第七章 流体力学

流体力学主要以宏观连续体模型（连续介质）研究流体的运动和平衡问题。

流体的宏观连续体由无穷多流体质元构成。

流体质元的线度要求宏观小，微观大：

宏观小：可逐点描述流体运动；

微观大：包含足够多分子形成统计结果，
保证质元的热力学性质稳定。

流体基本特性：易流动性、粘性、压缩性

易流动性：和刚体、弹性体不同，流体内不存在弹性力，静止时有正应力，没有切应力，故可产生任意的形变。这个宏观性质就是易流动性。

粘性：流体流动时，相邻层的流体之间存在粘性应力 — 内摩擦，抵抗相邻层的流体间的相对运动或相对滑动。当流体粘性较小时，可当无粘性流体处理。

压缩性：流体体积或密度随压力或温度而改变的特性。液体在通常温度或压力下，压缩性很小。气体可压缩性强，但当气体流速 << 声速时，可把气体当作不可压缩来处理。

§ 7.1 流体的运动

一. 流体运动的描述

▲ 拉格朗日法：质点系方法，将流体看成质元集合，研究质元运动轨迹 — 迹线。

▲ 欧拉法：场论方法，研究空间各点处的流速及其随时间的变化 — 速度场。

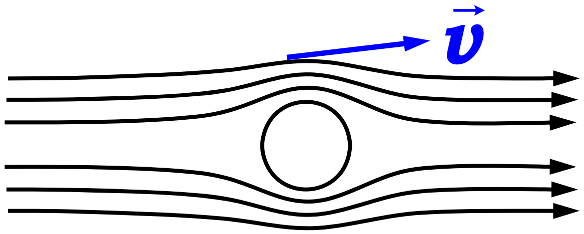
矢量场：$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$

标量场：$\rho = \rho(x, y, z, t)$，$p = p(x, y, z, t)$

欧拉法是常用方法，以下采用欧拉法讨论。

流线

流线的切线与该点处流体的运动方向相同。

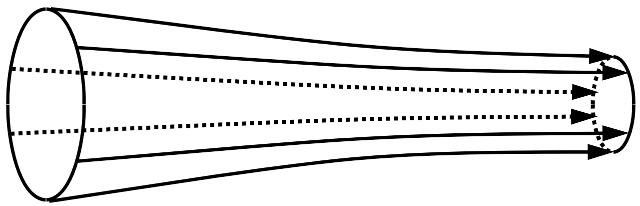


给定时刻的空间的速度分布与该时刻流线分布相对应。

流线一般不相交。

流管

流线所围成的细管。



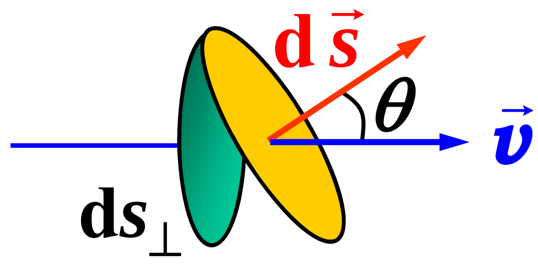
二. 连续性方程和质量守恒

流量：单位时间通过给定曲面的体积或质量

dt 时间内通过面元 ds 的体积和质量：

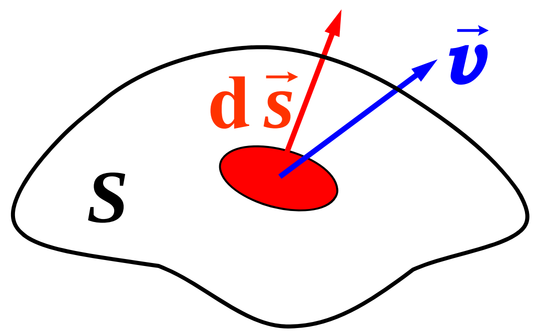
$$dV = (\boldsymbol{v}\cdot dt)\cdot ds_{\perp} = \vec{\boldsymbol{v}}\cdot d\vec{s}\cdot dt$$

$$dm = \rho\, dV = \rho\vec{\boldsymbol{v}}\cdot d\vec{s}\cdot dt$$



体积流量：$Q_V = \iint\limits_S \vec{\boldsymbol{v}}\cdot d\vec{s}$

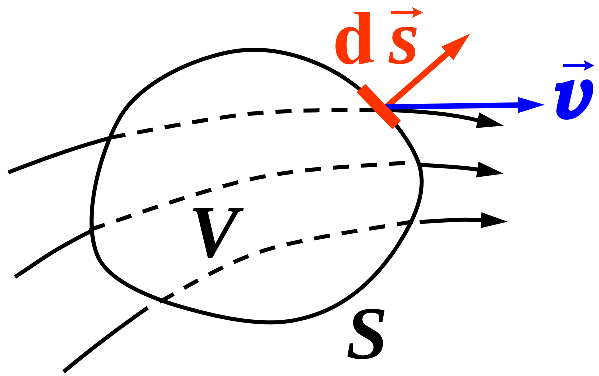
质量流量：$Q_m = \iint\limits_S \rho\vec{\boldsymbol{v}}\cdot d\vec{s}$



对封闭曲面，规定外法线方向为正。

对空间任一封闭曲面，质量流量满足：

$$\oint\!\!\oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\left(\iiint_V \rho dV\right)$$



$$\oint\!\!\oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{s} + \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = 0$$

连续性方程的本质是质量守恒：

单位时间内“净”流出封闭曲面的流体质量，等于该时间内封闭曲面内的流体质量减少。

三. 定常流动

定常流动：空间每个点的速度不随时间变

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$$

空间速度分布不变，空间流线分布不变。

流体流动的同时，又要满足流线分布不变：只能是一部分流体从此地流走的同时，相同部分的流体以流走的方式再流入此地。

所以定常流动时，流体的质量分布、密度分布、压强分布都不随时间变：

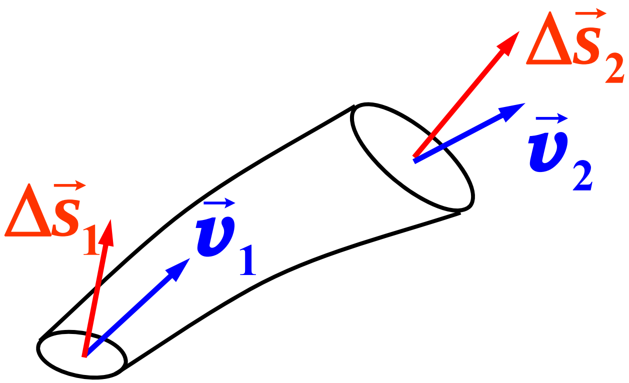
$$\rho = \rho(x, y, z), \quad p = p(x, y, z)$$

根据连续性方程可得定常流动条件：

$$\oiint_S \rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\,\vec{s}=0$$

流线连续、不能中断。流体只能在流管内流动，不能从流管的侧面出入。

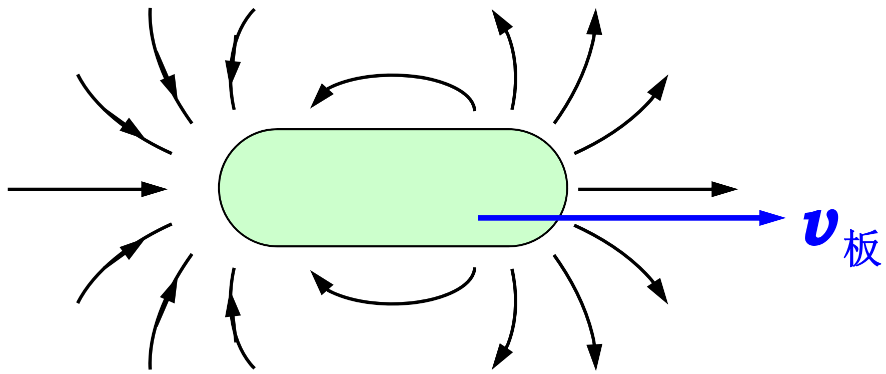
对任意细流管，任选 2 个截面 Δs_1、Δs_2，规定其法向朝着所在处的流速方向，则有：



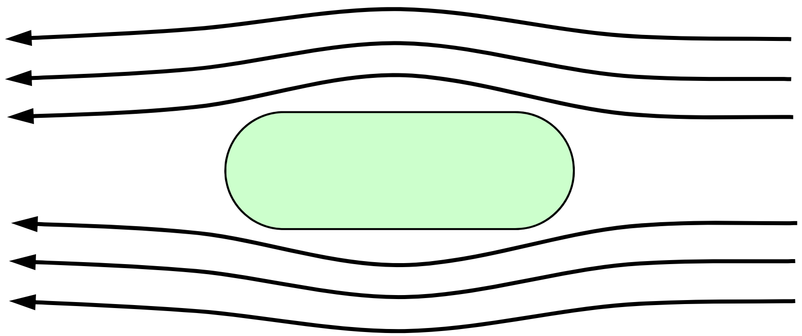
$$\rho_1\vec{v}_1\cdot\Delta\vec{s}_1=\rho_2\vec{v}_2\cdot\Delta\vec{s}_2$$

$$\Delta Q_m=\rho\vec{v}\cdot\Delta\vec{s}=\text{恒量}$$

定常流动和参考系有关



地面系是非定常流动



相对板静止参考系是定常流动

§ 7.2 无粘性流体的运动方程

研究流体的运动，必须着眼于流体和外界交界面处的相互作用情况，以及流体内部质元的受力运动情况。

流体受两种力：彻体力和面力

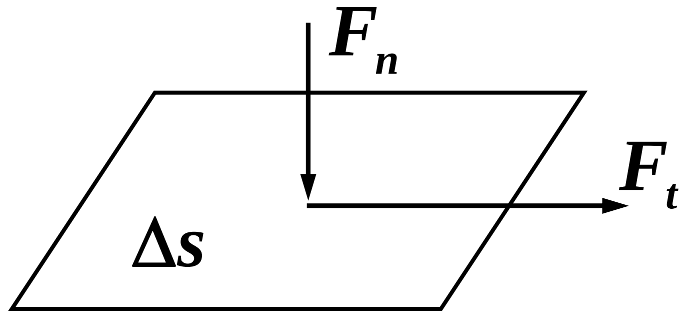
彻体力：每个流体质元都受到的来自流体外部的外力，如重力，惯性力等。

面力：作用在流体和外界交界面处的面力，以及作用在相邻流层界面的内力。面力属于应力。流体没有静摩擦力。

应力：作用在某点处的某个面上的力，是 2 阶张量。

正应力：$F_n/\Delta s$

切应力：$F_t/\Delta s$

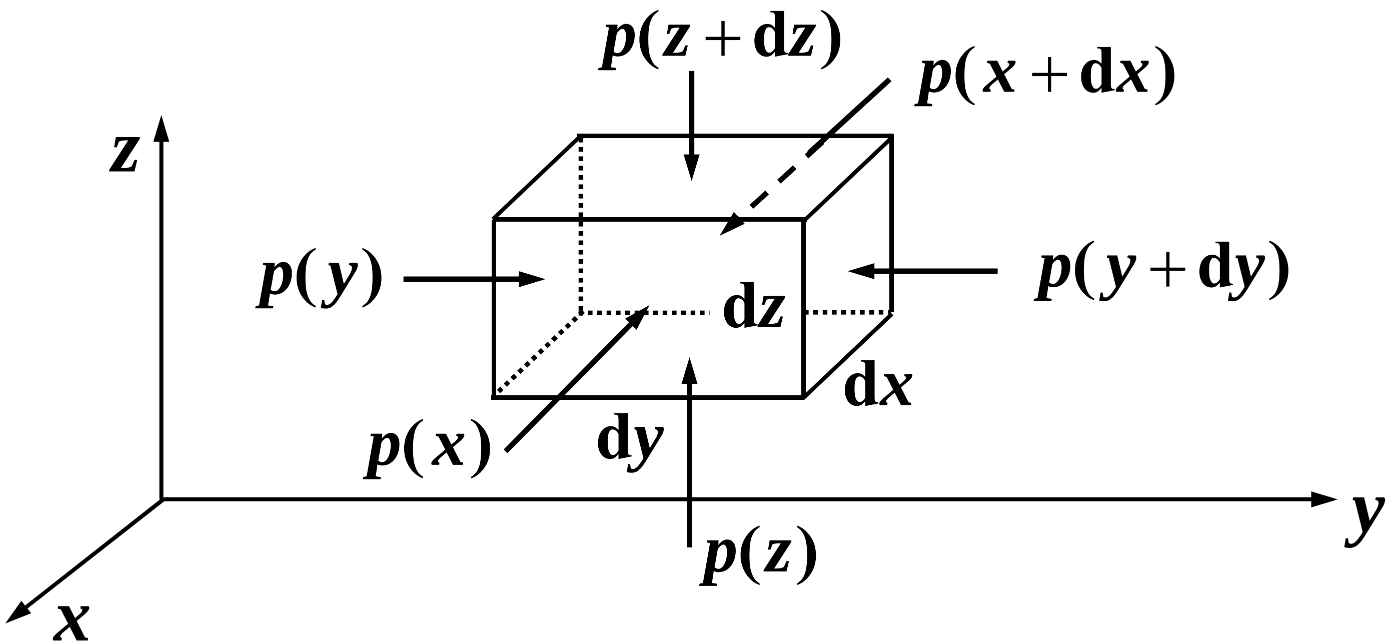


流体静止时，正应力退化为标量 — 通常的的静压强，而且没有切应力。

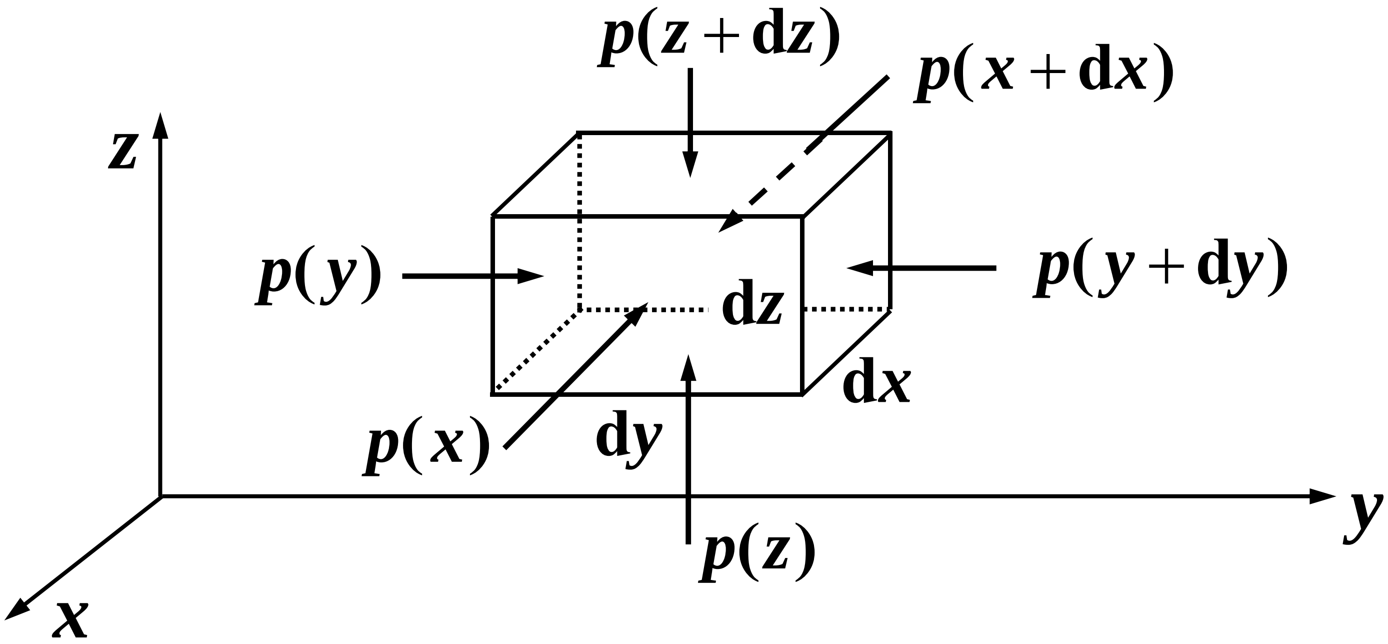
流体流动时，正应力包括 2 部分：静压强和粘滞力的贡献，粘滞力也造成切应力。

一. 无粘性流体的运动方程

无粘性流体只受彻体力和压强产生的压力。



选 $x-x+\mathrm{d}x$、$y-y+\mathrm{d}y$、$z-z+\mathrm{d}z$ 的质元作分析受力，列牛顿方程。



y 向合压力：$[p(y)-p(y+\mathrm{d}y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}z=-\dfrac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

同理 x、z 向合压力分别为：

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z、\quad -\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

压强产生的合力：$-\nabla p \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\nabla p \cdot \mathrm{d}V$

设单位质量的彻体力为：$\vec{f}(\vec{r})$

则有：$\rho \mathrm{d}V\vec{f}(\vec{r}) - \nabla p \cdot \mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}V \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{\rho\vec{f}(\vec{r}) - \nabla p = \rho \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$$

— 无粘性流体的运动方程

方程包含 ρ、p、$\vec{v}$，求解还需连续性方程、热力学中的物态方程（$p \sim \rho$关系），3 个方程构成完备方程组。

二. 流体静力学方程

流体静止时，由于没有粘滞力，可由无粘性流体的运动方程得到静力学方程：

$$\boxed{\rho\vec{f}(\vec{r})-\nabla p=0}$$

1. 不可压缩流体中的压强分布

不可压缩流体：$\rho=$常量

所以彻体力只能是保守力，可设其单位质量的势能是 $\tilde{V}(\vec{r})$ ，则有：

$$\vec{f}(\vec{r})=-\nabla\tilde{V}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad -\nabla\rho\tilde{V}(\vec{r})-\nabla p=0$$

$$\boxed{p+\rho\tilde{V}(\vec{r})=\text{常数}}$$

重力场中的液体压强分布

$$\tilde{V}(\vec{r})=gz \quad \Rightarrow \quad p+\rho gz=\text{常数}$$

设液面处坐标和压强分别为 $z=0$ 和 p_0：

$$p=p_0-\rho gz$$

这就是深度为 $-z$ 处的压强。

2. 可压缩流体中的压强分布

对可压缩流体： $\rho = \rho(x, y, z)$

求解方程 $\rho\vec{f}(\vec{r}) - \nabla p = 0$ 需物态方程

重力场中的大气压强分布

是一维问题，设 z 轴向上：

$$\rho = \rho(z)、p = p(z)、\vec{f}(\vec{r}) = -g\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad -\rho g = \mathrm{d}p/\mathrm{d}z$$

设大气温度不变，当作理想气体：

$$p = nkT，\rho = mn \quad (m\text{是分子质量})$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{mg}{kT}\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}p}{p}$$

$$\int_0^z -\frac{mg}{kT}\mathrm{d}z = \int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p}$$

$$\boxed{p = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}}$$

—— 恒温气压公式

§ 7.3 理想流体的流动

一. 理想流体的定常流动

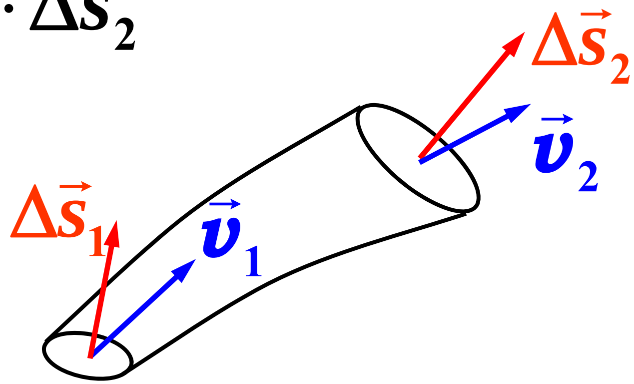
理想流体：不可压缩的、无粘滞性的流体

不可压缩流体： $\rho =$ 常量

对任意细流管： $\vec{v}_1 \cdot \Delta \vec{s}_1 = \vec{v}_2 \cdot \Delta \vec{s}_2$

$$\Delta Q_V = \vec{v} \cdot \Delta \vec{s} = \text{恒量}$$

$$\Delta Q_m = \rho \vec{v} \cdot \Delta \vec{s} = \text{恒量}$$

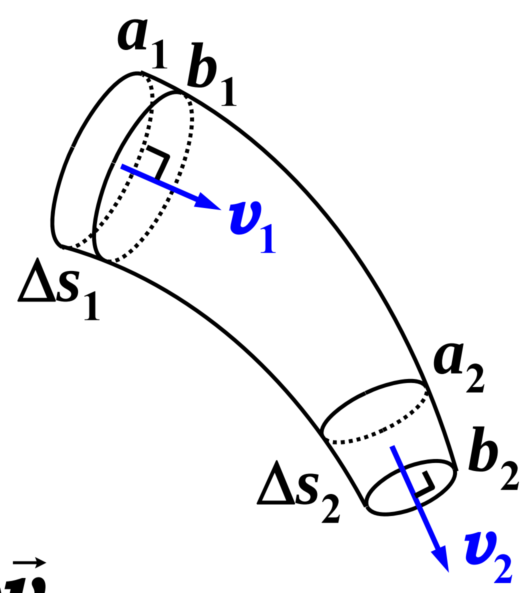


同一流管内，流速和横截面积成反比。

二. 理想流体定常流动的动量定理

任取细流管中 a_1a_2 段流体，经 dt 时间流动到 b_1b_2 段位置。

动量增量：



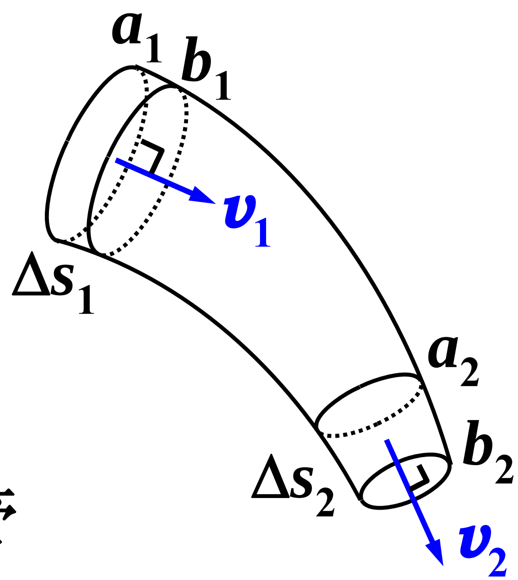
$$\mathrm{d}\vec{P} = \vec{P}(b_1b_2\text{段}) - \vec{P}(a_1a_2\text{段})$$

$$= \vec{P}(a_2b_2\text{段}) - \vec{P}(a_1b_1\text{段})$$

$$= (\rho\Delta s_2 v_2 \mathrm{d}t)\vec{v}_2 - (\rho\Delta s_1 v_1 \mathrm{d}t)\vec{v}_1$$

$$= \rho\Delta Q_V(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\mathrm{d}t = \Delta Q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\mathrm{d}t$$

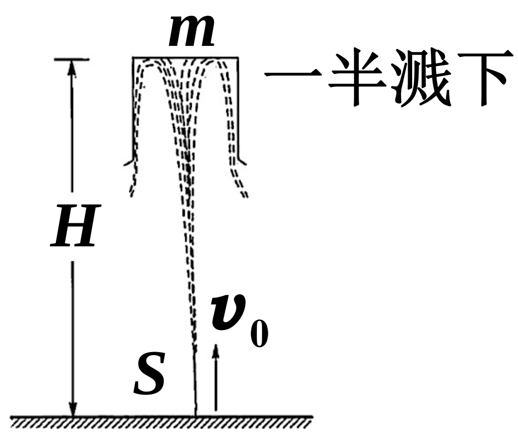
设整个 a_1a_2 段细流管所受合外力为 $\vec{F}$ ，根据质点系动量定理可得：



$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F} &= \rho\Delta Q_V(\vec{v}_2-\vec{v}_1)\\ &= \Delta Q_m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)\end{aligned}}$$

注意：$\vec{F}$ 是整个 a_1a_2 段细流管所受合外力，图中没标出。

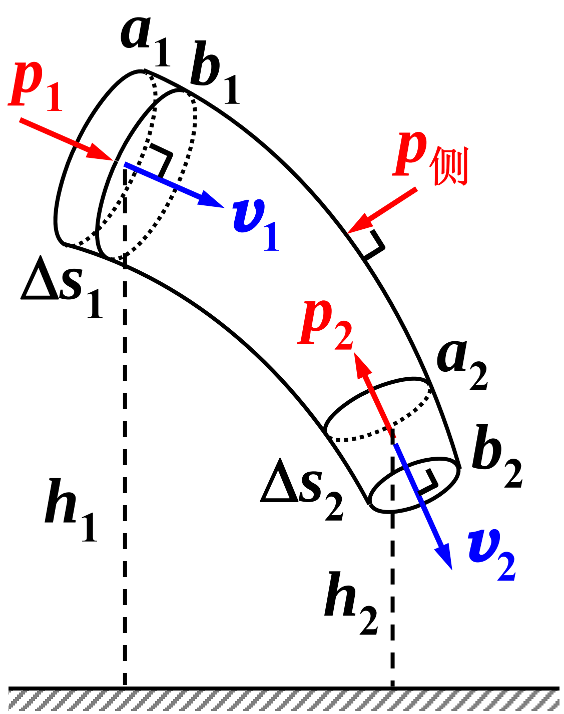
【思考】重解空中桶的题



三. 伯努利方程

伯努利方程是理想流体定常流动的动力学方程，实质是流体流动中的功能关系式。

任取细流管中a_1a_2段流体，经 dt 时间到 b_1b_2 段位置。



外力总功：

$$W_{外} = p_1\Delta s_1|a_1b_1| - p_2\Delta s_2|a_2b_2|$$

$$= p_1\Delta s_1 v_1 \mathrm{d}t - p_2\Delta s_2 v_2 \mathrm{d}t$$

流量恒定：$\Delta s_1 v_1 \mathrm{d}t = \Delta s_2 v_2 \mathrm{d}t = \Delta V$

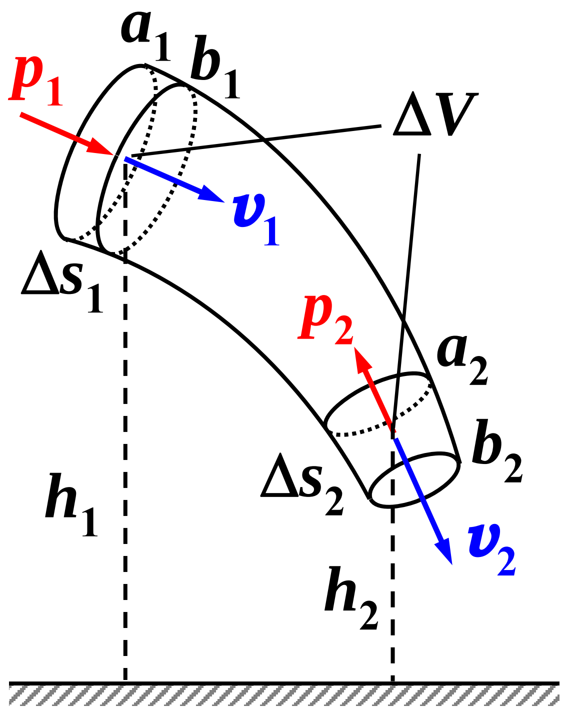
$$W_{外} = (p_1 - p_2)\Delta V$$

无粘滞性： $W_{非保内} = 0$

机械能增量：

$$\Delta E = E(b_1 b_2 段) - E(a_1 a_2 段)$$

$$= E(a_2 b_2 段) - E(a_1 b_1 段)$$



$$= (\frac{1}{2}\rho\Delta V v_2^2 + \rho\Delta V g h_2) - (\frac{1}{2}\rho\Delta V v_1^2 + \rho\Delta V g h_1)$$

功能原理： $W_{外} + W_{非保内} = \Delta E$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

伯努利方程

$$\boxed{p+\frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}^2+\rho gh=\text{恒量}}$$

p 静压，$\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}^2$ 动压，$p+\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}^2$ 总压

如果流体的速度场有旋：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{v}}\neq \mathbf{0}$，则方程是针对同一流线而言，不同流线的恒量不一样。

如果速度场无旋，恒量对整个流体相同。

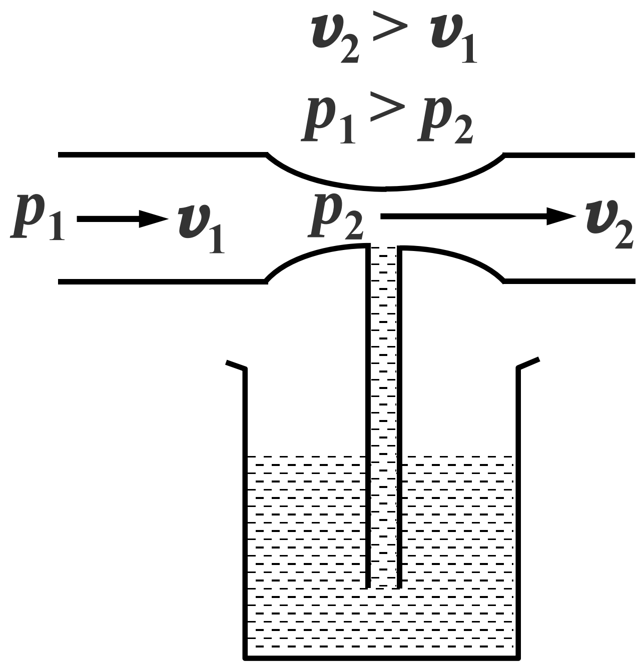
伯努利方程应用

1. 等高流管情形

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = 恒量$$

流速大的地方压强小

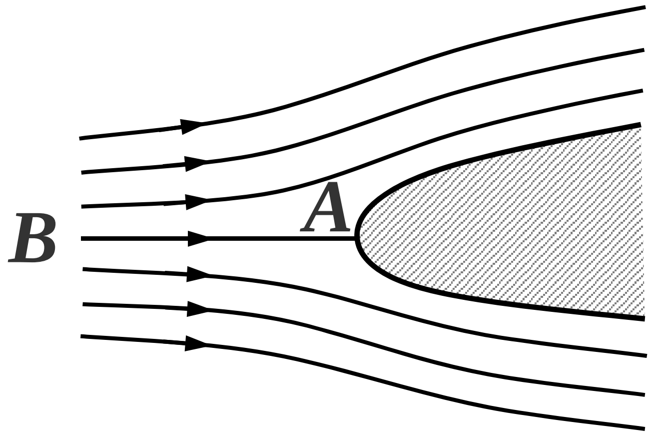
喷雾器、水流抽气机

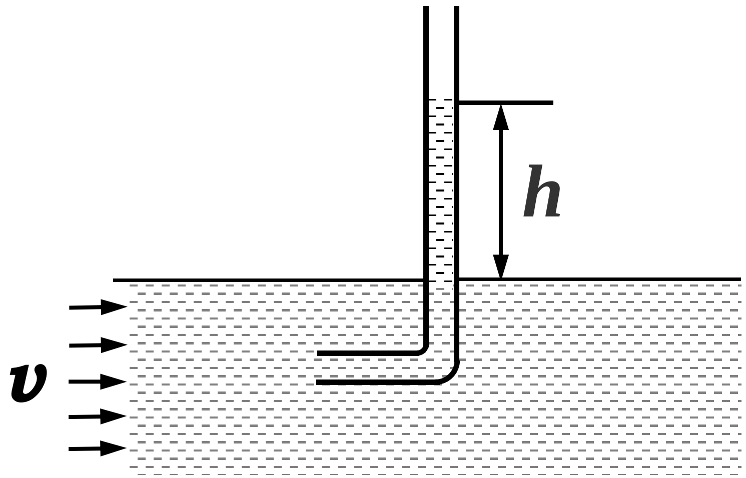


2. 皮托管测流速

驻点 A： 障碍物前流体静止不动的点

$$p_A = p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{总压}$$





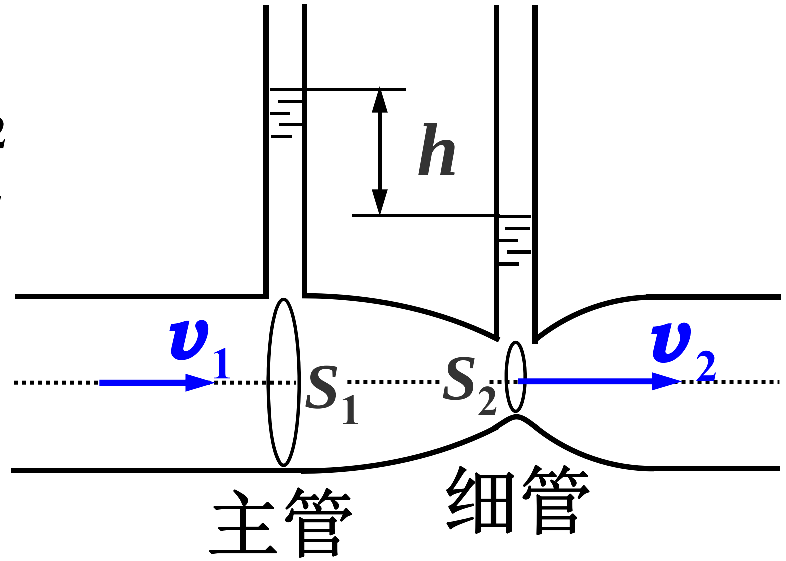
流速： $v = \sqrt{2gh}$

3. 汾丘里流量计

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \rho g h$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = Q_V$$



体积流量 $Q_V = \sqrt{2gh \Big/ \left(\dfrac{1}{S_2^2} - \dfrac{1}{S_1^2} \right)}$

考虑粘滞性等因素的影响，上式需要乘一个个小于 1 的修正常数。

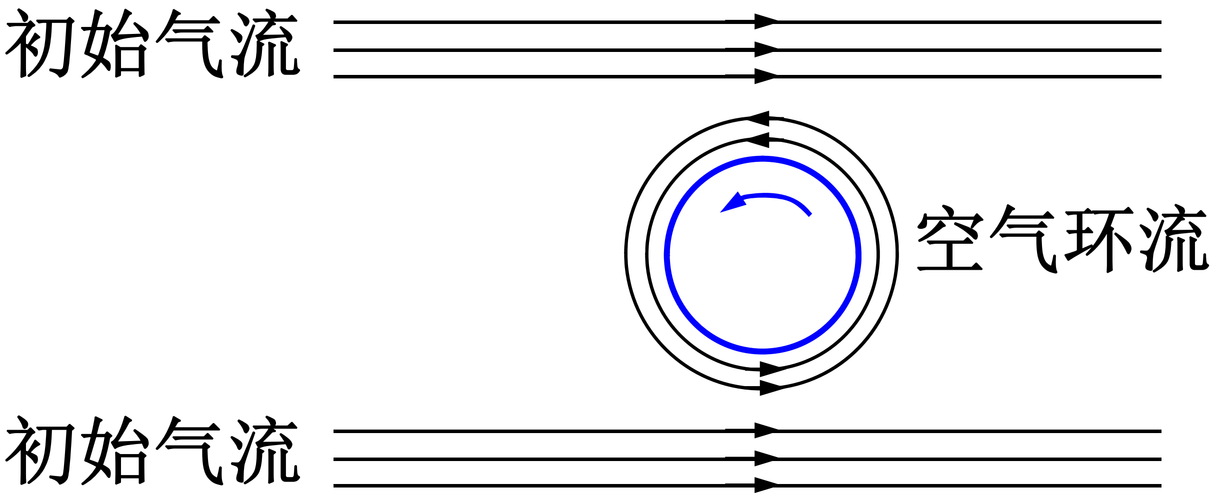
4. 弧旋球

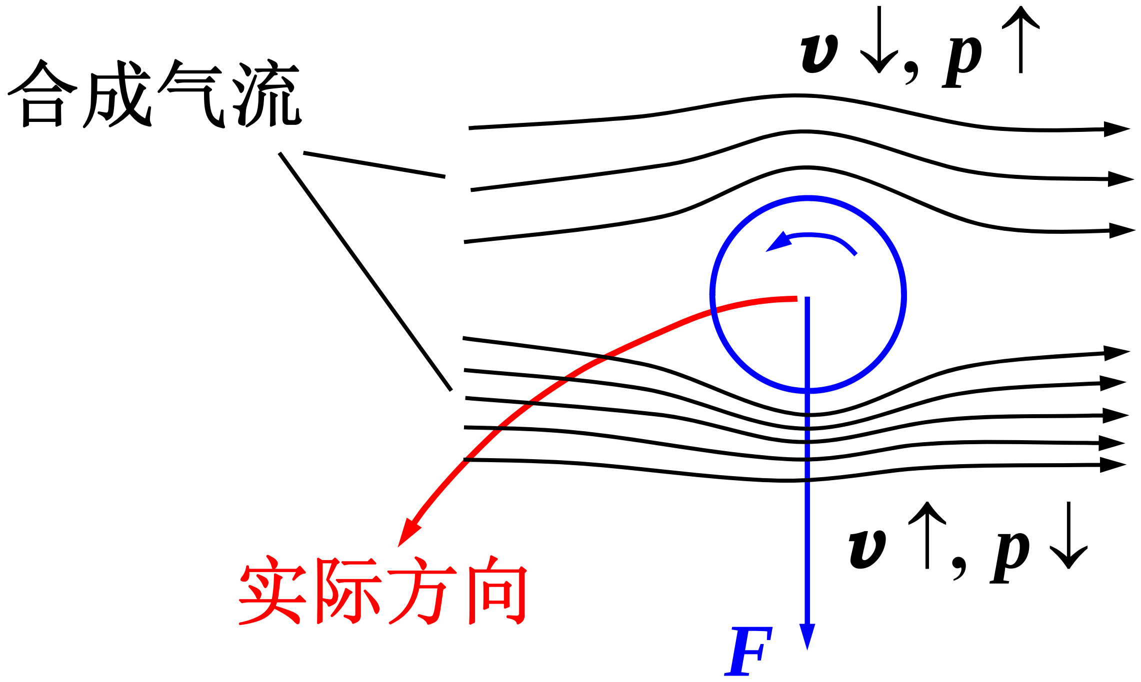
考虑下面两点，可用伯努利方程粗略分析。

▲ 空气粘滞性 — 形成空气环流

▲ 质心系 — 定常流动

质心系内各气流分布

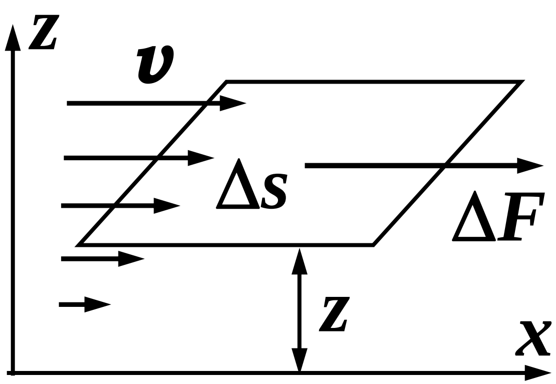




v↓, p↑
合成气流
实际方向
v↑, p↓
F

§ 7.4 粘性流体的流动

一. 粘滞定律 — 牛顿摩擦定律

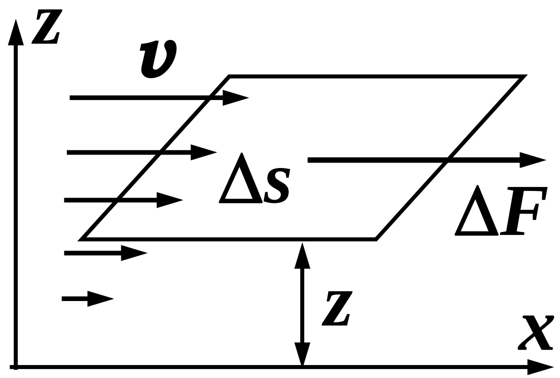


设流体沿 x 方向流动，速度沿 z 方向不同，即不同 z 值的平面两侧的流体存在相对运动，则两侧流体间存在粘滞力，或切应力。

在 z 值平面上选一小面元 Δs，作用在它上面的粘滞力为 ΔF，该处速度梯度为 $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}z$ ，则有：

粘滞定律

$$\boxed{\Delta F = \eta \Delta S \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}}$$



η：粘度，单位：Pa·s

粘度与温度有关，液体随温度减小，气体增加。

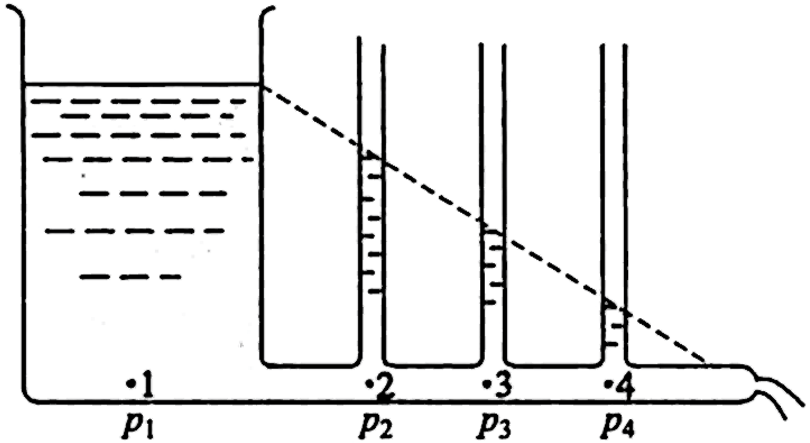
遵从粘滞定律的流体称为牛顿流体。

二. 不可压缩粘性流体作定常流动的规律

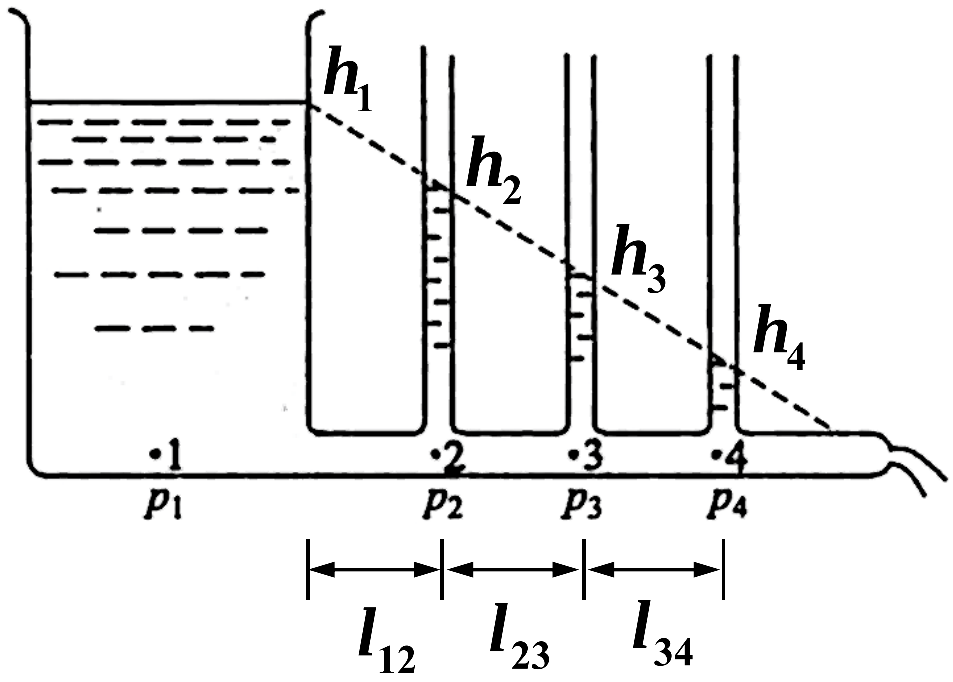
对粘性流体，伯努利方程需作修改：

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h_1$$

$$=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g h_2+w$$



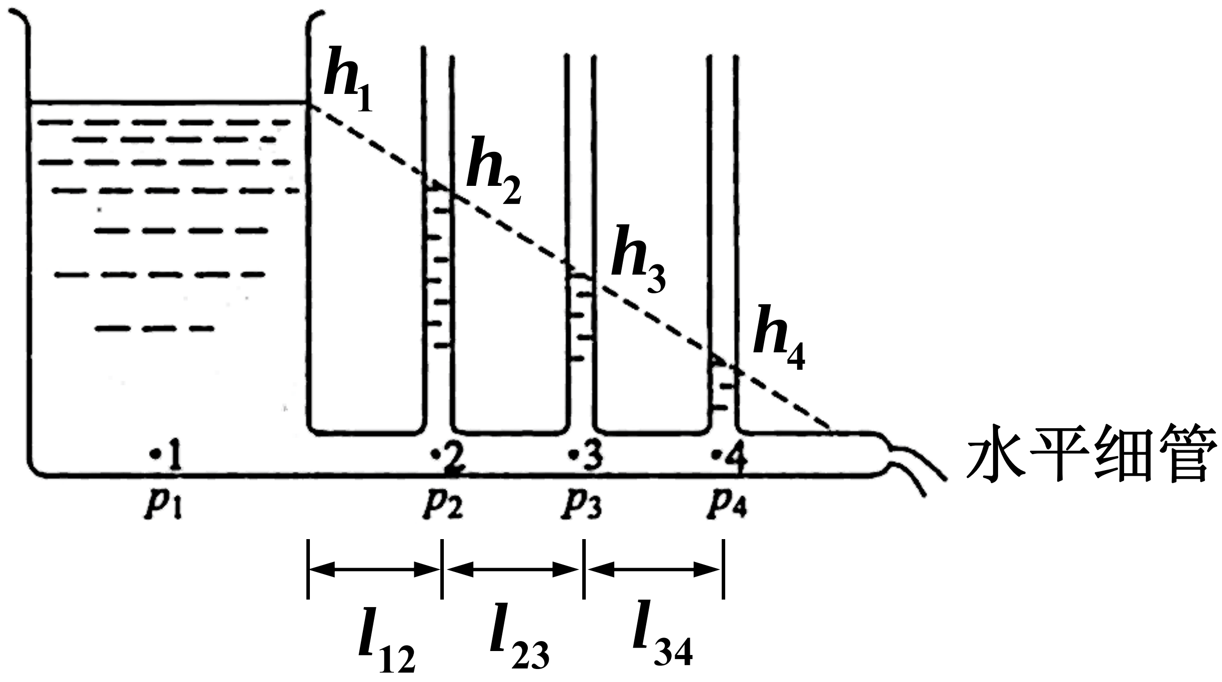
w：单位体积流体从位置 1 运动到位置 2 的过程中克服粘力而消耗的机械能。对所观察的在流管内的流体，有其内部的粘力，也有管外流体在管壁处给予的粘力，前者总使机械能减少，后者要看是拽力还是阻力而定。



水平细管中粘力作功与流过长度成正比 $\boldsymbol{w} = \alpha \boldsymbol{l}$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \alpha l_{12} = p_3 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \alpha(l_{12} + l_{23})$$

$$p_1 = p_0 + \rho g h_1, \quad p_2 = p_0 + \rho g h_2, \quad p_3 = p_0 + \rho g h_3$$

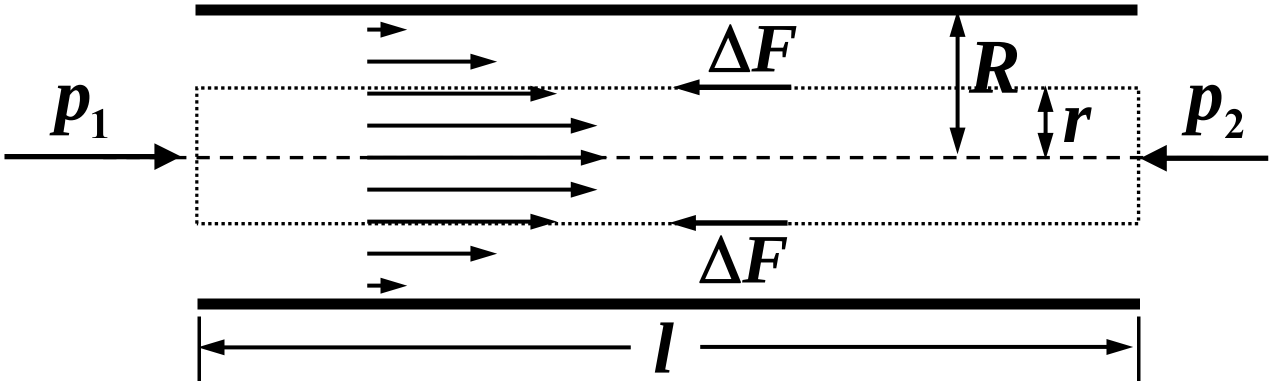


$$\Rightarrow \quad h_1 = h_2 + \frac{\alpha}{\rho g} l_{12} = h_3 + \frac{\alpha}{\rho g}(l_{12} + l_{23}) = h + \frac{\alpha}{\rho g} l$$

竖直管内液面高度在同一直线上

三. 泊肃叶公式

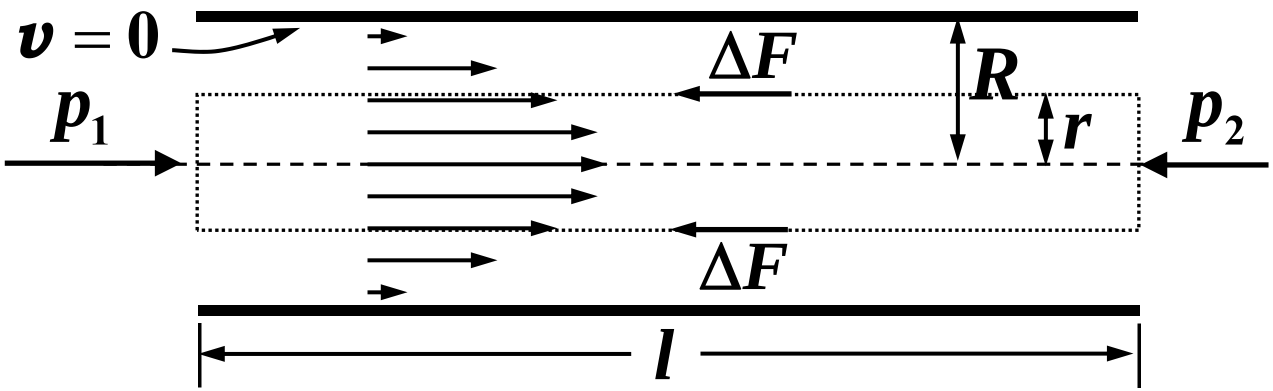
考察在水平管道里的粘性流体的定常流动，流体将分层流动，即流速沿着管径方向变化。



设管径 R，取长 l 一段，两端压强 P_1，P_2

半径为 r 的圆柱内的流体所受的合力为零：

$$p_1\pi r^2 = p_2\pi r^2 + \underbrace{\Delta F}_{\text{粘滞力}} \qquad \Delta F = \eta 2\pi r l \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$



$$\mathrm{d}v = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r\mathrm{d}r$$

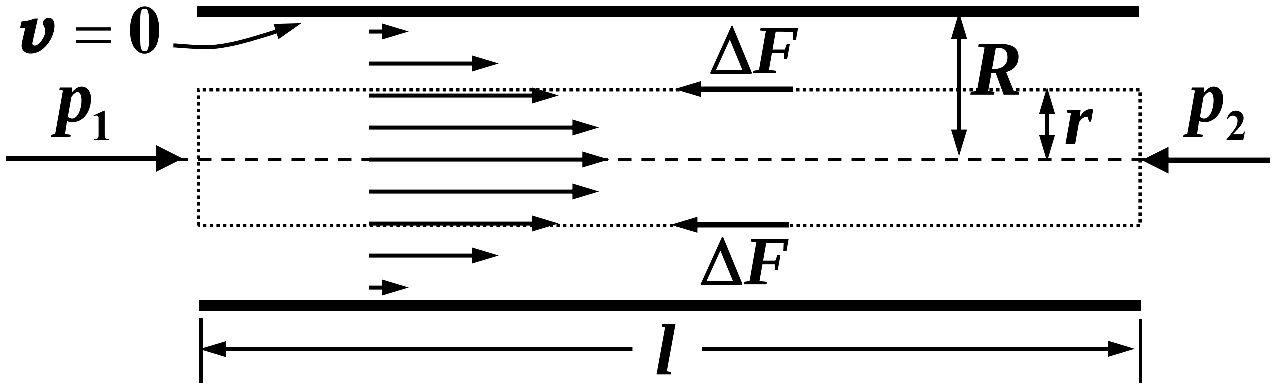
这是 1 阶常微分方程，求解需 1 个边界条件：

要给定某个 r 处的 v 值

这个问题边界条件是管道壁处流速为零：$v(R) = 0$

两边积分、上下限意义对应：

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_R^r -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r\mathrm{d}r$$



$$\boxed{v(r)=\frac{p_1-p_2}{4\eta l}(R^2-r^2)}$$ $v\sim r$ 抛物线关系

整个管道体积流量： $Q_V=\int_0^R v(r)2\pi r\mathrm{d}r$

$$\boxed{Q_V=\frac{p_1-p_2}{8\eta l}\pi R^4}$$ —— 泊肃叶公式

四. 层流、湍流和雷诺数

管道中的流体流速很小时，其流动是定常流动。

其流动特点是分层流动，各流层之间互不混杂，只有相对滑动 — 层流。

当流速增大到一定程度，定常流动被破坏，流动会不稳定，但流动仍具有部分层流的特征。

当流速进一步增大，层流状态将被破坏，流体将作不规则流动 — 湍流。

层流到湍流的转变不仅决定于流速大小，与流体的密度、粘度、以及管道的线度均有关系。

英国力学家雷诺综合考虑了上述因素后，首先于 **1883** 年提出了一个无量纲的量，称为雷诺数**：**

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho \upsilon D}{\eta}}$$

D：物体的几何限度（如管道直径）

对于几何形状相似的管道，无论其 ρ、υ、D、η 如何不同，只要 Re 相同，其流动情况就相同。

对于水平管道中的流动，大概 $\mathrm{Re} < 1000$ 是层流，$1000 < \mathrm{Re} < 2000$ 流动不稳定，$\mathrm{Re} > 2000$ 湍流。

流体的动力相似性原理

雷诺数的重要意义是可以作为流体的动力学相似性的判据：两种流体，只要雷诺数相同，其动力学性质就相似，包括流动形态、流线分布等相似。

五. 粘性流体中运动物体的受力

粘滞阻力：物体表面的流体附在物体上，流速为零，与邻近的流体有相对运动，由此产生的粘滞力阻碍物体运动。

压差阻力：在运动物体的前方流体受挤压，压强增大，后方的流体变稀疏，压强减小，阻碍物体的运动。

英国数学家斯托克斯（**G. G. Stokes**）于 **1851** 年从理论上推导了小球在静止流体中运动时所受阻力：

$$\boxed{f = 6\pi\eta r v}$$ 对小雷诺数严格成立

【例】小球在静止液体中竖直下落的收尾速度

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=mg-6\pi\eta r\boldsymbol{v}=mg-k\boldsymbol{v}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{v}=\frac{mg}{k}-\left(\frac{mg}{k}-\boldsymbol{v}_0\right)e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\boldsymbol{v}_{收尾}=\boldsymbol{v}(t\to\infty)=\frac{mg}{k}$$

$$\boldsymbol{v}_{收尾}=\frac{2r^2\rho g}{9\eta}$$