lambda x}$， $y_2(x) = x e^{\lambda x}$

四. 二阶变系数齐次线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+a(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+b(x)y=0$$

不一定能找到用初等函数表示的解，可考虑幂级数形式的解。

- 要求方程在 x_0 处附近的解，若 $a(x)$、$b(x)$ 在 x_0 处可展成幂级数，则可假定解具有幂级数形式：

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$$

求出 1 阶和 2 阶导数，代入方程变成恒等式，确定出待定系数 a_k，得到解。

- 要求方程在 x_0 处附近的解，若 $a(x)$、$b(x)$ 在 x_0 处不能展成幂级数，比如是 x 的有理分式，分母在 x_0 处为零，则可尝试广义幂级数形式的解：

$$y(x)=(x-x_0)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$$

其中 α、a_k 都是待定系数。

§ 8.5 阻尼振动

振子运动时一般会受阻尼力作用：如气体、液体的粘滞作用，速度不大时，阻尼力和速度成正比： $\boldsymbol{f}_{阻尼} = -\gamma \boldsymbol{v}$

阻尼振动方程

2 阶齐次线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2} + 2\beta \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t} + \omega_0^2 x = 0$$

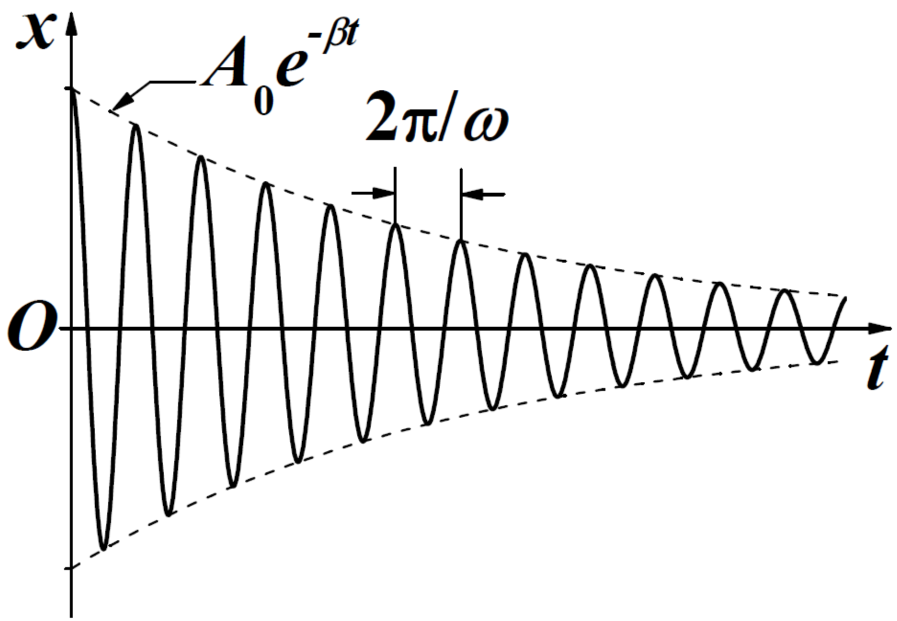
固有频率 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$， 阻尼系数 $\beta = \dfrac{\gamma}{2m}$

一. 欠阻尼（$\beta < \omega_0$）

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$e^{-\beta t}$ — 衰减因子，振幅随时间衰减

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ —周期比系统固有周期长



振子能量的耗散

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2+\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$=m\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$=(m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+kx)\boldsymbol{v}$$

$$=f_{\text{阻尼}}\boldsymbol{v}$$

振子能量耗散是因为阻尼力做负功

品质因素 Q — 反映振动质量

$$Q = 2\pi \frac{t\text{时刻体系能量}}{\text{每周期损失能量}} = \frac{2\pi E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

对弱阻尼 $\beta << \omega_0$：

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A_0 e^{-\beta t}[\beta\cos(\omega t + \varphi_0) + \omega\sin(\omega t + \varphi_0)]$$

$$\approx -A_0 e^{-\beta t}\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\beta t} = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\tau \equiv \dfrac{1}{2\beta}$：鸣响时间，反映能量衰减快慢， $\tau >> T$

$$E(t)-E(t+T)=\frac{1}{2}kA_0^2e^{-\frac{t}{\tau}}(1-e^{-\frac{T}{\tau}})\approx E(t)\frac{T}{\tau}$$

$$\boxed{Q=\frac{2\pi E(t)}{E(t)-E(t+T)}=2\pi\frac{\tau}{T}=\frac{\omega}{2\beta}\approx\frac{\omega_0}{2\beta}}$$

τ时间内，振动次数越多，振动质量越好。

或 Q 值越大，振动质量越好。

无线电震荡回路	$Q\sim10^2$
音叉、钢琴：	$Q\sim10^3$
激光器光学谐振腔：	$Q\sim10^7$

二. 过阻尼（$\beta > \omega_0$）

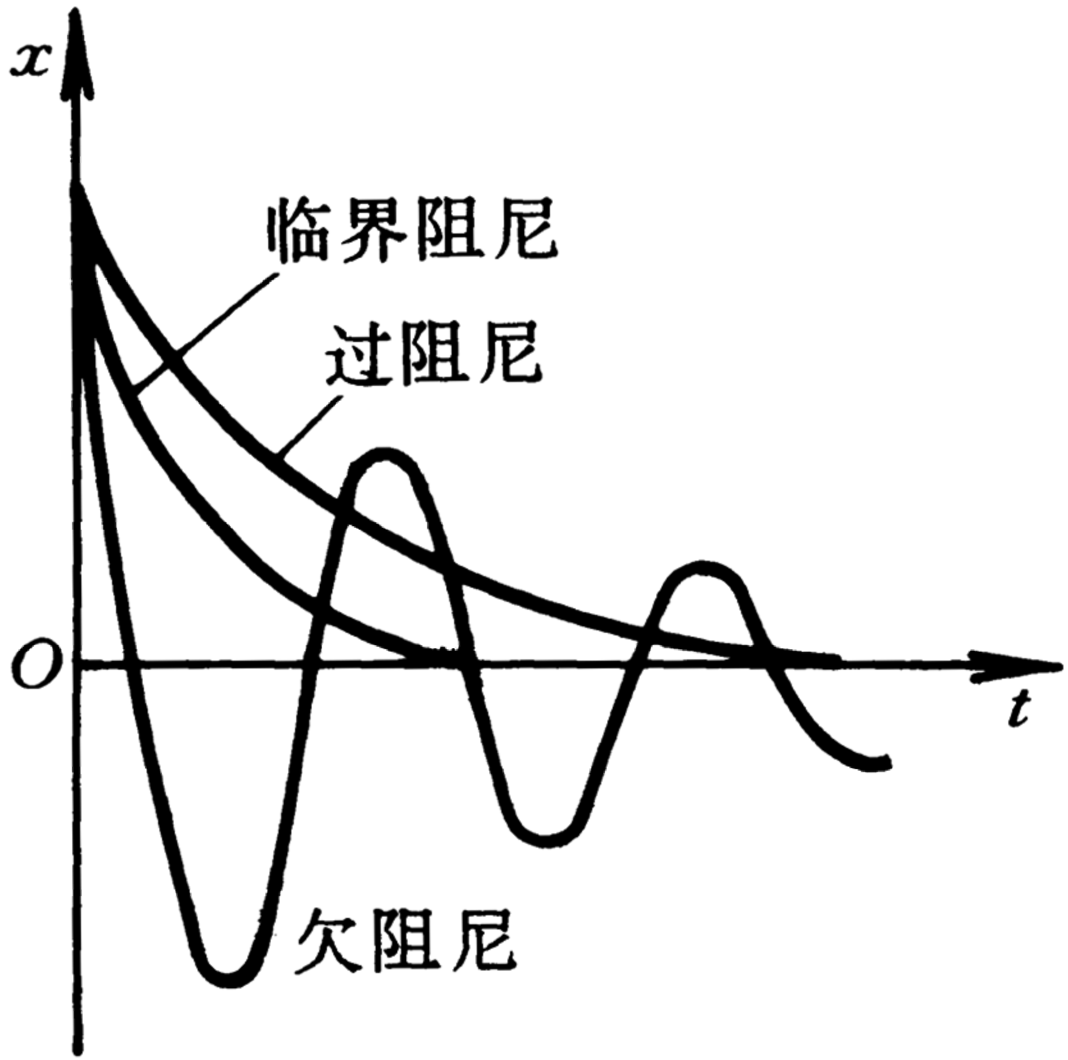
$$x = e^{-\beta t}(A_1 e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t})$$

振子不作振动，经历很长时间从初始位置趋向平衡位置。

三. 临界阻尼（$\beta = \omega_0$）

$$x = e^{-\beta t}(A_1 + A_2 t)$$

振子不作振动，从初始位置回到平衡位置时间最短。（电表指针设计）


x
临界阻尼
过阻尼
O
t
欠阻尼

§ 8.6 受迫振动

阻尼系统在周期性驱动力作用下的振动。

为简单，设周期性驱动力为 $H\cos\omega t$

受迫振动方程

2 阶非齐次线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2} + 2\beta \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t} + \omega_0^2 x = h\cos\omega t$$

非齐次项

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2m}, \quad h = \frac{H}{m}$$

非齐次方程通解 = 齐次方程通解 + 方程特解

通解： $x = x_0(t) + x_1(t)$

$x_0(t)$：非齐次项为零时的齐次线性方程——阻尼方程解，暂态解，与初始条件 (x_0, v_0) 有关。

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + 2\beta \frac{d x_0}{dt} + \omega_0^2 x_0 = 0$$

$x_1(t)$：特解，稳态解

暂态解 $x_0(t)$ 随时间衰减消失，有意义的是稳态解 $x_1(t)$。

根据非齐次项 $h\cos\omega t$ 可猜特解：$A\cos(\omega t+\varphi)$
代入方程，利用三角函数的正交性或线性无关性，或用旋转矢量法可求出特解或稳态解。

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 x=h\cos\omega t \qquad (1)$$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)\ =a\cos\omega t+b\sin\omega t \qquad (2)$$

$$A=\sqrt{a^2+b^2},\ \ \mathrm{tg}\,\varphi=-b/a \qquad (3)$$

将 (2) 代入 (1)，令等式两边 $\sin\omega t$, $\cos\omega t$
项的系数相等，得决定 a, b 的代数方程：

$$(\omega_0^2-\omega^2)b-2\beta\omega a=0$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)a+2\beta\omega b=h$$

解出 a, b 代入 (3) 式即得 A、φ

稳态解： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$A = \frac{h}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}}$$

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad \sin\varphi = -\frac{2\beta\omega A}{h}$$

注意：稳态解不是一般意义上的简谐振动

系统振动频率 = 驱动力频率 $\omega \neq$ 固有频率 ω_0

A, φ：取决于系统和驱动力参量 $\omega_0, \beta, h, \omega$, 与初始条件 (x_0, v_0) 无关。

位移共振 — 位移振幅达最大

$$A=\frac{h}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2]^{1/2}}$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega}=0$ 得：

共振频率 $\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$

共振振幅 $A_{\max}=\dfrac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$

稳态速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A' \cos(\omega t + \varphi')$$

$$A' = \omega A = \frac{\omega h}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{1/2}}$$

$$\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2} = \mathrm{tg}^{-1} \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2}$$

速度共振 — 速度振幅达最大

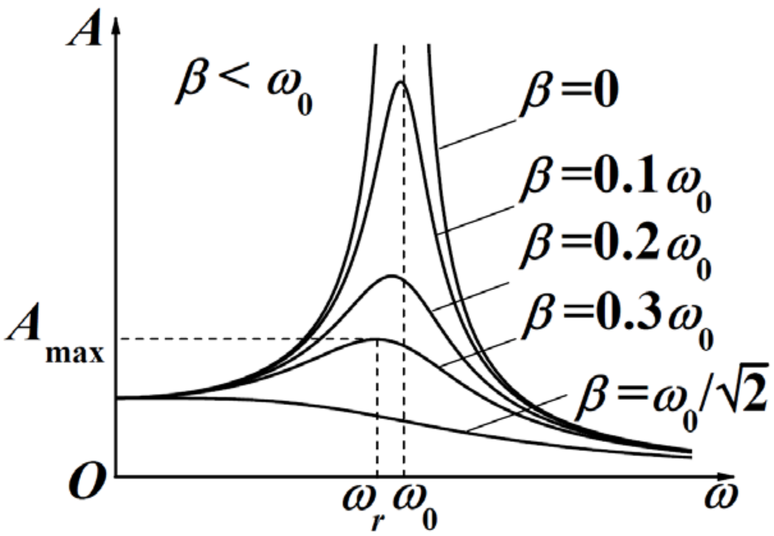
$$A' = \omega A = \frac{\omega h}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}}$$

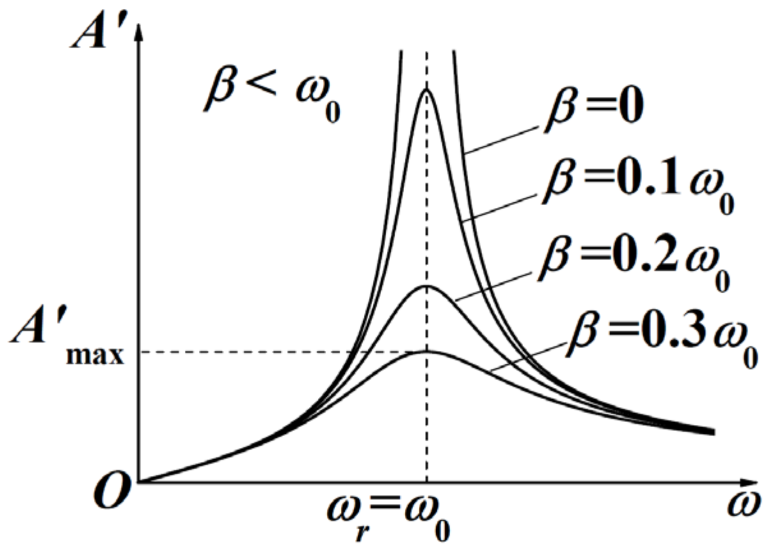
由 $\frac{\mathrm{d}A'}{\mathrm{d}\omega} = 0$ 得：

共振频率 $\omega_r = \omega_0$

共振振幅 $A'_{\max} = \frac{h}{2\beta}$

共振曲线





对弱阻尼 ($\beta \ll \omega_0$):

$\omega_r \approx \omega_0$ 时，速度、位移同时共振。

稳态下受迫振动的能量

振动速度： $\boldsymbol{v} = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

驱动力功率：

$$p_{驱} = H\cos\omega t\,\boldsymbol{v} = H\cos\omega t[-\omega A\sin(\omega t+\varphi)]$$

阻尼力耗散的功率

$$p_{阻} = -\gamma\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} = -\gamma[\omega A\sin(\omega t+\varphi)]^2$$

速度共振时： $\omega=\omega_0$， $\varphi=-\pi/2$

$$p_{驱} = -p_{阻}$$ 瞬时功率相等

一个周期中驱动力和阻尼力的平均功率

$$\bar{p}_{驱} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} p_{驱}\mathrm{d}t = m\beta\omega^{2}A^{2}$$

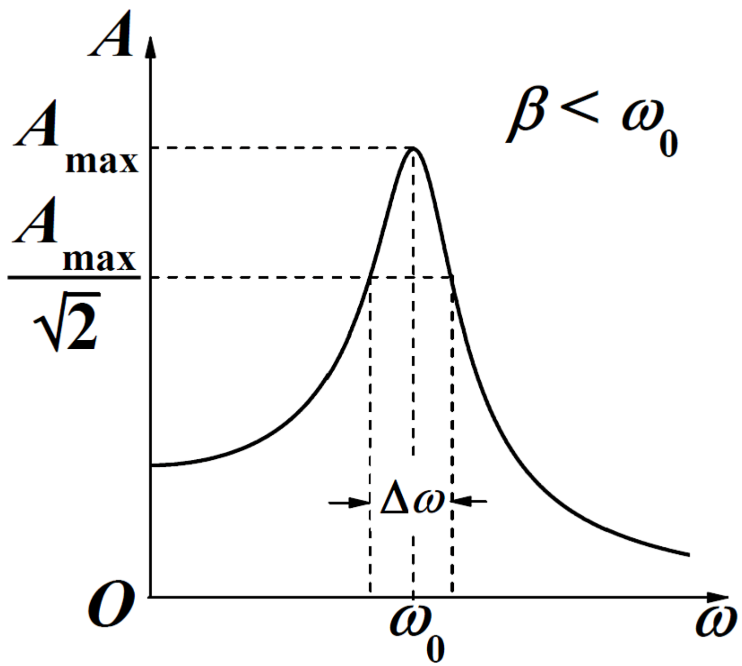
$$\bar{p}_{阻} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} p_{阻}\mathrm{d}t = -m\beta\omega^{2}A^{2}$$

共振时，驱动力与速度同相，总作正功，系统能最大限度从外界吸收能量，振幅可达最大值（如荡秋千）。

共振曲线锐度 S

对弱阻尼 ($\beta \ll \omega_0$):

共振峰宽度— 频带宽度:

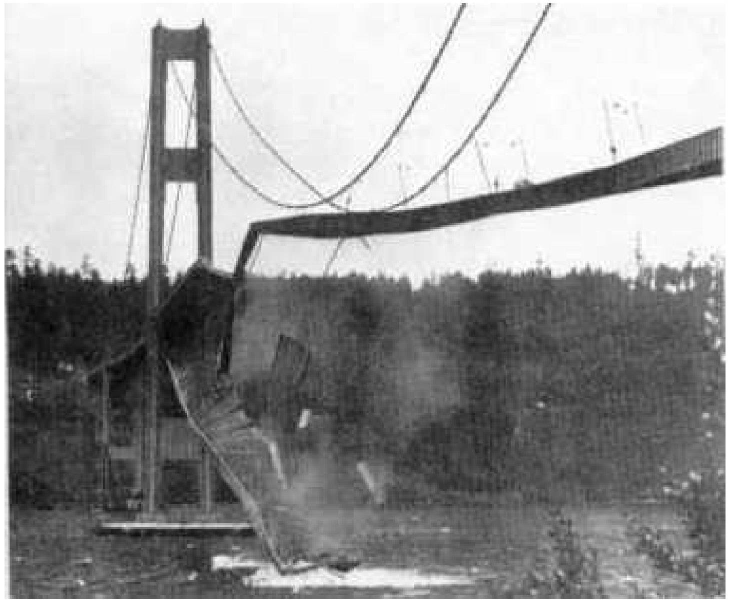


$$\boxed{\Delta\omega \approx 2\beta}$$

$$\boxed{S = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q}$$

共振曲线越尖锐，振动性能越好，选择特定频率的能力越强。

小号震破酒杯



1940年美国塔科曼海峡大桥在大风中振动断塌

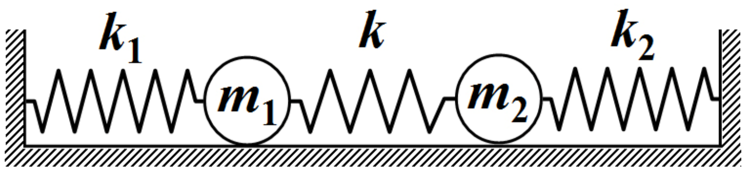
【TV】大桥共振

【思考】求下面受迫振动的解

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + 2\beta \frac{d x}{d t} + \omega_0^2 x = h_1 \cos \omega t + h_2 \cos 2\omega t$$

§ 8.7 耦合振子和简正模式

本节用下面的简单例子介绍耦合振子（离散系统）中的简正模式，方法和结论具有普适性。



设振子 1 和 2 偏离平衡位置的位移分别是 x_1 和 x_2，两振子的运动方程为：

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 - k x_1 + k x_2 \qquad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 - k x_2 + k x_1 \qquad (2)$$

两个振子运动耦合在一起，是什么样的？

可以试着猜测耦合振子中也存在简谐振动形式，

两个振子以相同的频率振动：

$$x_1 = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t$$

$$x_2 = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$$

相当于假设 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ ， A_1、A_2、B_1、B_2 和初始条件有关。

代入方程 (1)(2)，利用三角函数的独立性，cos、sin 项的系数为零，得关于A_1、A_2、B_1、B_2的代数方程：

$$(-m_1\omega^2+k_1+k)A_1-kA_2=0$$

$$-kA_1+(-m_2\omega^2+k_2+k)A_2=0$$

$$(-m_1\omega^2+k_1+k)B_1-kB_2=0$$

$$-kB_1+(-m_2\omega^2+k_2+k)B_2=0$$

A_1、A_2、B_1、B_2有非零解要求系数行列式为零：

$$\begin{vmatrix} -m_1\omega^2+k_1+k & -k \\ -k & -m_2\omega^2+k_2+k \end{vmatrix}=0$$

解出：

$$\omega_1^2 = \frac{(k_2 + k)m_1 + (k_1 + k)m_2}{2m_1 m_2} - \frac{\sqrt{[(k_2 + k)m_1 - (k_1 + k)m_2]^2 + 4m_1 m_2 k^2}}{2m_1 m_2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{(k_2 + k)m_1 + (k_1 + k)m_2}{2m_1 m_2} + \frac{\sqrt{[(k_2 + k)m_1 - (k_1 + k)m_2]^2 + 4m_1 m_2 k^2}}{2m_1 m_2}$$

讨论

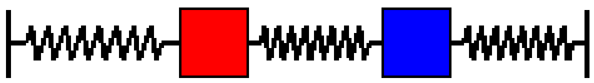
(1) $\omega = \omega_1$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{k}{-m_1\omega_1^2 + k_1 + k} = \frac{-m_2\omega_1^2 + k_2 + k}{k} = \alpha > 0$$

$$x_1 = A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin\omega_1 t$$

$$x_2 = \alpha A_1 \cos\omega_1 t + \alpha B_1 \sin\omega_1 t = \alpha x_1$$

两个振子振幅不同，步调一致，同相振动。



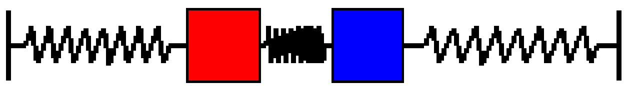
(2) $\omega = \omega_2$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{k}{-m_1\omega_2^2 + k_1 + k} = \frac{-m_2\omega_2^2 + k_2 + k}{k} = \beta < 0$$

$$x_1 = A_1 \cos \omega_2 t + B_1 \sin \omega_2 t$$

$$x_2 = \beta A_1 \cos \omega_2 t + \beta B_1 \sin \omega_2 t = \beta x_1$$

两个振子振幅不同，步调相反，反相振动。



简正模式： 系统中所有振子以特定频率作简谐振动的运动方式。

简正频率： 简正模式对应的频率，也称为固有频率、特征频率，只决定于系统，和初始条件无关。

简正坐标： 简正模式是系统特定的集体振动模式，这些特定的集体振动模式相对应的坐标就称为简正坐标。

简正模式从数学上可理解为是特解。

求解耦合振子的简正模式的普适方法

观察方程 (1)(2)，是齐次线性的常微分方程组，可利用线性代数手段求解，用矩阵表示为：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{k_1+k}{m_1} & -\dfrac{k}{m_1} \\ -\dfrac{k}{m_2} & \dfrac{k_2+k}{m_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

令 $\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} \dfrac{k_1+k}{m_1} & -\dfrac{k}{m_1} \\ -\dfrac{k}{m_2} & \dfrac{k_2+k}{m_2} \end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \tilde{\omega}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$

如果矩阵 $\tilde{\omega}$ 能对角化，且本征值是正数，则方程 (3) 可以解耦成两个独立的标准的简谐振动方程。

设矩阵 $\tilde{S}$ 是使 $\tilde{\omega}$ 对角化的变换矩阵，为方便设本征值分别是 ω_1^2、ω_2^2，有：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tilde{S}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \tilde{S}^{-1}\tilde{\omega}\tilde{S}\tilde{S}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tilde{S}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}\tilde{S}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

令 $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \tilde{S}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 q_1}{dt^2}+\omega_1^2 q_1=0, \qquad \frac{d^2 q_2}{dt^2}+\omega_2^2 q_2=0$$

这是 2 个关于新独立变量 q_1和 q_2 的标准的简谐振动方程，描述的是系统以特定频率—固有频率的振动，即简正模式。

q_1、q_2 就是简正坐标，是每个振子位移的线性组合。

ω_1、ω_2 就是简正频率、固有频率、特征频率。

简正模式是系统每个振子都以某个固有频率振动的集体振动模式。各个简正模式是线性无关的，各自独立的运动。

简正模式数目和系统自由度有关：

由 N 个质点构成的离散的相互作用系统，系统的自由度为 $3N$，一般有 $3N-6$ 个简正模式和相应的简正频率。其中 3 个自由度对应系统整体平动，3 个自由度对应系统整体转动，剩下 $3N-6$ 个自由度对应质点之间的相对运动 — 振动。

简正模式、固有频率、简正坐标只决定于系统，和外界刺激无关。

耦合振子的一般振动

耦合振子除了以简正模式方式振动外，有没有其它的振动方式?

耦合振子一般是以简正模式的线性叠加形式振动。

数学上是通解（一般振动）和特解（简正模式）的关系：

$$C_1 q_1 + C_2 q_2$$

组合系数 C_1、 C_2 由初始条件（外界刺激）定。