第六章 刚体力学

§ 6.1 刚体的运动

一. 刚体

理想模型：无限刚性，不变形，瞬时传力

特殊质点系：

质元相对位置不变：$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = l_{ij}^2$ 不变

质点系的规律都适用，但又有自己独特的运动学和动力学规律。

二. 自由度

确定力学体系空间位置所需的独立坐标数，和约束条件有关。

质点自由度

- 不受约束（自由）的质点， 自由度为 **3**，
  x, y, z 相互独立
- 约束在曲面上运动的质点， 自由度为 **2**，
  x, y, z 中有 **1** 个不独立，如 $z = z(x, y)$
- 约束在曲线上运动的质点， 自由度为 **1**，
  x, y, z 有 **2** 个不独立，如 $z = z(x)$， $y = y(x)$

刚体自由度

确定了刚体上每点位置，就确定了刚体的位置。

- 先在刚体上任选一点 A 确定其位置：
  需要 3 个 坐标 A_x、A_y、A_z。
- 再在刚体上任选一点 B 确定其位置：
  只需要 B_x、B_y、B_z 中的 2 个坐标，
  因为 $|AB| =$ 常数，有 1 个不独立。
- 再任选一个不在 AB 连线上的点 C 确定其位置：
  只需要 C_x、C_y、C_z 中的 1 个 坐标，
  因为 $|AC| =$ 常数， $|BC| =$ 常数，有 2 个不独立。

A、B、C 3 个点中的 6 个坐标定了，则刚体上任一点 D 的位置就定了：

因为用 $|AD|=$ 常数，$|BD|=$ 常数，$|CD|=$ 常数可解出任一点 D 的坐标。

所以刚体的最大自由度是 6 。

另法 1

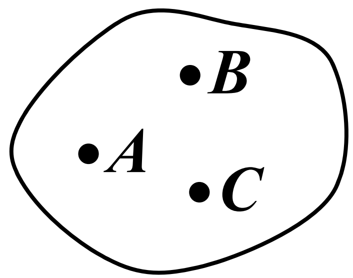
自由刚体的自由度最大，等于6 。

解释：3 点可固定（完全约束）刚体：

A 点固定，$\overline{BC}$ 可绕 A 转动

B 点固定，C 点可绕 $\overline{AB}$ 转动

C 点固定，则刚体固定



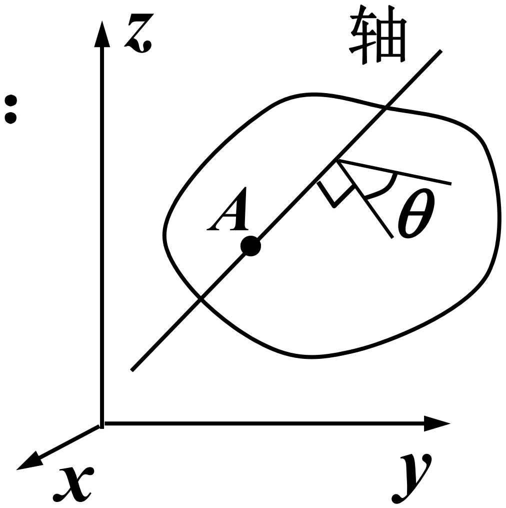
3 个点总坐标数是 9，但 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 距离不变，这 3 个条件使独立坐标数减少 3 个。

所以刚体最大自由度是 6 。

另法 2

- 先在刚体上任选一点 A 确定其位置：
  需要 3 个坐标 A_x、A_y、A_z。

再确定刚体相对 A 点的空间取向，
则刚体的空间位置就确定，为此：



- 过点 A 任选一轴确定其取向：
  由余弦定理，只需知道该轴和 x、y、z 轴的 3 个夹角 α、β、γ 中的 2 个即可。

- 再确定刚体绕该轴的转角 θ。

共需 3 个坐标和 3 个角度，刚体最大自由度是 6。

三. 刚体的运动形式

Chasles定理

刚体一般的位移可以分解为随刚体上任选基点的平动位移和绕通过基点的某个轴的转动。选择不同的基点时，平动位移不同，而转动轴的方向和转角不依赖于基点选择。

欧拉定理

定点运动刚体的任何一个位移都可以通过绕着过此定点的某个轴旋转一个角度达到。

1. 平动 — 基本运动形式

体内任两点连线在任意时刻保持平行。

常用质心运动代表整体平动。

2. 转动 — 基本运动形式

定点转动：刚体只有一点固定不动，整体绕通过该点的瞬时轴转动。

定轴转动：定点转动的瞬时轴成固定轴

3. 平面平行运动：刚体的各点运动都平行于某固定平面，各点轨道平面平行或重合。

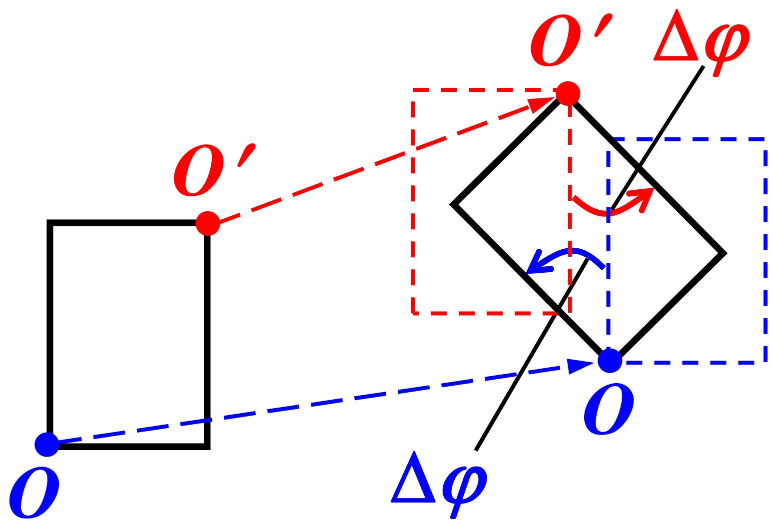
4. 一般运动：不受任何限制的自由运动

是下面两种运动的组合：

随任选的基点的平动 ＋ 绕基点的定点转动

基点不同，平动可不同，但转动必相同。

转动与基点选择无关



自由运动的刚体的 6 个自由度的分配：

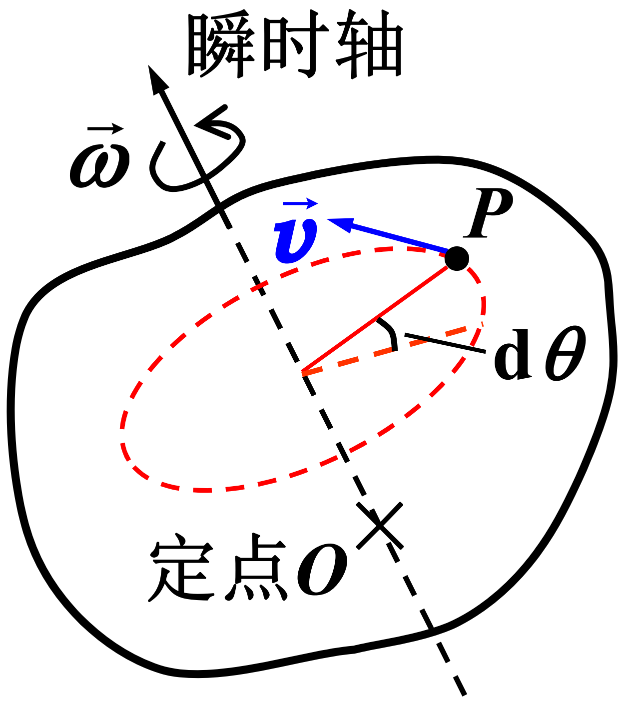
$$\boxed{\text{基点平动 } 3 + \text{绕基点转动 } 3}$$

运动学中基点可任选。

动力学中常选质心为基点，其优点是可极大地简化动力学量和动力学方程：质心运动方程中只涉及质心坐标项；绕质心的定点转动方程中只涉及转动坐标（转动角）项，平动、转动分开处理，两套方程互不牵扯。

四. 定点转动及其运动学量

1. 角速度 $\vec{\omega}$



反映瞬时轴方向

及刚体转动快慢

$$|\vec{\omega}| = \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$\vec{\omega}$的方向沿瞬时轴

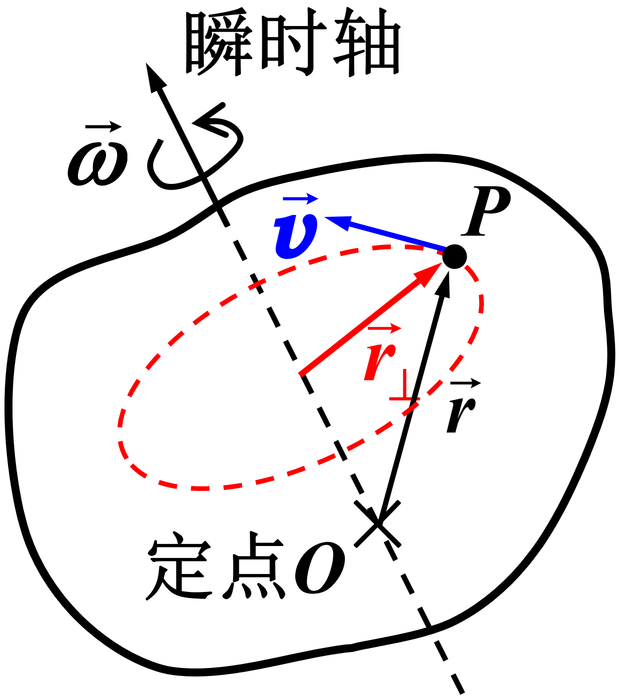
2. 角加速度 $\vec{\alpha}$：

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

反映 $\vec{\omega}$ 的变化情况

方向不一定与 $\vec{\omega}$ 一致

3. 角量和线量关系



$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}_\perp=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

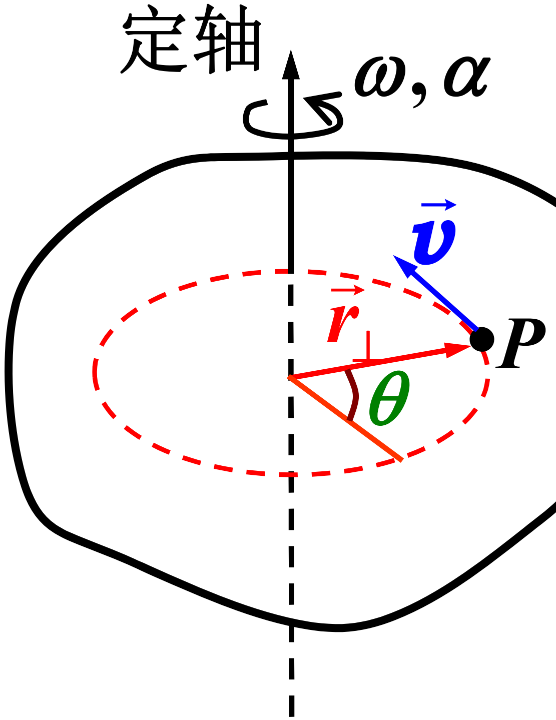
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$=\underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{r}}_{\text{旋转加速度}}+\underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{向轴加速度}}$$

五. 定轴转动

$\vec{\omega}$ 和 $\vec{\alpha}$ 退化为沿定轴代数量



$$\boxed{v = r_{\perp}\omega}$$

$$\boxed{a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r_{\perp}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r_{\perp}\alpha}$$

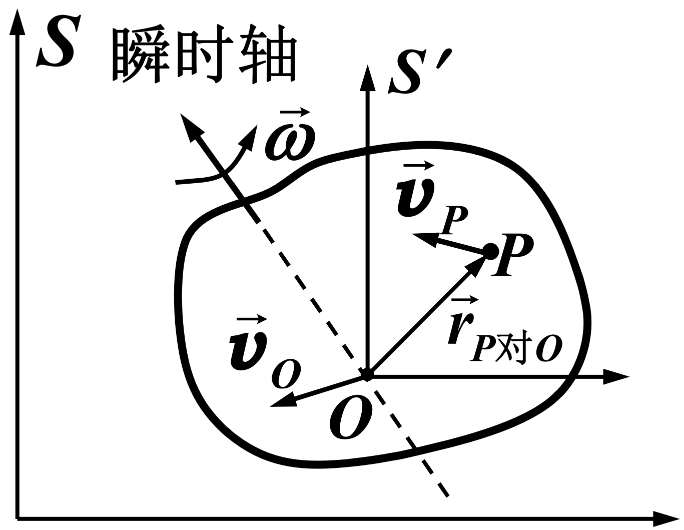
$$\boxed{a_n = r_{\perp}\omega^2}$$

匀加速转动（α恒定）

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ (\theta - \theta_0) = \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} \end{cases}$$

*六. 刚体的一般运动

设刚体在静止系 S 中作一般运动。刚体上点 P、基点 O 的速度分别是 $\vec{v}_P$ 和 $\vec{v}_O$，角速度是 $\vec{\omega}$。



设想一平动系 S'，其参考物的运动由基点 O 代表。则在 S' 系，刚体绕 O 作定点转动，角速度仍是 $\vec{\omega}$。

由伽利略变换可得广义上的角量和线量关系：

$$\boxed{\vec{v}_P=\vec{v}_O+\vec{\omega}\times\vec{r}_{P对O}}$$

$$\boxed{\vec{a}_P=\vec{a}_O+\vec{\alpha}\times\vec{r}_{P对O}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{P对O})}$$

【证明】刚体角速度和基点无关

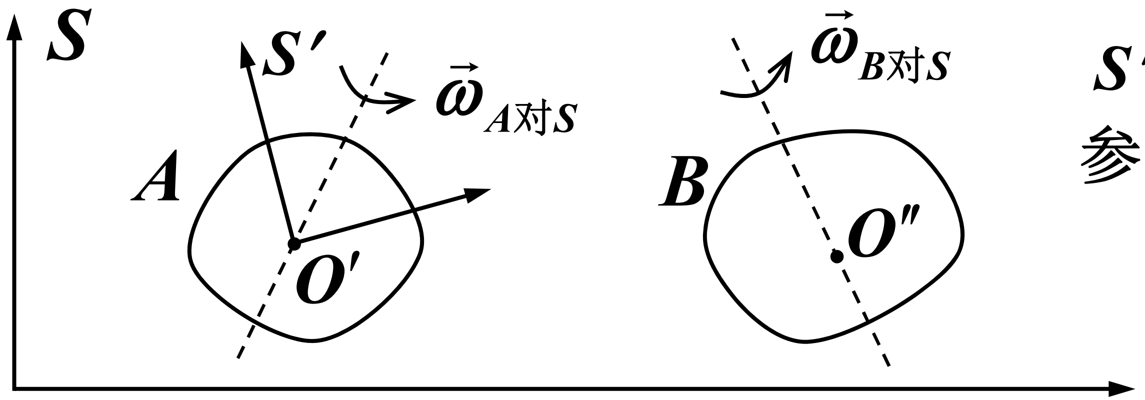
设刚体上 P 点的速度是 $\vec{v}_P$。任选 2 基点 O、O'，速度是 $\vec{v}_O$ 和 $\vec{v}_{O'}$，对应角速度是 $\vec{\omega}_O$ 和 $\vec{\omega}_{O'}$。

$$\left.\begin{aligned}
\vec{v}_P &= \vec{v}_O + \vec{\omega}_O \times \vec{r}_{P对O} \\
\vec{v}_P &= \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times \vec{r}_{P对O'} \\
\vec{v}_O &= \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_{O'} \times \vec{r}_{O对O'} \\
\vec{r}_{P对O'} - \vec{r}_{O对O'} &= \vec{r}_{P对O}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow (\vec{\omega}_{O'} - \vec{\omega}_O) \times \vec{r}_{P对O} = 0$$

由 O、O' 的任意性可得： $\vec{\omega}_{O'} = \vec{\omega}_O$

$\Rightarrow$ 刚体角速度和基点无关。

【证明】刚体间的相对角速度关系

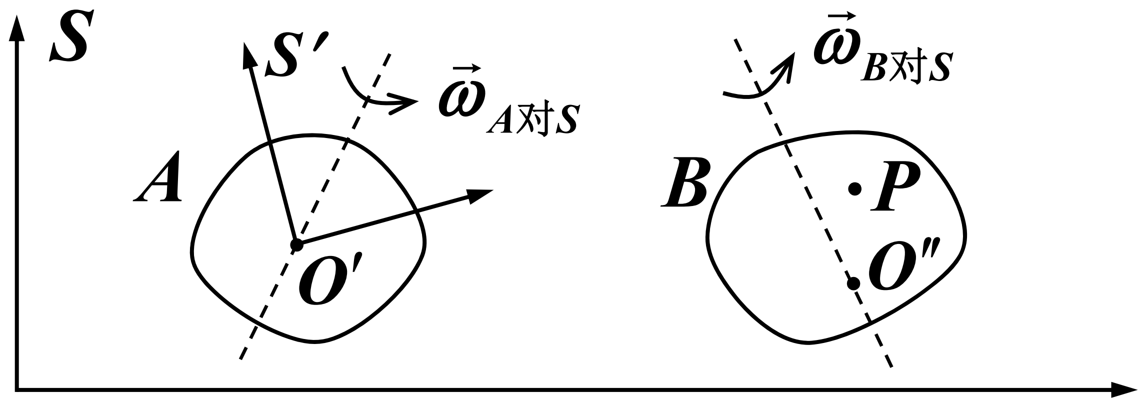


S'系：以 A 为参考物的转动系

设刚体 A、B 在静止系 S 中分别以角速度 $\vec{\omega}_{A对S}$ 、$\vec{\omega}_{B对S}$ 绕定点 O'、O'' 作定点转动，则物体 B 相对物体 A 或相对转动系 S' 的角速度为：

$$\boxed{\vec{\omega}_{B对A} = \vec{\omega}_{B对S} + \vec{\omega}_{S对A} = \vec{\omega}_{B对S} - \vec{\omega}_{A对S}}$$

$$\boxed{\vec{\omega}_{B对S'} = \vec{\omega}_{B对S} + \vec{\omega}_{S对S'} = \vec{\omega}_{B对S} - \vec{\omega}_{S'对S}}$$



证明：对刚体 B 上任一点 P：

广义上的角量和线量关系：

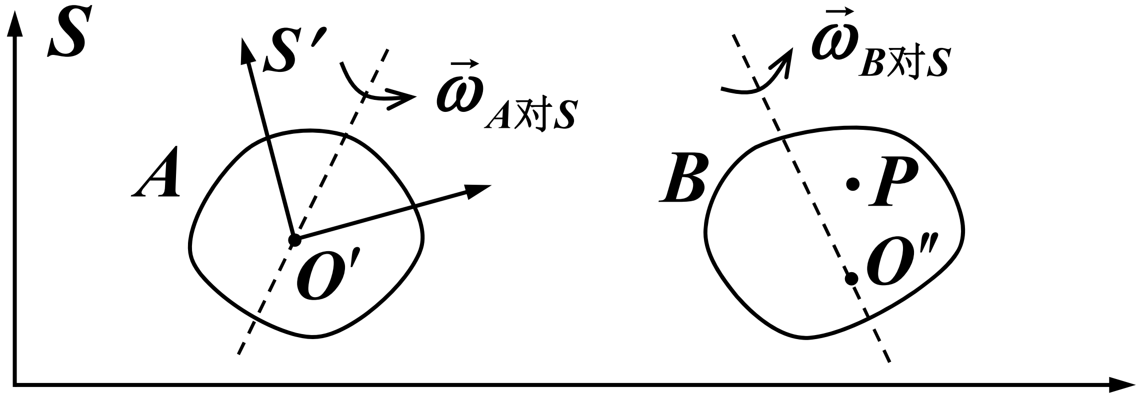
S 系：$\vec{v}_{P对S}=\vec{v}_{O''对S}+\vec{\omega}_{B对S}\times\vec{r}_{P对O''}$ (1)

S' 系：$\vec{v}_{P对S'}=\vec{v}_{O''对S'}+\vec{\omega}_{B对S'}\times\vec{r}_{P对O''}$ (2)

转动参考系的速度变换关系：

$$\vec{v}_{O''对S}=\vec{v}_{O''对S'}+\vec{\omega}_{A对S}\times\vec{r}_{O''对O'} \quad (3)$$

$$\vec{v}_{P对S}=\vec{v}_{P对S'}+\vec{\omega}_{A对S}\times\vec{r}_{P对O'} \quad (4)$$



$$\Rightarrow\ (\vec{\omega}_{A对S}-\vec{\omega}_{B对S}+\vec{\omega}_{B对S'})\times\vec{r}_{P对O''}=0$$

由于 P 点是任选的，所以：

$$\vec{\omega}_{B对S'}=\vec{\omega}_{B对S}-\vec{\omega}_{A对S}$$

$$\vec{\omega}_{B对A}=\vec{\omega}_{B对S}-\vec{\omega}_{A对S}$$

§6.2 刚体力系的简化和静平衡

一. 刚体力系的简化

作用在刚体上的力是滑移矢量。

1. 共点力系

共点力系中各力的作用线相交于一点，所以存在合力。

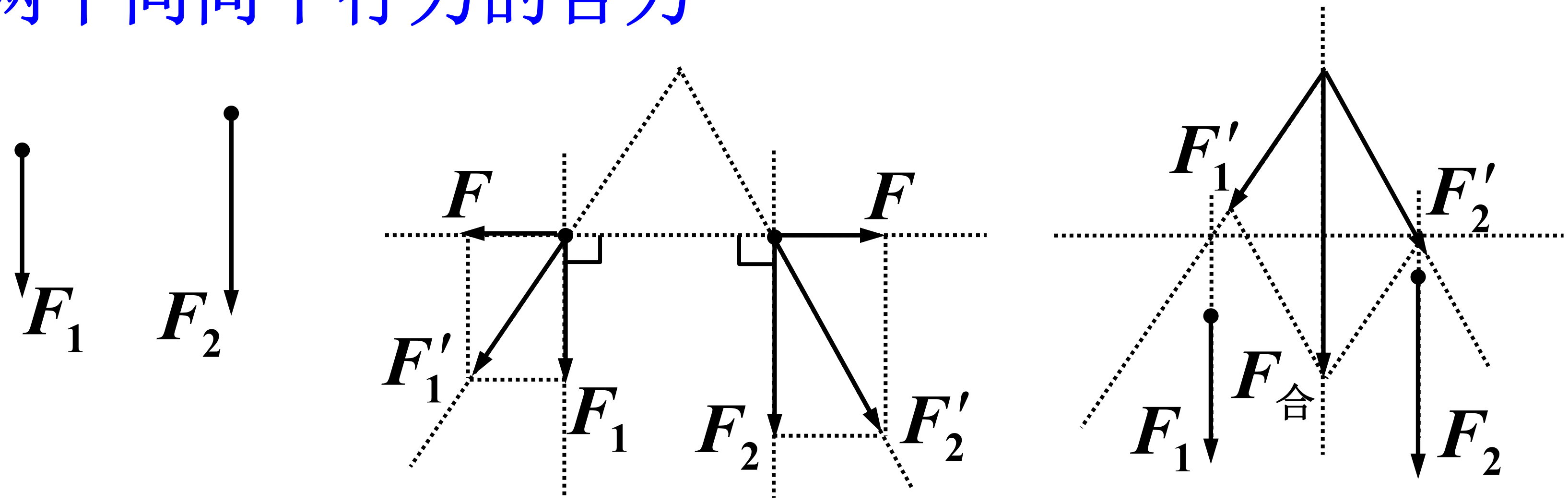
2. 平行力系

平行力系中各力的作用线彼此平行。

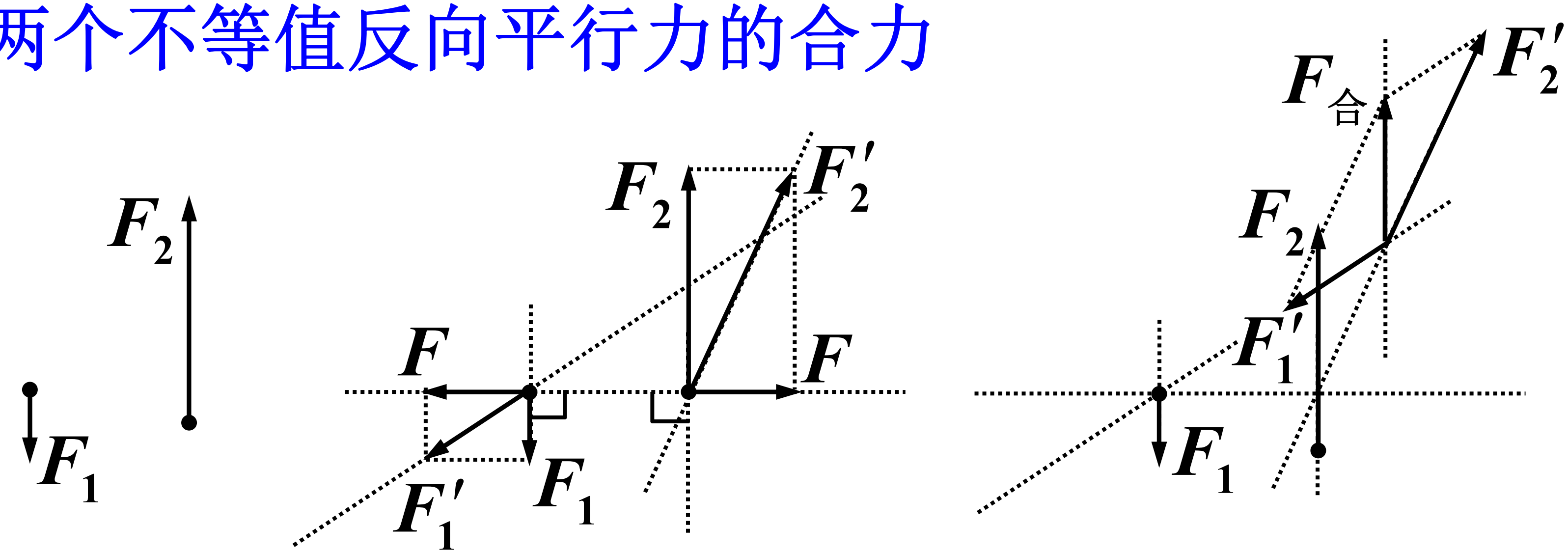
两个平行力如果不是力偶，则存在合力。

力偶不存在合力。

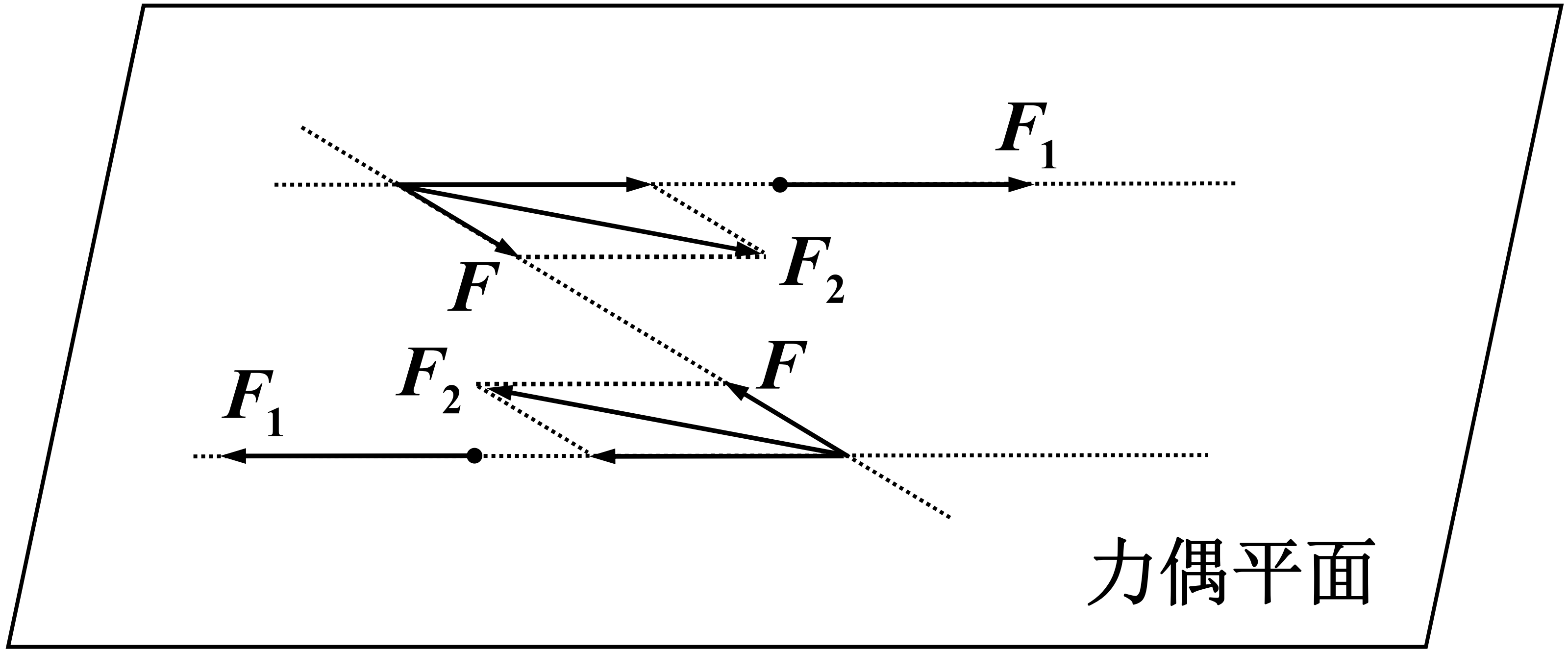
两个同向平行力的合力



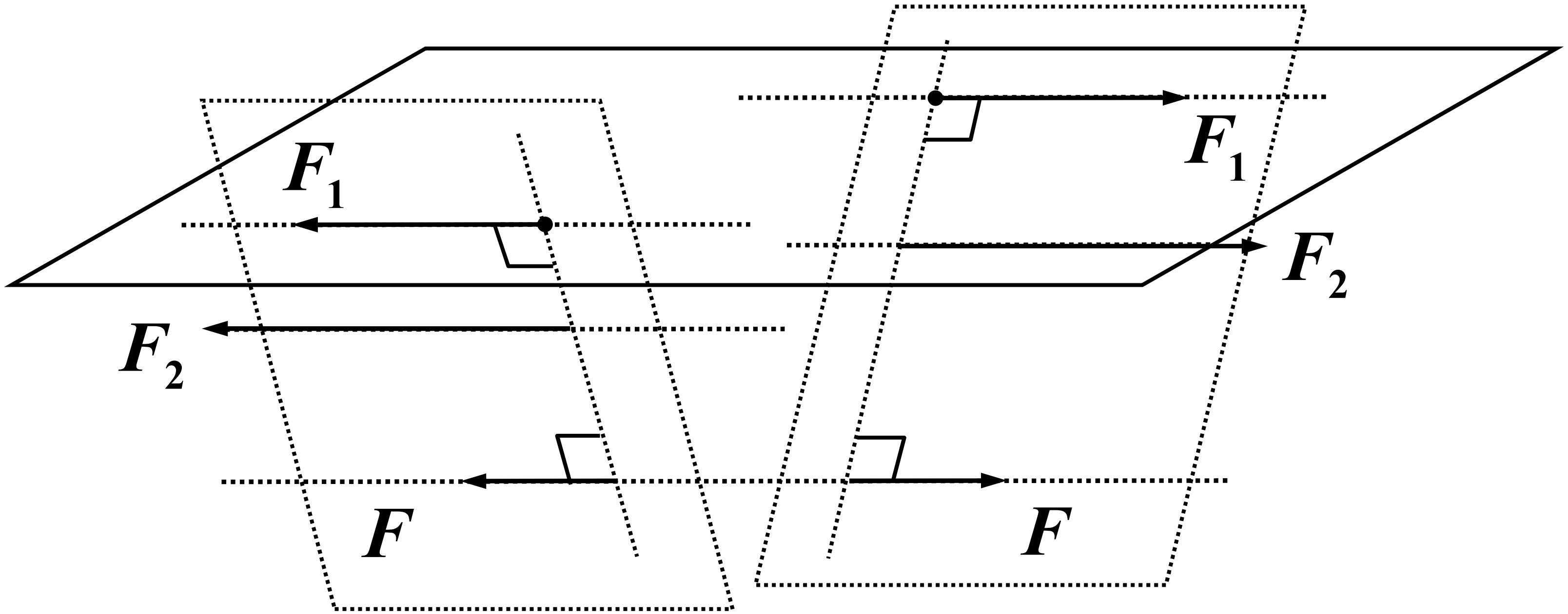
两个不等值反向平行力的合力



3. 力偶矩



两个 F_1 是真实力偶。在力偶平面上任选两个在同一作用线上的等值反向力 F，求合力，变成由两个合力 F_2 构成的在同平面的新力偶，和原力偶等价。



两个 F_1 是真实力偶。任选两个在同一作用线上的等值反向力 F，和 F_1 平行，但不在原力偶平面。求合力，变成由两个合力 F_2 构成的平行于原力偶平面的新力偶，和原力偶等价。

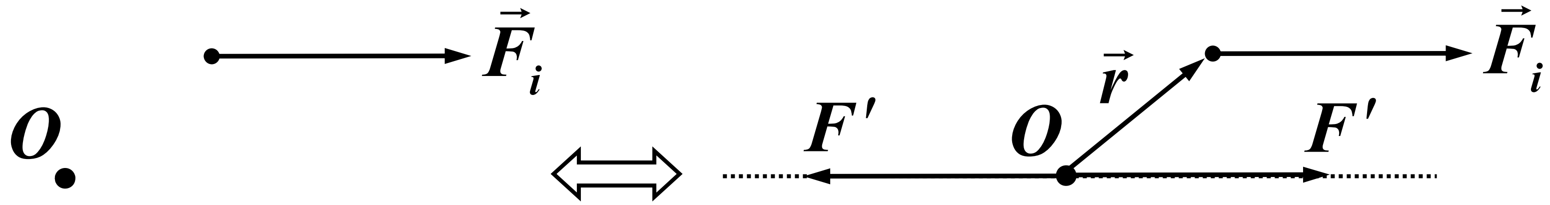
根据上面的讨论可知：

力偶矩特性只决定于力偶矩这个矢量：两个力偶矩的矢量相等，则两个力偶矩等价，和产生它们的力偶无关。

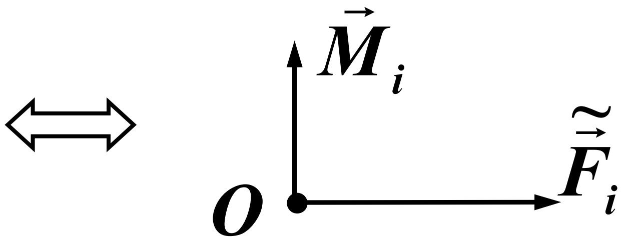
进一步可证明：两个不同的力偶矩，求矢量和之后，新矢量对应一个力偶矩，和原来的两个力偶矩等价。

4. 力系简化

刚体上可任选一点 O 作为力系的约化中心。



$$\left|\vec{F}'\right| = \left|\vec{F}_i\right|$$



$$\vec{M}_i = \vec{r} \times \vec{F}_i$$

$\tilde{\vec{F}}_i$是把$\vec{F}_i$平移到O点的矢量

力 F_i 可等价成：F_i 平移到约化中心，附加一力偶矩（等于 F_i 对约化中心的力矩）。

作用在刚体上的力系简化为：

- 各 $\vec{F}_i$ 平移到约化中心，合成成主矢：

$$\vec{S}=\sum_i \vec{F}_i$$

- 各附加力偶矩 $\vec{M}_i$ 合成成主矩：

$$\vec{M}=\sum_i \vec{M}_i$$

注意：各约化中心的主矢相同，但主矩不一定不同。

可证明：如果 $\vec{S}\cdot\vec{M}=0$，则原力系存在合力，即能找到约化中心使得 $\vec{M}=0$ 。

主矢决定刚体的质心运动，主矩决定刚体绕约化中心的定点转动。

二. 刚体的静平衡条件

静平衡时质心静止，故对任一点的主矢为零：

$$\vec{S} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

静平衡时刚体不转动，按质点系观点可知，刚体对任意轴的角速度、角动量为零，所以根据角动量定理，对任一点的主矩为零：

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = 0$$

§ 6.3 刚体的定轴转动定律

把刚体当作质点系：

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \Delta m_i v_i r_{i\perp}$$

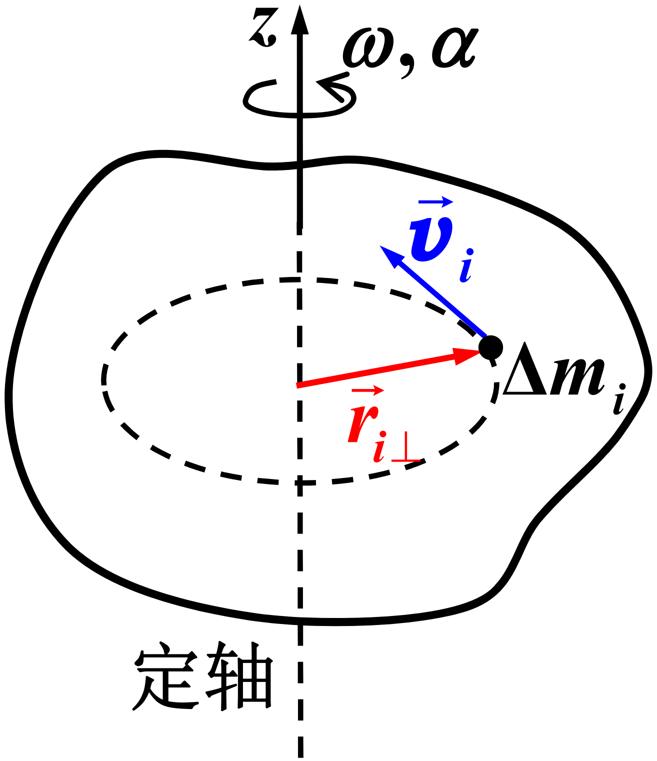
$$= (\sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2) \cdot \omega$$

定义对定轴的转动惯量：

$$\boxed{J_z = \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2}$$

$$\boxed{L_z = J_z \cdot \omega}$$

只决定于刚体对轴的质量分布



$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_z \alpha$$

略去下标 z：

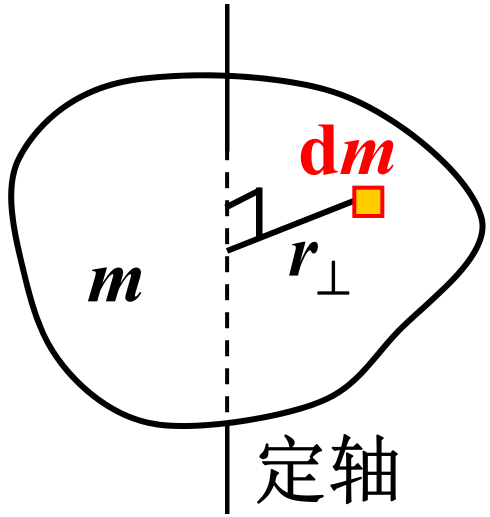
$\boxed{M = J\alpha}$ —刚体定轴转动定律

与牛II定律相比： $M \sim F$， $J \sim m$， $\alpha \sim a$

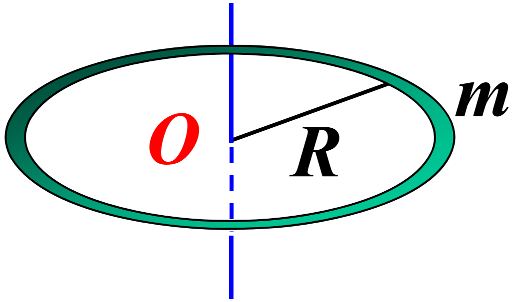
§ 6.4 转动惯量的计算

质点系 $J = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

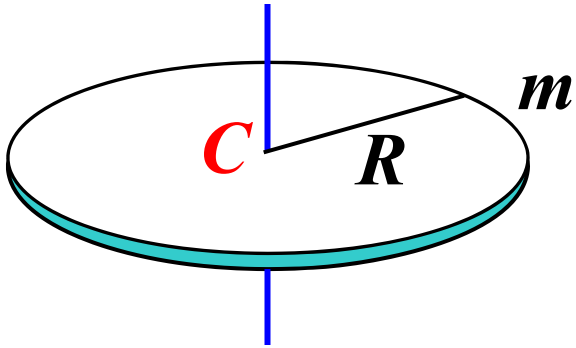
连续体 $J = \int_m r_\perp^2 \cdot \mathrm{d}\, m$



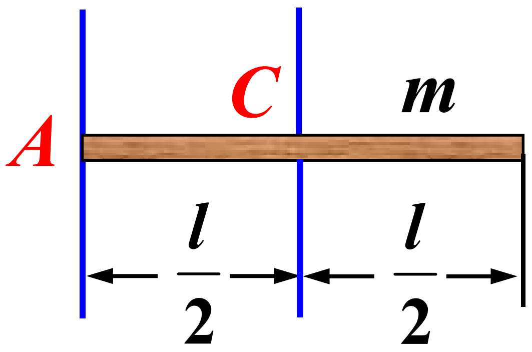
一. 常用的几种转动惯量表示式



细圆环： $\boxed{J_O = mR^2}$



均匀圆盘：
$$\boxed{J_C=\frac{1}{2}mR^2}$$



均匀细杆：
$$\boxed{J_C=\frac{1}{12}ml^2}\qquad\boxed{J_A=\frac{1}{3}ml^2}$$

二. 计算转动惯量的几条规律

1. 对同一轴 J 具有可叠加性

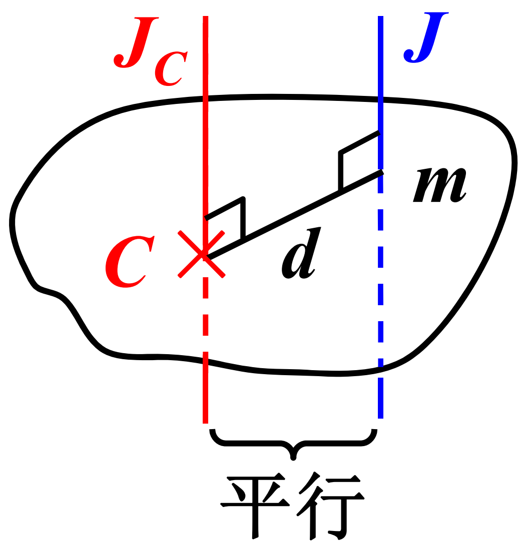
$$\boxed{J=\sum J_i}$$

2. 平行轴定理

$$\boxed{J = J_C + md^2}$$

（证明见书）

$$\therefore \quad J_C = J_{\min}$$

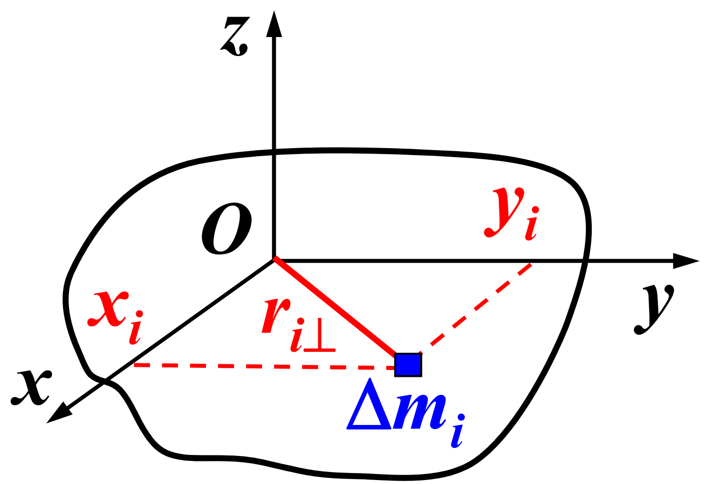


3. 对薄平板的正交轴定理

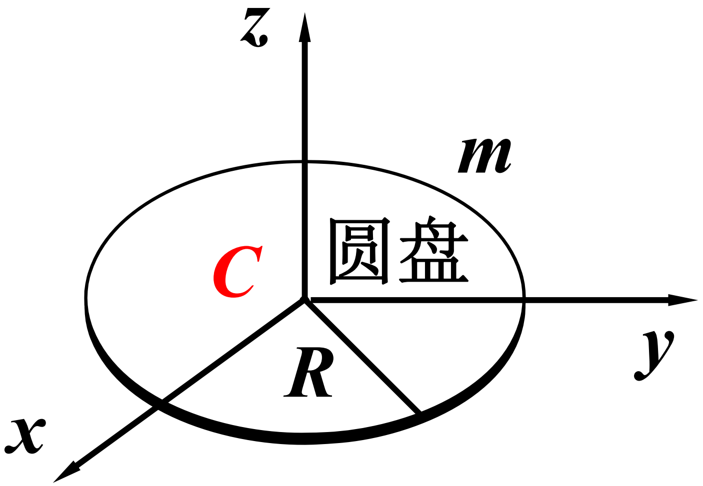
$$J_z = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$$

$$= \sum \Delta m_i x_i^2 + \sum \Delta m_i y_i^2$$

$$\boxed{J_z = J_x + J_y}$$



【例】求对薄圆盘的一条直径的转动惯量。

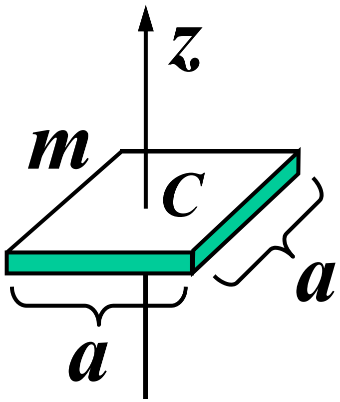


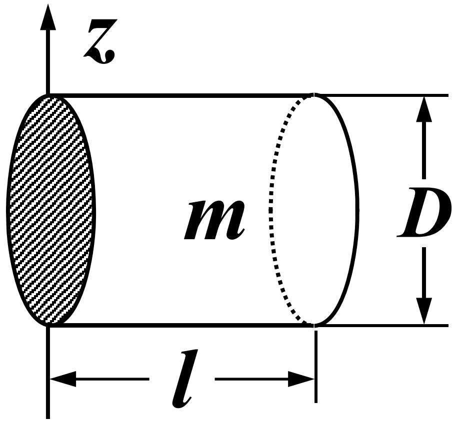
已知圆盘 $J_z = \frac{1}{2}mR^2$

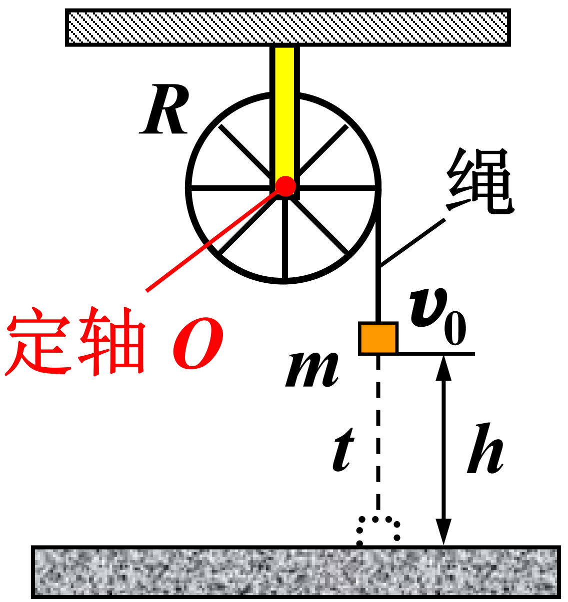
解： $J_x + J_y = J_z = \frac{1}{2}mR^2$

$\therefore \ J_x = J_y = \frac{1}{4}mR^2$

【思考】下图中的 J_z 如何求？







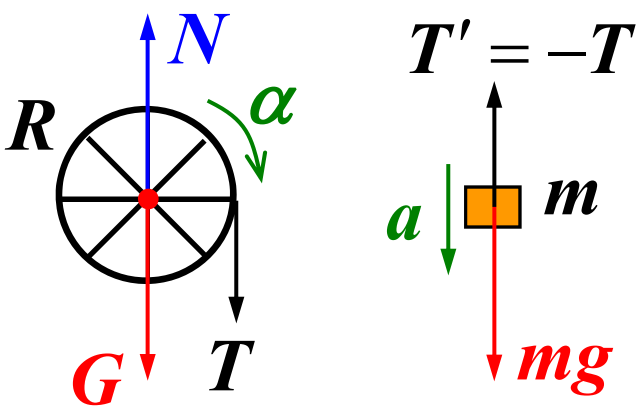
【例】已知 R，m，h，$v_0=0$，下落时间 t，绳轮之间无相对滑动，绳不可伸长。

求：轮对 O 轴的 J

解：动力学关系：

对轮：$T\cdot R = J\cdot\alpha$ (1)

对 m：$mg - T = ma$ (2)



运动学关系：$a = \alpha\cdot R$ (3)

$$h=\frac{1}{2}at^2 \quad (4)$$

(1)－(4) 联立解得：$J=(\frac{gt^2}{2h}-1)mR^2$

分析结果：

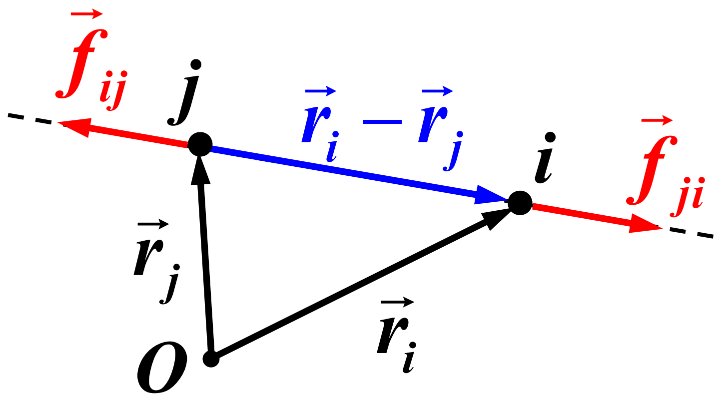
- 量纲对；
- h、m 一定，$J\uparrow \rightarrow t\uparrow$，合理；
- 若 $J=0$，得 $h=\frac{1}{2}gt^2$，正确。

§ 6.5 定轴转动中的功能关系

一. 刚体的内力不作功

证明：假设刚体内任意两个质元之间的作用力沿两质元连线方向：

两质元间内力的元功：



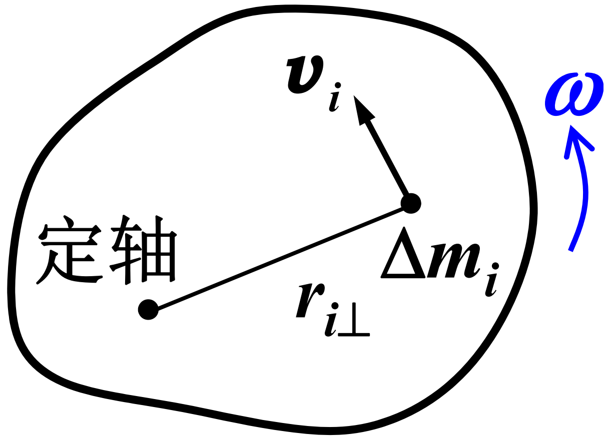
$$\vec{f}_{ji}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_i + \vec{f}_{ij}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_j$$

$$= \vec{f}_{ji}\cdot(\mathrm{d}\vec{r}_i - \mathrm{d}\vec{r}_j)$$

$$= \vec{f}_{ji}\cdot \mathrm{d}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0$$ $\Rightarrow$ 刚体内力不作功

二. 定轴转动动能定理

定轴转动时的动能：



$$E_k = \sum \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2$$

$$= \sum \frac{1}{2} \Delta m_i (\omega \cdot r_{i\perp})^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum \Delta m_i \cdot r_{i\perp}^2\right) \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

定义定轴转动动能 $\boxed{E_k^{\text{转动}} = \frac{1}{2} J \omega^2}$

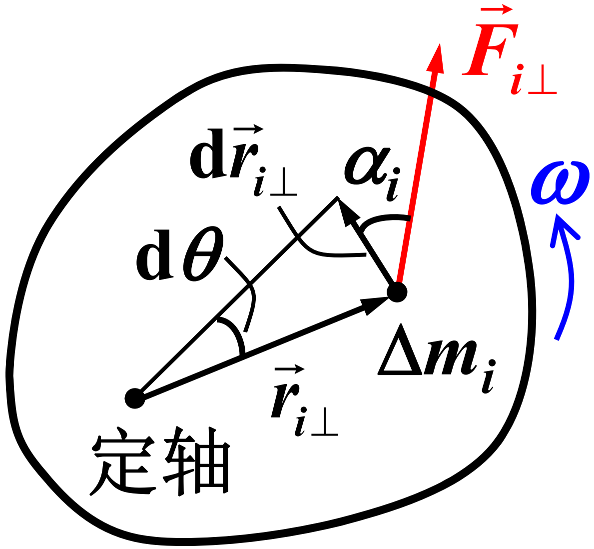
定轴转动时外力作的功：

$$\mathrm{d}W = \sum \vec{F}_{i\perp} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{i\perp}$$

$$= \sum F_{i\perp} \left| \mathrm{d}\vec{r}_{i\perp} \right| \cos\alpha_i$$

$$= \sum (F_{i\perp} \cos\alpha_i \cdot r_{i\perp}) \mathrm{d}\theta$$

$$= \sum M_i \mathrm{d}\theta = M \mathrm{d}\theta$$



定义定轴转动时力矩的功：

$$\boxed{W_{力矩} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot \mathrm{d}\theta}$$

$$\boxed{\mathrm{d}W_{力矩} = M \cdot \mathrm{d}\theta}$$

根据质点系动能定理，考虑内力不作功得：

$$\boxed{W_{\text{力矩}}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}=\Delta E_k^{\text{转动}}=\Delta(\frac{1}{2}J\omega^2)}$$

——刚体定轴转动动能定理

上式也可由定轴转动定律证明：

$$W_{\text{力矩}}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\,\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2}J\omega\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_{\omega_1}^{\omega_2}\mathrm{d}(\frac{1}{2}J\omega^2)=\Delta(\frac{1}{2}J\omega^2)$$

三. 外力是保守力的情况

刚体所受外力如果有保守力，其力矩的功可以用相应的势能计算：

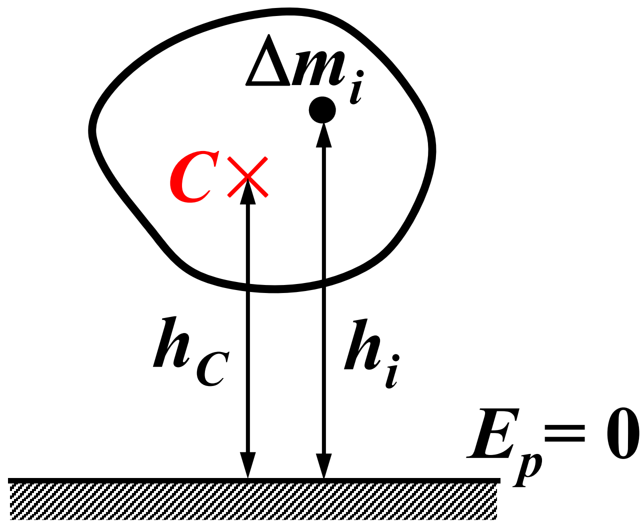
$$\boxed{W_{\text{保守力矩}} = -\Delta E_p}$$

刚体的重力势能

$$E_p = \sum \Delta m_i g h_i$$

$$= mg \frac{\sum \Delta m_i h_i}{m}$$

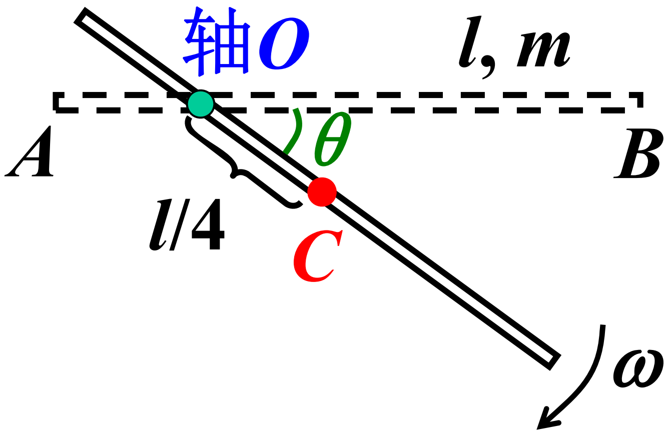
$$= mgh_C$$



四. 应用举例

对于包括刚体的系统，功能原理和机械能守恒定律仍成立。

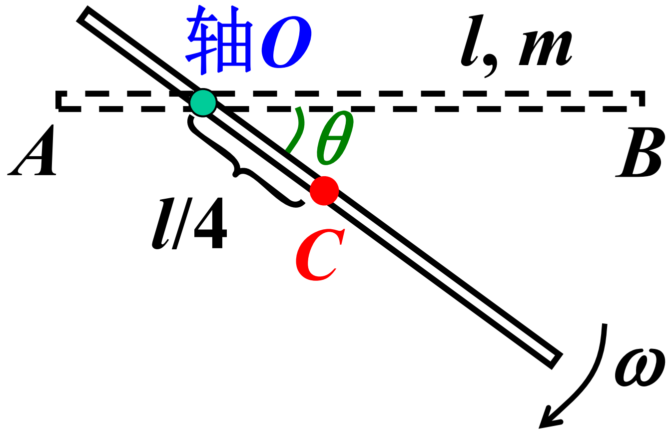
【例】均匀直杆质量为 m，长为 l，初始水平静止。轴光滑，$\overline{AO} = l/4$ 。



求：杆下摆到 θ 角时的角速度 ω 和轴对杆的作用力 $\vec{N}$。

解：杆+地球系统

只重力作功，E 守恒：



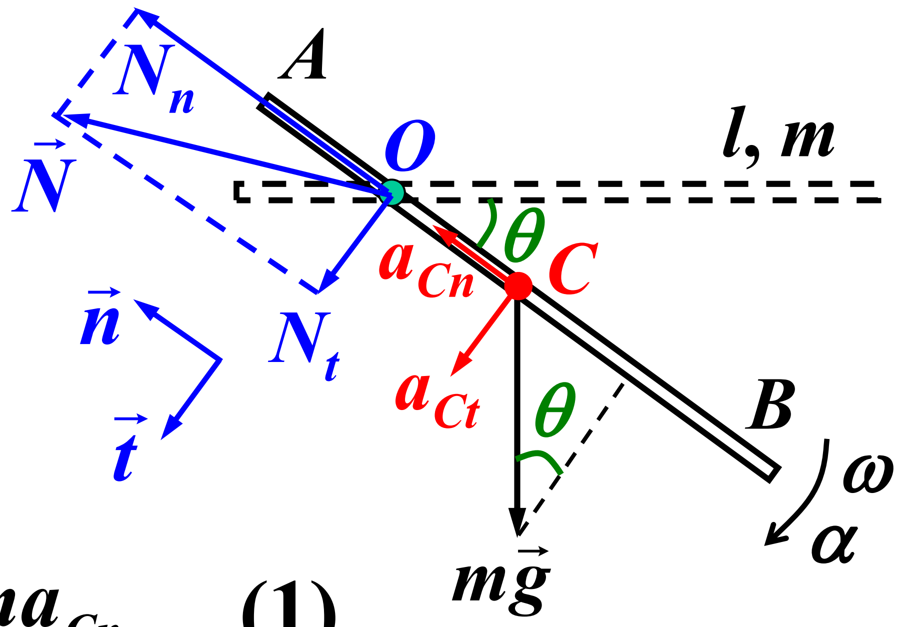
$$\frac{1}{2}J_O\omega^2 - mg\frac{l}{4}\sin\theta = 0$$

$$J_O = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}ml^2$$

$$\omega = 2\sqrt{\frac{6g\sin\theta}{7l}}$$

应用质心运动定理

求轴力：



$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_C$$

$$\vec{n}: \quad -mg\sin\theta + N_n = ma_{Cn} \qquad (1)$$

$$\vec{t}: \quad mg\cos\theta + N_t = ma_{Ct} \qquad (2)$$

$$a_{Cn} = \frac{l}{4}\omega^2 = \frac{6}{7}g\sin\theta \qquad (3)$$

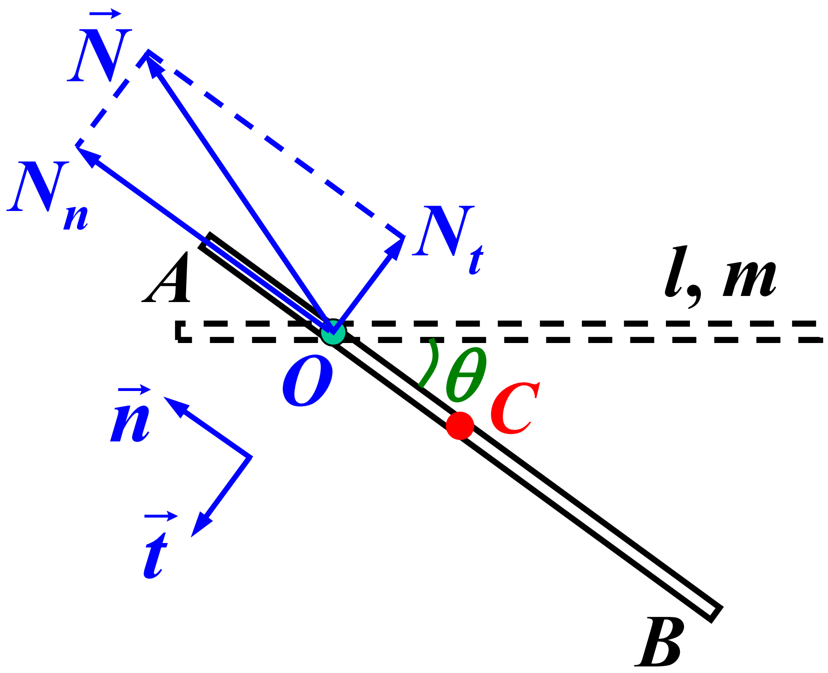
$$a_{Ct} = \frac{l}{4}\alpha \qquad (4)$$

$$J_O\alpha = \frac{l}{4}mg\cos\theta \qquad (5)$$

由(1) — (5)解得:

$$N_n = \frac{13}{7}mg\sin\theta$$

$$N_t = -\frac{4}{7}mg\cos\theta$$



§ 6.6 刚体定轴转动的角动量定理

刚体定轴转动的角动量定理

$$L_z = J_z\omega$$

$$\boxed{M_{外z} = \frac{J_z \mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}} \qquad \boxed{M_{外z}\,\mathrm{d}t = J_z \mathrm{d}\omega}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\,\mathrm{d}t = J_z\omega_2 - J_z\omega_1}$$

刚体定轴转动的角动量守恒定律

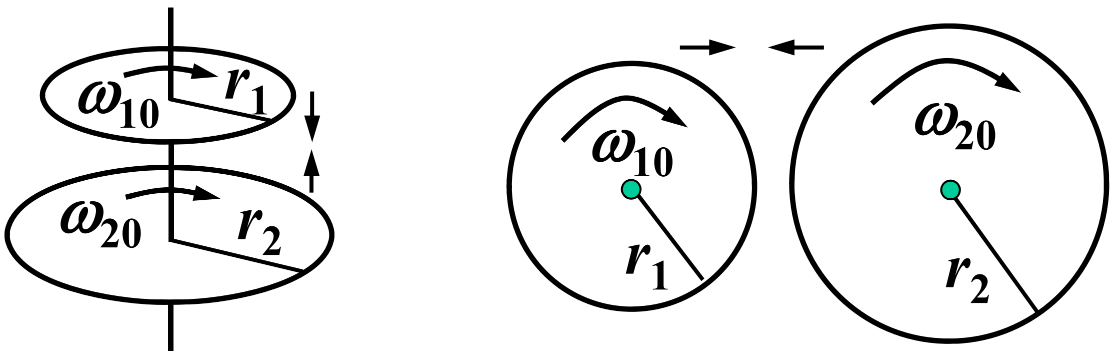
$$\boxed{M_{外z} = 0,\quad L_z = J_z\omega = 常量}$$

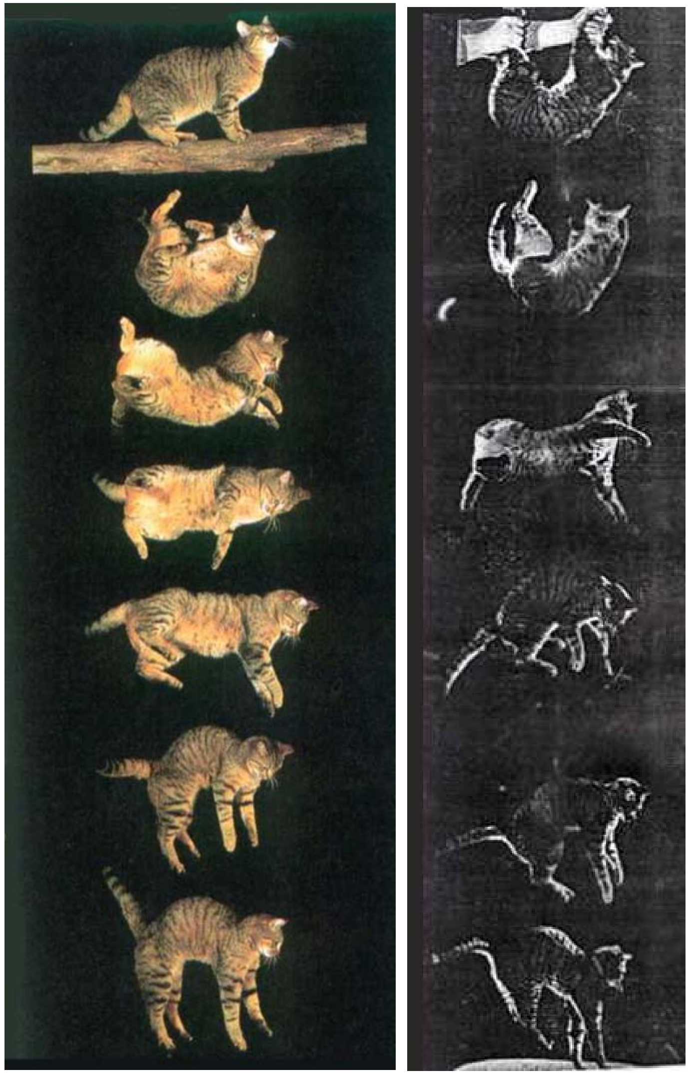
刚体系对同一定轴转动的角动量守恒定律

$$\boxed{\sum M_{i外z}=0,\ \sum J_{iz}\omega_i=常量}$$

角动量可在各刚体之间传递，但刚体系对同一定轴的总角动量不变。

【思考】两个轮子都绕轴转动，接触后运动状态变化？对轴的角动量守恒否？





猫从树枝和手的下落

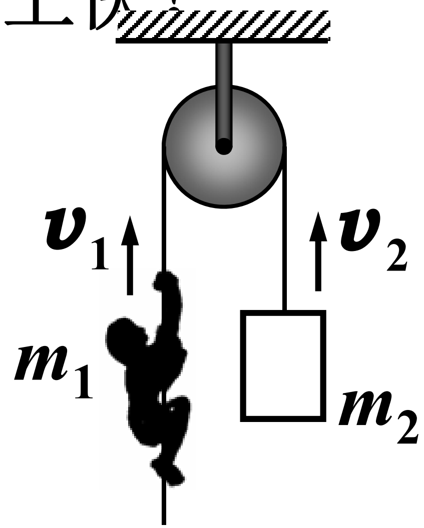
防止直升机机身反转

左图：尾浆推动大气产生力矩阻止机身反转

右图：双翼反向转动产生的力矩相互抵消

【演示】茹科夫斯基转椅

【例】人和物同重，$m_1 = m_2$，人从轻绳一端静止上爬。设轮半径为 R，忽略滑轮质量和摩擦，人和物哪个向上快？

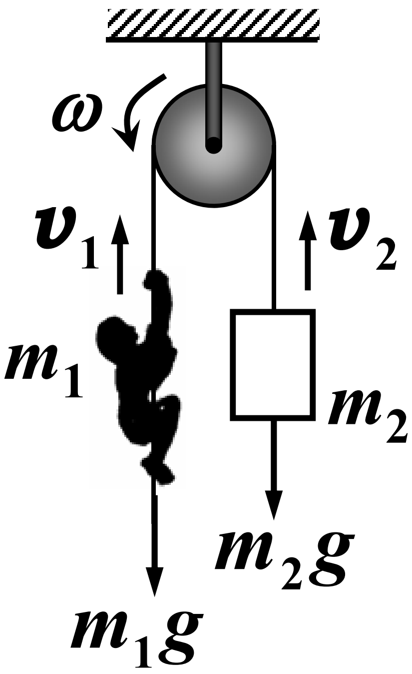


人＋物＋绳对轴角动量守恒：

$$m_1 R v_1 - m_2 R v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 \quad \text{一样快！}$$

用动量守恒也得到同样结果，只是巧合！

【思考】若滑轮质量不能忽略情况如何？



系统：人＋物＋轮＋绳

对轴：$M_{外} = m_2 gR - m_1 gR = 0$

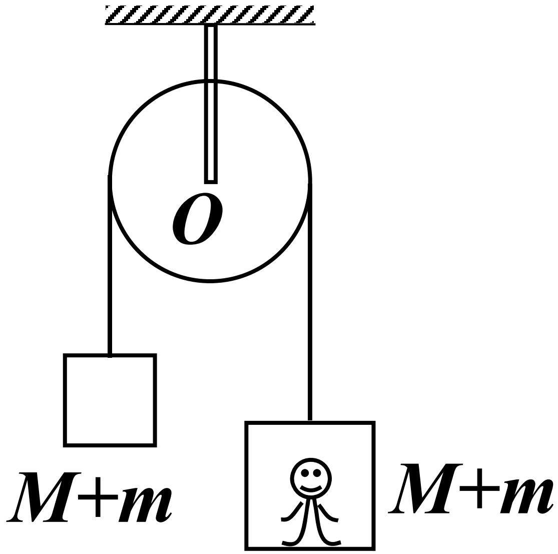
系统对轴角动量守恒：

$$m_1 v_1 R - m_2 v_2 R - J_{轮}\omega = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1 v_1 R - m_2 v_2 R > 0$$

$$\Rightarrow \quad v_1 > v_2$$

【例】轻绳跨过光滑定滑轮，一端系质量 M 的升降亭，亭中人的质量为 m，绳的另一端系重物达平衡。设人在地面上跳时所能达到的最大高度为 h，若人在升降亭中消耗同样的能量上跳，试问最大高度是多少？忽略滑轮质量。



解：对升降亭+滑轮+人+平衡重物系统，外力对滑轮中心 O 点力矩为零，角动量守恒。

设人上跳速度为$\boldsymbol{v}$，升降亭向下速度为V，有：

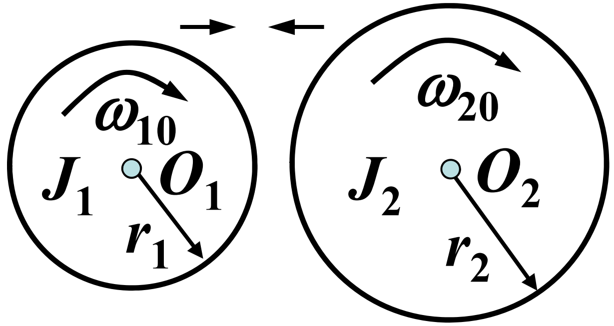
$$mvr=(2M+m)rV \quad （r\text{为滑轮半径}）$$

$$mgh=\frac{1}{2}mv^{2}+\frac{1}{2}(2M+m)V^{2}$$

解得人在升降亭中上跳的最大高度为：

$$h_{\max}=\frac{v^{2}}{2g}=\frac{2M+m}{2(M+m)}h$$

【例】两轮绕轴转动接触问题



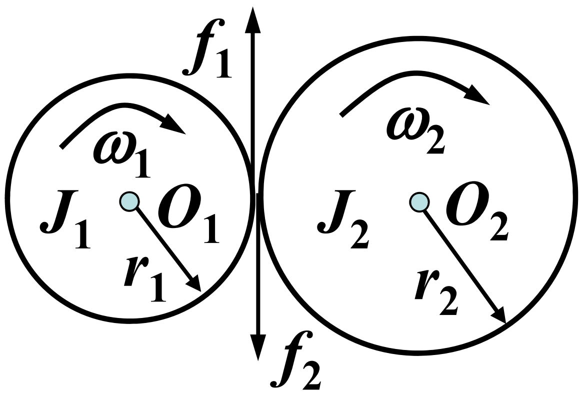
已知：初始参量（J_1, ω_{10}, r_1）

和（J_2, ω_{20}, r_2），

求：接触达稳定后的 ω'_1和ω'_2

解：此系统角动量并不守恒，因为 O_1 和 O_2 处的轴力产生的力矩和不为零。

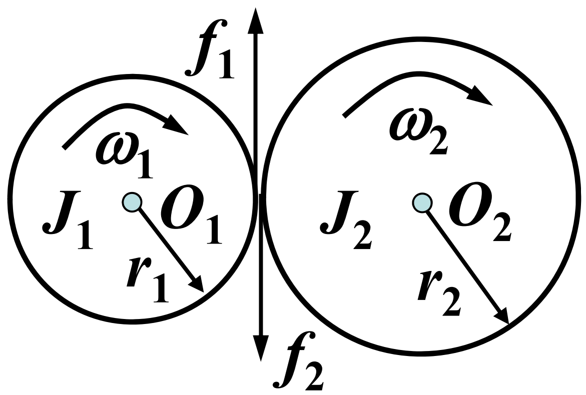
对每个轮作隔离分析，用角动量定理求解。



设摩擦力方向如图示，有：

对轮1： $-f_1 r_1 \mathrm{d}t = J_1 \mathrm{d}\omega_1$

对轮2： $-f_2 r_2 \mathrm{d}t = J_2 \mathrm{d}\omega_2$



利用 $f_1 = f_2$ 得：

$$\frac{J_1 \mathrm{d}\omega_1}{r_1} = \frac{J_2 \mathrm{d}\omega_2}{r_2}$$

对初末态积分得：

$$\frac{J_1(\omega_1' - \omega_{10})}{r_1} = \frac{J_2(\omega_2' - \omega_{20})}{r_2}$$

稳定条件：　接触点线速度相同：

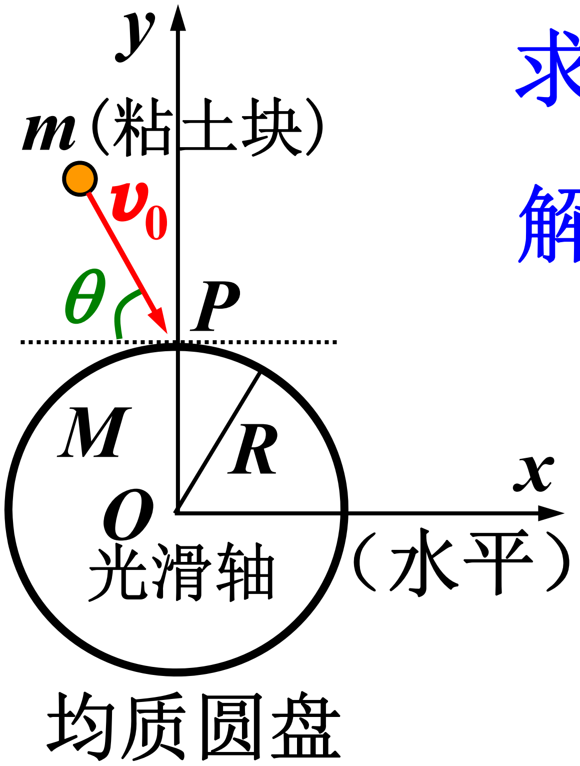
$$\omega_1' r_1 = -\omega_2' r_2$$ （注意负号，两轮反着转）

解得：

$$\omega_1' = r_2(J_1 r_2 \omega_{10} - J_2 r_1 \omega_{20}) \big/ (J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2)$$

$$\omega_2' = -r_1(J_1 r_2 \omega_{10} - J_2 r_1 \omega_{20}) \big/ (J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2)$$

【例】粘土块斜射到匀质圆盘顶点 P 后与圆盘粘合，已知：v_0，R，$M=2m$，$\theta=60°$。

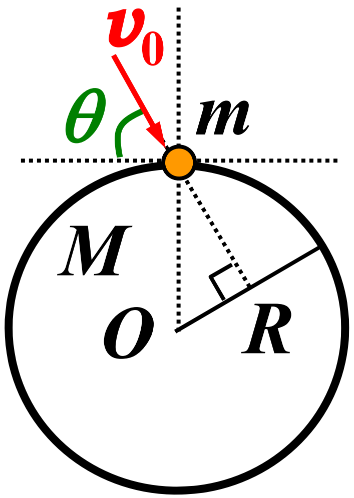


求：P 点转到 x 轴时盘的 ω, α

解：过程分 2 步：

碰撞过程：

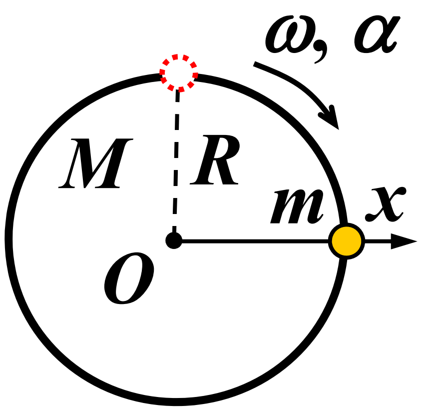
对 $m+M$ 系统，碰撞瞬间，外力（重力和轴力）对 O 轴的力矩 $=0$，$\vec{L}$ 守恒，



设碰后瞬间盘角速度为ω_0：

$$Rmv_0\cos\theta=\frac{1}{2}MR^2\omega_0+mR^2\omega_0 \quad (1)$$

定轴转动过程：



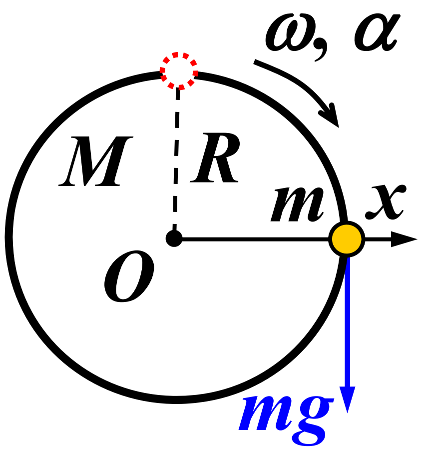
$m+M$ 形成刚体，转动惯量为：

$$J=MR^2/2+mR^2=2mR^2 \quad (2)$$

对 m +M+地球系统，E 守恒：

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2+mgR=\frac{1}{2}J\omega^2 \quad (3)$$

(1)(2)(3)解得 $\omega = \sqrt{v_0^2 + 16gR} \Big/ 4R$



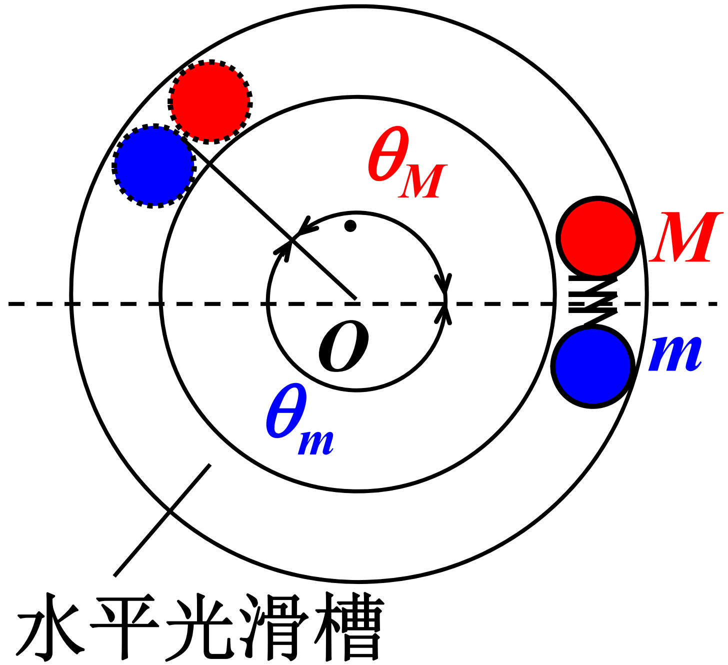
m、x重合时 $m+M$ 系统所受力矩：

$$M = mgR$$

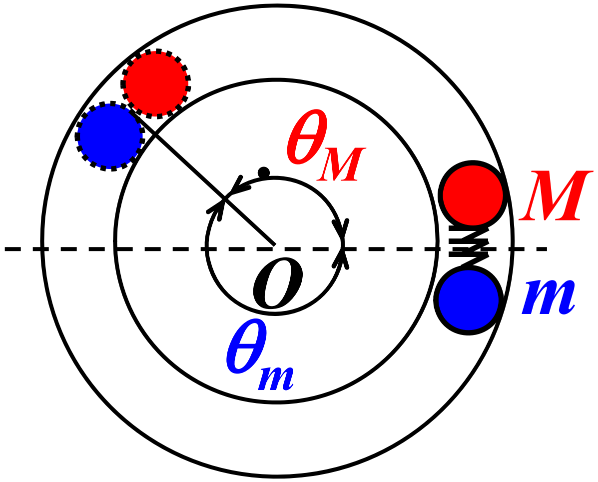
$$\therefore \quad \alpha = \frac{M}{J} = \frac{mgR}{2mR^2} = \frac{g}{2R}$$

【思考】如何求轴力？

【例】未与小球 M、m 固连的轻弹簧的压缩势能 U_0，使 M、m 从静止弹开。求（1）相碰时θ_M，（2）从弹开到相碰，经过的时间Δt



解：（1）对 $m+M$ 系统，弹出瞬间对 O 轴：



弹簧弹力力矩和 = 0

重力、槽壁压力的力矩 = 0

对 O 轴角动量守恒

设弹开瞬间角速度为 ω_m、ω_M：

$$J_m\omega_m + J_M\omega_M = (mR^2)\omega_m + (MR^2)\omega_M = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\omega_m = -M\omega_M \qquad (1)$$

槽光滑，m、M 作匀速转动，ω_m、ω_M 不变：

$$m\omega_m\Delta t = -M\omega_M\Delta t \quad \Rightarrow \quad m\theta_m = -M\theta_M$$

$$\theta_M + (-\theta_m) = 2\pi$$

解得： $$\theta_M = \frac{2\pi m}{M+m} \qquad (2)$$

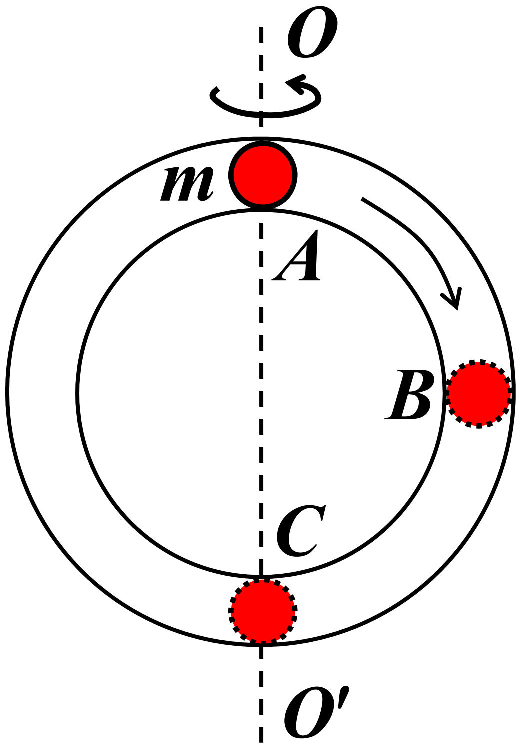
（2）对系统 $m+M$，弹出瞬间机械能守恒：

$$\frac{1}{2}(mR^2)\omega_m^2 + \frac{1}{2}(MR^2)\omega_M^2 = U_0 \qquad (3)$$

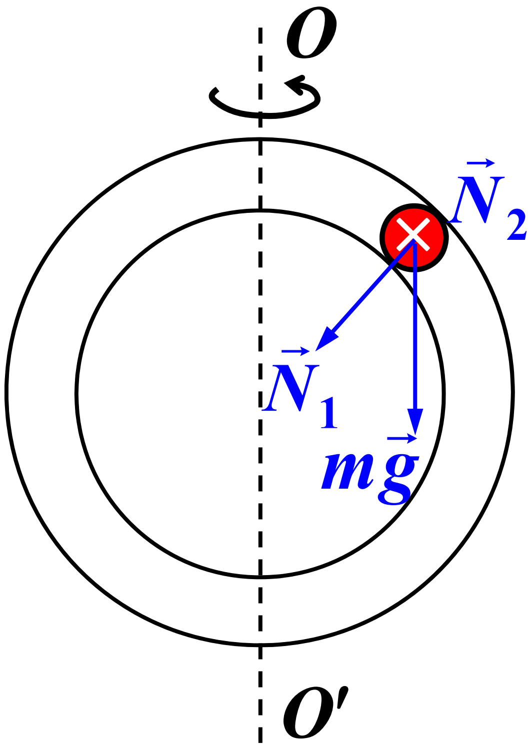
由 (1)(2)(3) 得： $$\Delta t = \frac{\theta_M}{\omega_M} = \sqrt{\frac{2\pi^2 mMR^2}{(M+m)U_0}}$$

【思考】弹开瞬间和运动中系统动量是否守恒？

【例】半径 R、转动惯量 J 的环形管绕竖直轴 OO' 转动，初始角速度为 ω_0。质量 m 的小球从 A 静止下滑，忽略所有摩擦。求：小球分别滑到 B、C 时，环的角速度、小球相对环的速度。



【思考】小球对 OO' 轴的角动量守恒否？



有人分析小球受力为：

$$\vec{N}_1 + m\vec{g}$$

它们对 OO' 轴的力矩 $= 0$，

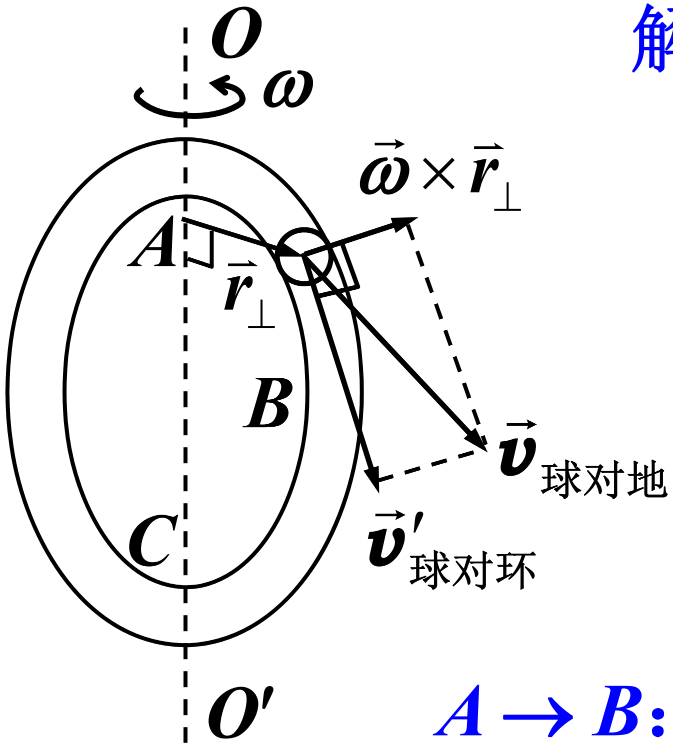
因而小球角动量守恒。

≠

还受垂直环面的压力 $\vec{N}_2$

它对 OO' 轴的力矩 $\neq 0$！

$\therefore$ 小球的角动量不守恒！



解：小球的速度关系：

$$\vec{v}_{球对地}=\vec{v}'_{球对环}+\vec{\omega}\times\vec{r}_{\perp}$$

对小球＋环系统：

轴力、重力对轴力矩为零，系统角动量守恒。

$A\rightarrow B$： $$J\omega_0 = J\omega_B + mR(\omega_B R)$$

$$\omega_B=\frac{J\omega_0}{J+mR^2}\quad(\omega_B<\omega_0)$$

$A\rightarrow C$： $$J\omega_0 = J\omega_C \qquad \omega_C=\omega_0$$

对小球＋环＋地球系统：

小球与环的内力 ⊥ 相对位移，无摩擦和外力

$$W_{\text{非保内}}=0,\ \ W_{\text{外}}=0$$

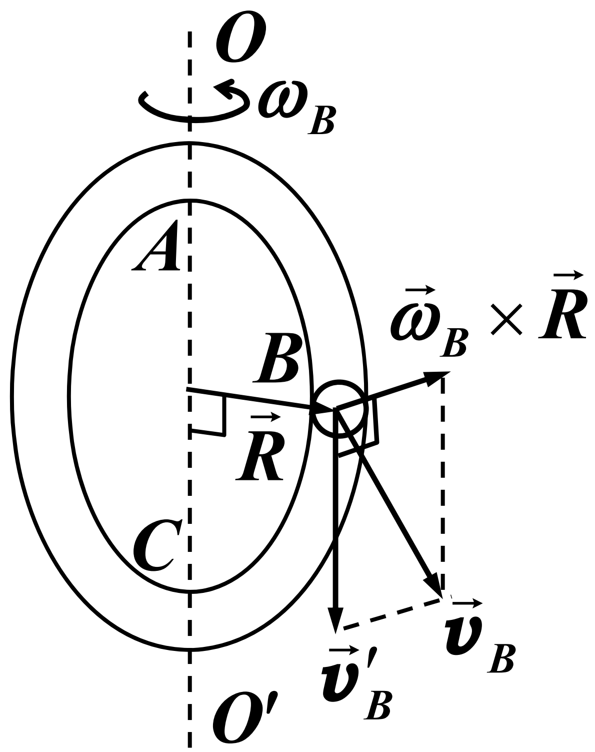
∴ 系统机械能守恒

设小球在 B 位置重力势能为 0

B 点速度：

$$\vec{v}_B=\vec{v}\,'_B+\vec{\omega}_B\times\vec{R}$$

$$\vec{v}\,'_B\perp(\vec{\omega}_B\times\vec{R})$$



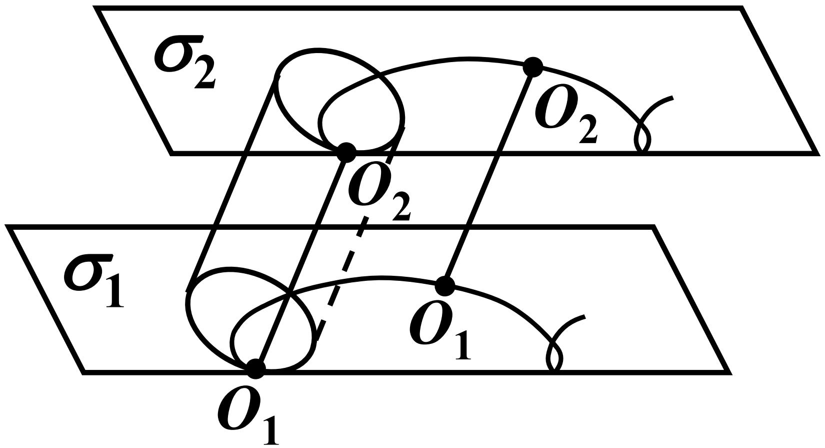
$A \rightarrow B$:
$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2}J\omega_B^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_B^2$$
$$= \frac{1}{2}J\omega_B^2 + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_B'^2 + \omega_B^2 R^2)$$
$$\boldsymbol{v}_B' = \sqrt{2gR + \frac{J\omega_0^2 R^2}{J + mR^2}}$$

C 点速度:
$$\vec{\boldsymbol{v}}_C = \vec{\boldsymbol{v}}'_C + \vec{\omega}_C \times 0 = \vec{\boldsymbol{v}}'_C$$

$A \rightarrow C$:
$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 + mg(2R) = \frac{1}{2}J\omega_C^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_C'^2$$
$$\boldsymbol{v}_C' = 2\sqrt{gR}$$

§ 6.7 刚体平面平行运动

一. 运动学关系



- 基点：刚体内任选一点，如 O_1 点
- 基面：基点的轨道平面，如 σ_1 面

  基面各点运动可代表刚体运动。
- 基轴：过基点垂直基面的轴，如 O_1O_2 轴

刚体平面平行运动为下列组合：

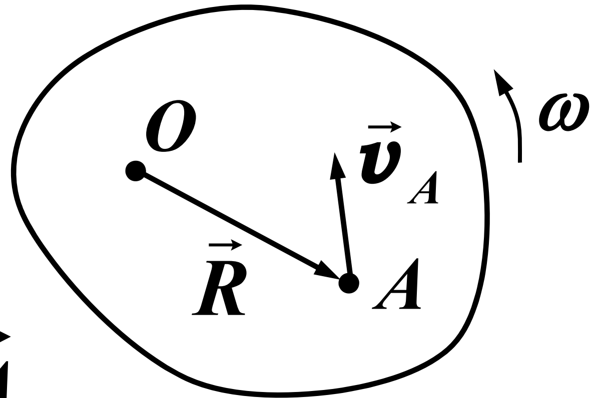
基轴平动　＋　绕基轴的定轴转动

(2个自由度)　　(1个自由度)

基面各点运动为下列组合：

基点平动　＋　绕基点转动

1. 基面上各点速度关系



$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{R}}$$

$\vec{v}_O$是基点 O 的速度，$\vec{R} = \overrightarrow{OA}$

注意矢量关系：$\vec{\omega}$ // 基轴， $\vec{\omega} \perp \vec{v}_A$， $\vec{\omega} \perp \vec{R}$

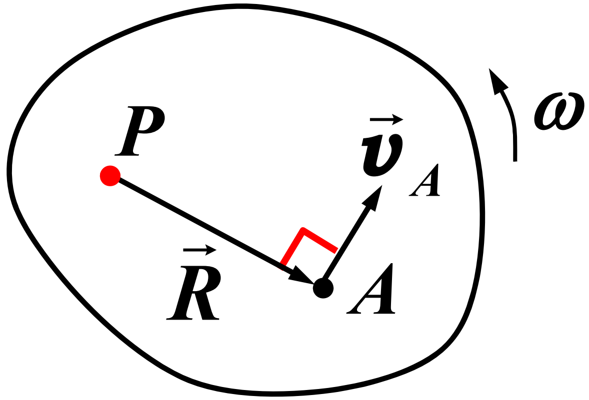
2. 瞬心（瞬时转动中心）、瞬轴（瞬时转轴）

- 基面上必存在一个瞬时速度为零的点 P

  —— 瞬心

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{\omega}\times\vec{R}, \quad \vec{v}_A \perp \vec{R}}$$

$$\vec{R} = \overrightarrow{PA}$$

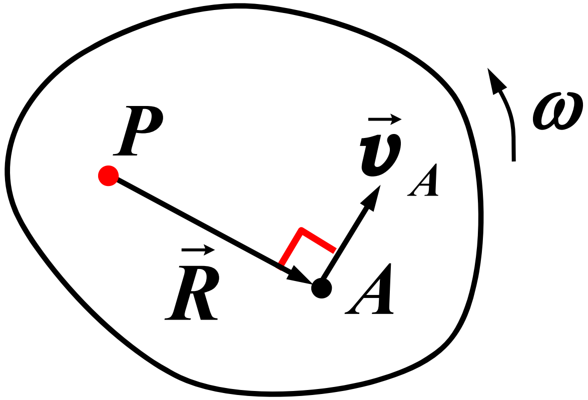


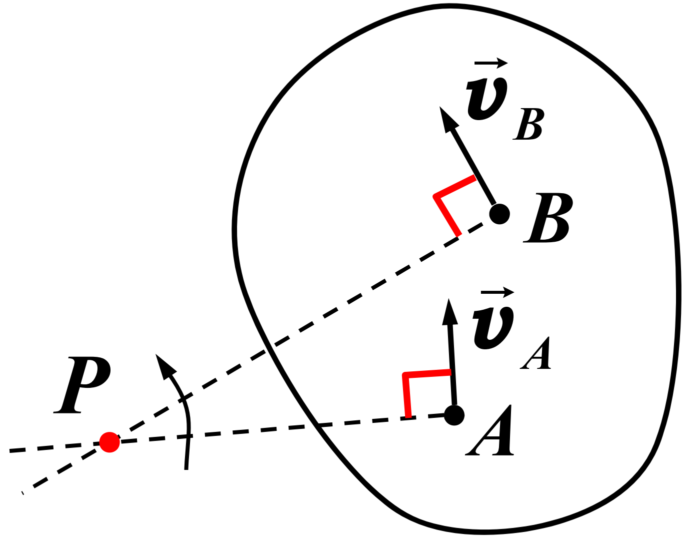
- 选瞬心为基点，有利于运动学问题分析。
- 瞬心位置一般随时间变化。
- 瞬心加速度不一定为零。
- 过瞬心垂直基面的直线为瞬轴。

- 瞬心位置可能在刚体内，也可能在刚体外。

求瞬心位置的 2 个简便方法：

1. 已知 1 点速度和 $\vec{\omega}$　　**2. 已知 2 点速度方向**





$$\begin{cases} \left|\vec{R}\right| = \overline{PA} = v_A/\omega \\ \vec{R}\ \text{方向沿}\ \vec{v}_A \times \vec{\omega}\ \text{的方向} \end{cases}$$

3. 均匀圆柱（盘、环、球）等在曲面上作纯滚动的运动学条件

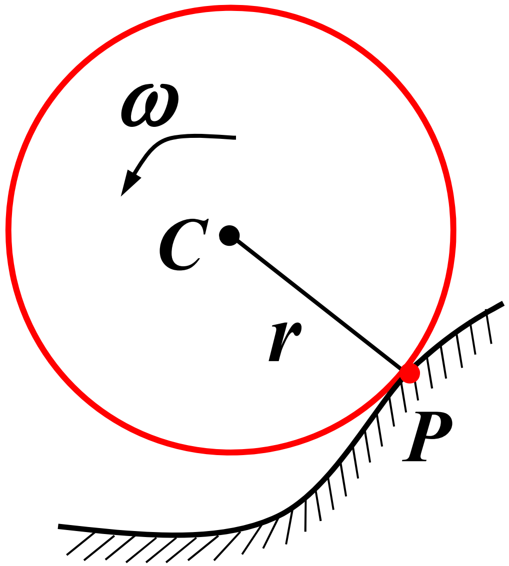
纯滚动：接触点 P 是瞬心，无相对滑动 。

质心 C 的速度：

$$\boxed{v_C = \omega \cdot r}$$

质心 C 的切向加速度：

$$\boxed{a_{Ct} = \alpha \cdot r}$$



二. 动力学关系

1. 质心运动定理

$$\boxed{\vec{F}_{外} = m\vec{a}_C = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

刚体动量 $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}_C}$

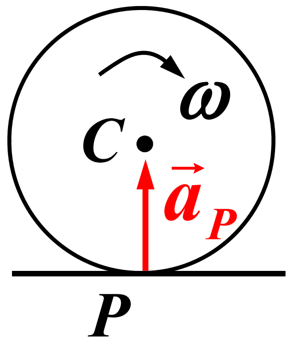
2. 对质心基轴的转动定律

$$\boxed{M_{外_{C轴}} = J_{C轴}\alpha}$$

若 $\vec{a}_{瞬心} // (\vec{r}_C - \vec{r}_{瞬心})$，则：

$$\boxed{M_{外_{瞬轴}} = J_{瞬轴}\alpha}$$

均匀圆柱体的纯滚动



3. 对质心基轴的角动量定理

$$\boxed{M_{外C轴} = \frac{\mathrm{d}L_{C轴}}{\mathrm{d}t}}$$

自转角动量

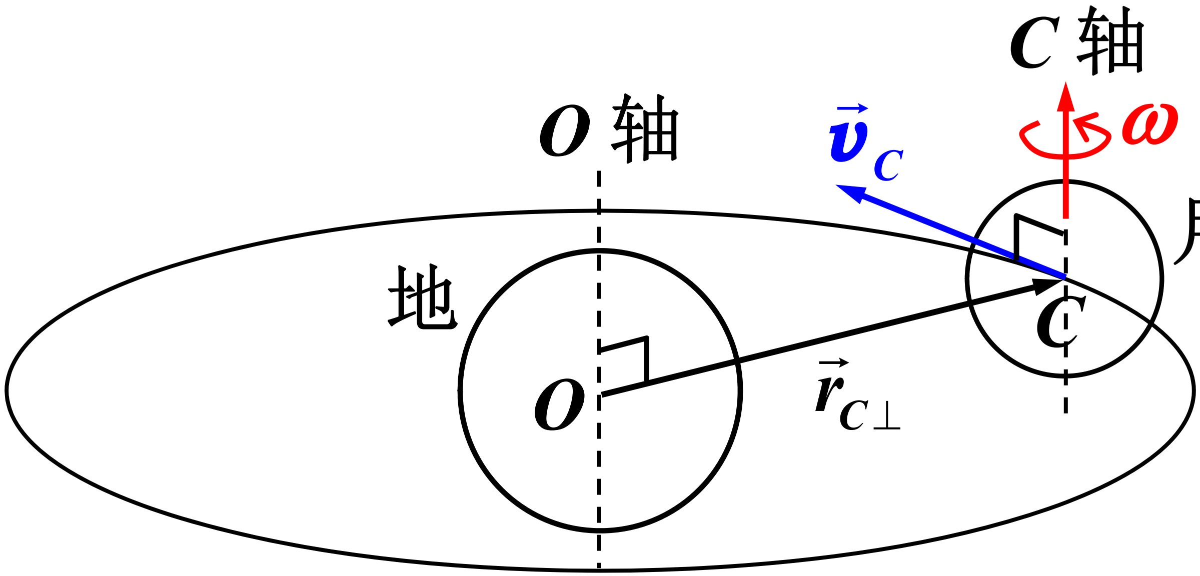
轨道角动量

刚体角动量 $\boxed{\vec{L}_{O轴} = J_{C轴}\vec{\omega} + \vec{r}_{C\perp} \times m\vec{v}_C}$

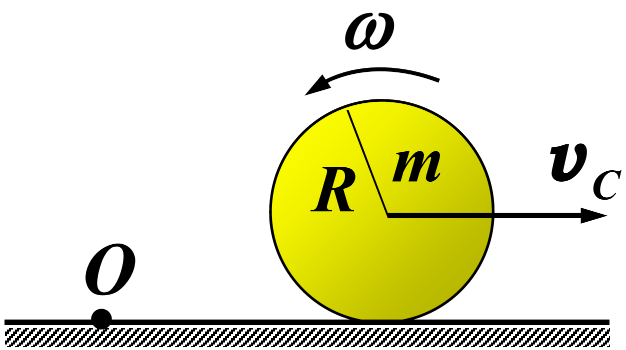
O 轴： 参考系内平行于C 轴的固定轴

$\vec{r}_{C\perp}$： 质心 C 相对 O 轴的垂直位矢

$\vec{v}_C$： 质心速度（垂直于C 轴、O 轴）



如图，均匀圆球对 O 轴角动量是多少？守恒否？



4. 能量关系

- 刚体动能

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{C轴} \omega^2}$$ （科尼希定理）

质心平动能（刚体平动能）

绕质心基轴的转动能（刚体转动能）

- 动能定理

$$\boxed{\Delta E_k = W_{外} = \int_{\vec{r}_{C0}}^{\vec{r}_C} \vec{F}_{外} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C + \int_{\theta_0}^{\theta} M_{外C轴} \mathrm{d}\theta}$$

质心平动能改变 ＝ 外力对质心作的功：

$$\boxed{\Delta(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_C{}^2) = \int_{\vec{r}_{C0}}^{\vec{r}_C} \vec{F}_{外} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C}$$

绕质心基轴的转动能改变

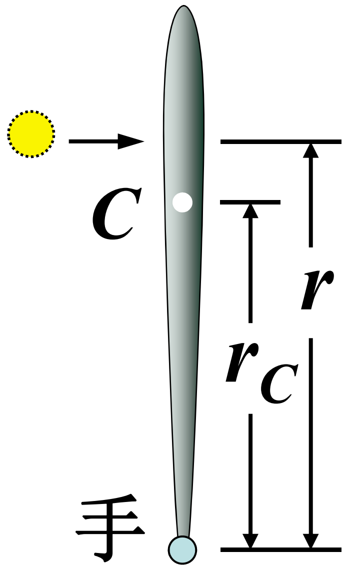
＝ 外力矩对质心基轴作的功：

$$\boxed{\Delta(\frac{1}{2}J_{C轴}\omega^2) = \int_{\theta_0}^{\theta} M_{外_{C轴}} \mathrm{d}\theta}$$

刚体动能改变 ＝ 外力对质心作的功

＋ 外力矩对质心基轴作的功

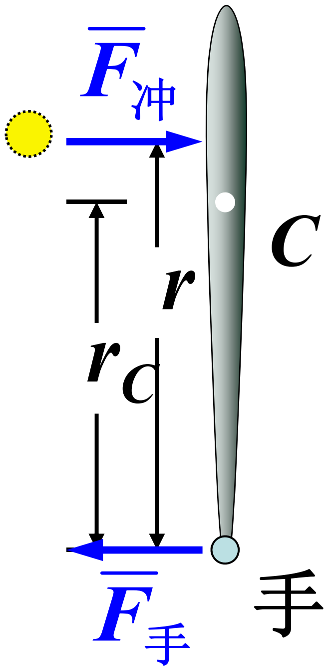
【例】 刚体撞击问题，如打击中心。



棒球手要做到轻松击球，必须使球击打合适位置，此位置称为打击中心。

已知：棒质量 m，对手的转动惯量 J，棒的质心 C 距离手 r_C。

求：打击中心到手的距离 r。



分析：轻松击球 $\begin{cases} \text{击球瞬间手的作用力} \approx 0 \\ \text{棒绕手作定轴转动} \end{cases}$

棒受力 $\begin{cases} \text{球的冲击力}\ \overline{F}_{冲} \\ \text{手的作用力}\ \overline{F}_{手} \end{cases}$

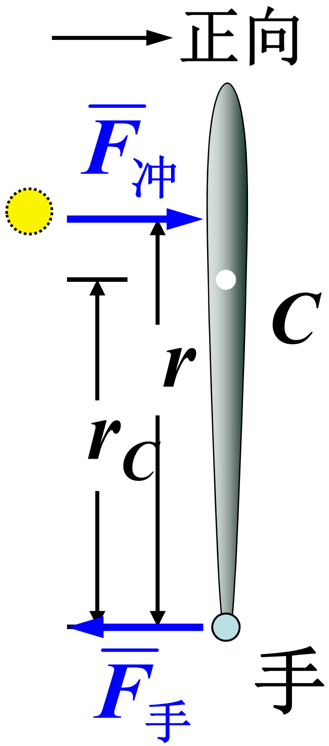
解法一　对质心的动量定理、

对手的角动量定理

设：打击时间 Δt，此时间内：

棒质心的动量改变为 $m\Delta \boldsymbol{v}_C$

棒的角速度改变为 $\Delta\omega$



对质心：动量定理

$$(\overline{F}_{冲} - \overline{F}_{手})\Delta t = m\Delta \boldsymbol{v}_C \qquad (1)$$

对手：角动量定理

$$(\overline{F}_{冲} r)\Delta t = J\Delta \omega \qquad (2)$$

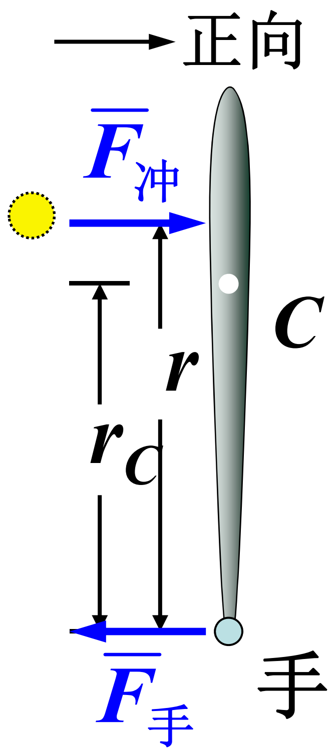
角量与线量关系：

$$\Delta \boldsymbol{v}_C = r_C \Delta \omega \qquad (3)$$

(1)(2)(3) 消去 Δ 量得： $\overline{F}_{手} = (1 - \dfrac{mrr_C}{J})\overline{F}_{冲}$

令 $\overline{F}_{手} = 0$ 得打击中心位置： $r = \dfrac{J}{mr_C}$

解法二　对质心的动量、角动量定理



对质心：

$$(\overline{F}_{冲} - \overline{F}_{手})\Delta t = m\Delta \boldsymbol{v}_C \quad (1)$$

$$[\overline{F}_{冲}(r - r_C) + \overline{F}_{手} r_C]\Delta t = J_C \Delta\omega \quad (2)$$

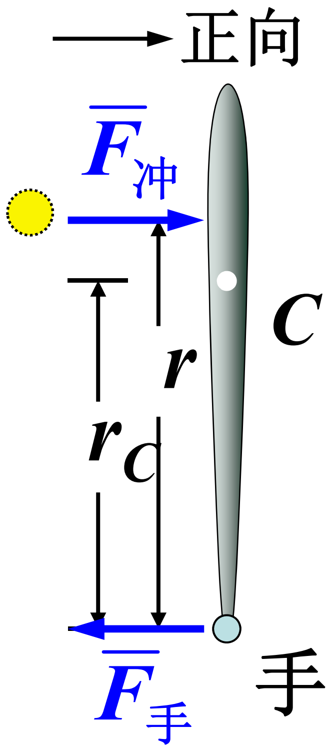
$$J_C = J - m r_C^2 \quad (3)$$

角量与线量关系：

$$\Delta \boldsymbol{v}_C = r_C \Delta\omega \quad (4)$$

由 (1–4) 并令 $\overline{F}_{手} = 0$ 得：　$r = \dfrac{J}{m r_C}$

解法三 质心运动定理、对手的转动定律



对质心：

$$\overline{F}_{冲} - \overline{F}_{手} = ma_C \qquad (1)$$

对手：

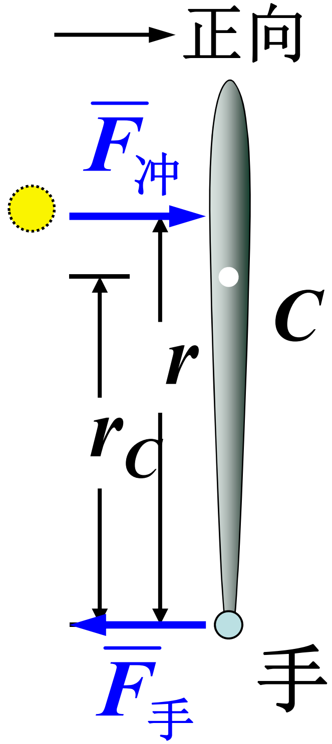
$$\overline{F}_{冲} r = J\alpha \qquad (2)$$

角量与线量关系：

$$a_C = r_C \alpha \qquad (3)$$

由 (1–3) 并令 $\overline{F}_{手} = 0$ 得： $r = \dfrac{J}{mr_C}$

解法四 质心运动定理、对质心轴转动定律



对质心和过质心的轴：

$$\overline{F}_{冲} - \overline{F}_{手} = ma_C \qquad (1)$$

$$\overline{F}_{冲}(r - r_C) + \overline{F}_{手} r_C = J_C \alpha \qquad (2)$$

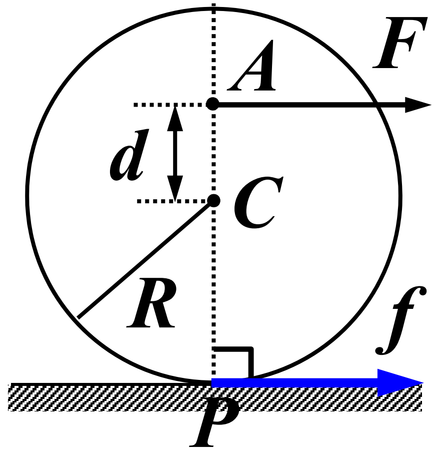
$$J_C = J - m r_C^2 \qquad (3)$$

角量与线量关系：

$$a_C = r_C \alpha \qquad (4)$$

由 (1–4) 并令 $\overline{F}_{手} = 0$ 得： $r = \dfrac{J}{m r_C}$

【例】质量 m、半径 R 的圆球在水平力 F 作用下在水平面上作纯滚动，作用点 A 在接触点 P 与质心 C 的连线上，$AC = d$。



求：接触点 P 处的静摩擦力 f。

解：设摩擦力向右，由质心运动定理得：

$$F + f = ma_C \qquad (1)$$

设顺时针方向为正，对质心轴的转动定律：

$$Fd - fR = J_C\alpha = 2mR^2\alpha/5 \qquad (2)$$

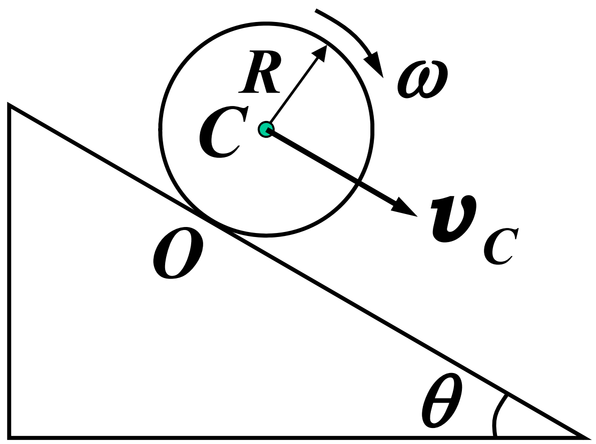
纯滚动条件： $a_C = R\alpha \qquad (3)$

(1)(2)(3) 解出： $$f=\frac{5d-2R}{7R}F$$

$$\begin{cases} \text{当 } d>\frac{2}{5}R \text{ 时，} f \text{ 与 } F \text{ 同向；} \\ \text{当 } d=\frac{2}{5}R \text{ 时，} f=0 \text{ ；} \\ \text{当 } d<\frac{2}{5}R \text{ 时，} f \text{ 与 } F \text{ 反向。} \end{cases}$$

$$a_C=\frac{5d+5R}{7R}\cdot\frac{F}{m}>0, \qquad \alpha=\frac{5d+5R}{7R^2}\cdot\frac{F}{m}>0$$

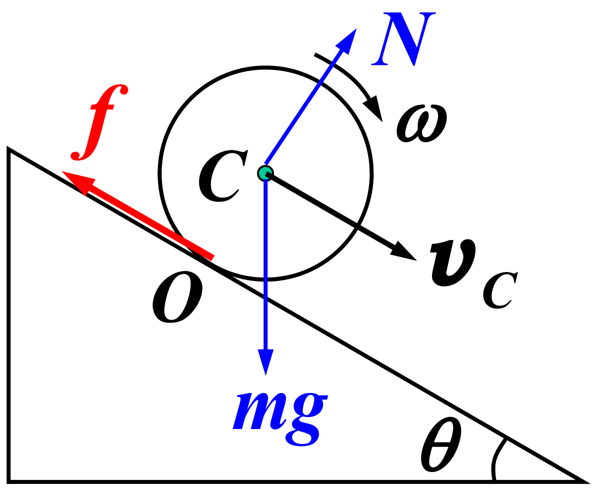
$\therefore$ 球沿顺时针方向加速转动、加速前进。



【例】在固定斜面上的圆柱体从静止开始作纯滚动，圆柱体质量 m，半径 R，转动惯量 J，斜面倾角 θ。

求（1）接触点 O 是否存在摩擦力？若有，其作用是什么？做功否？

（2）圆柱体下落高度 h 时，质心 C 的速度 v_C，转动角速度 ω，摩擦力 f 分别是多少？



（1）讨论摩擦力

斜面系：不易判断

质心系： 定轴转动

$$\vec{M}_{mg}=0,\ \ \vec{M}_{N}=0$$

加速纯滚，则有静摩擦力 f，与 $\vec{v}_C$ 方向相反

对斜面系，静摩擦力 f 不做功：

$$\mathrm{d}W_f=\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_O=\vec{f}\cdot\vec{v}_O\mathrm{d}t$$

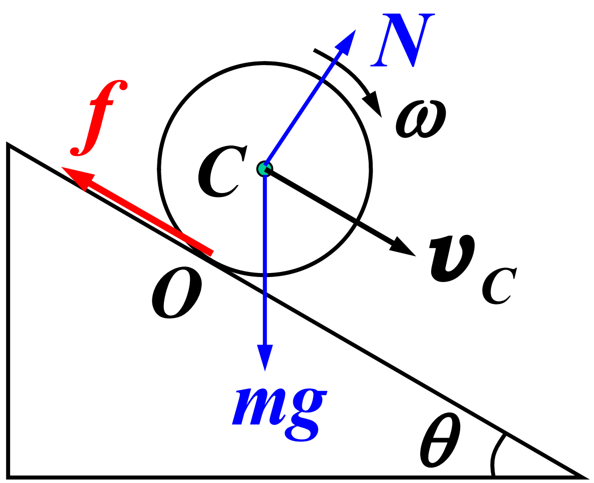
$$=\vec{f}\cdot(\vec{v}_{O对C}+\vec{v}_C)\mathrm{d}t=f\cdot(\omega R-v_C)\mathrm{d}t=0$$

$$f\cdot(\omega R-\boldsymbol{v}_C)\mathrm{d}t=0 \quad\Rightarrow\quad fR\mathrm{d}\theta=f\boldsymbol{v}_C\mathrm{d}t$$

f对质心作负功，平动能↓

f力矩对质心轴作正功，转动能↑

$\left.\right\} W_f=0$



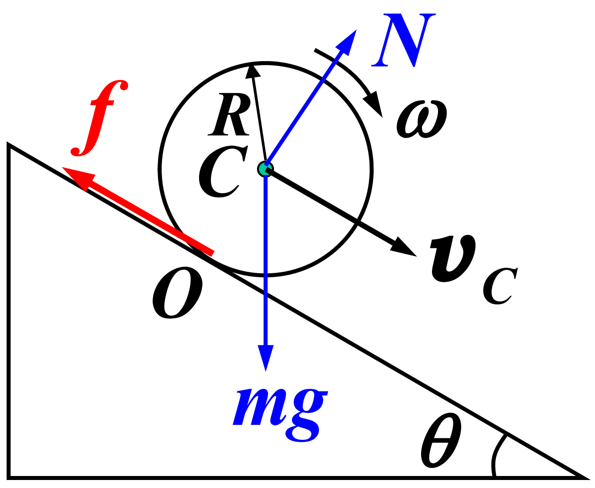
（2）计算 $\boldsymbol{v}_C$，ω，f

解：机械能守恒

＋ 质心运动定理

＋ 质心运动学

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_C^2+\frac{1}{2}J\omega^2=mgh \qquad (1)$$



$$mg\sin\theta - f = ma_C \qquad (2)$$

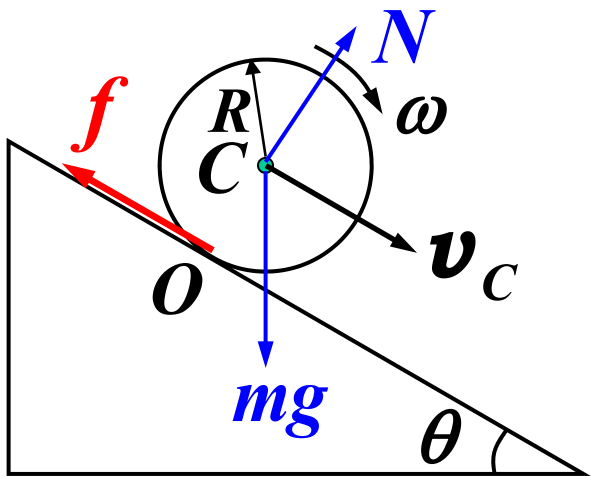
$$v_C^2 = 2a_C h/\sin\theta \qquad (3)$$

$$v_C = R\omega \qquad (4)$$

(1—4) 解出:

$$v_C = \sqrt{\frac{2gh}{1 + J/mR^2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2gh}{R^2 + J/m}} \qquad f = \frac{mg\sin\theta}{1 + mR^2/J}$$



求摩擦力另法：

质心运动定理

$$mg\sin\theta - f = ma_C \qquad (5)$$

$$a_C = R\alpha \qquad (6)$$

＋ 对质心基轴的转动定律

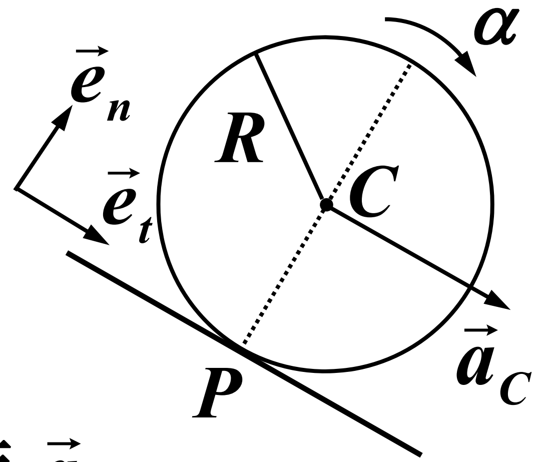
$$fR = J\alpha \qquad (7)$$

或者 ＋ 对瞬轴 *O* 的转动定律

$$mg(R\sin\theta) = J_O\alpha \quad (J_O = J + mR^2) \qquad (8)$$

用 (5)(6)(7) 或 (5)(6)(8) 都可解出 f。

【例】质量均匀、半径 R 的圆球在斜面上作纯滚动，P 是瞬心，C 是质心。



证明：P 点相对水平面的加速度 $\vec{a}_P$ 沿 PC 连线方向。

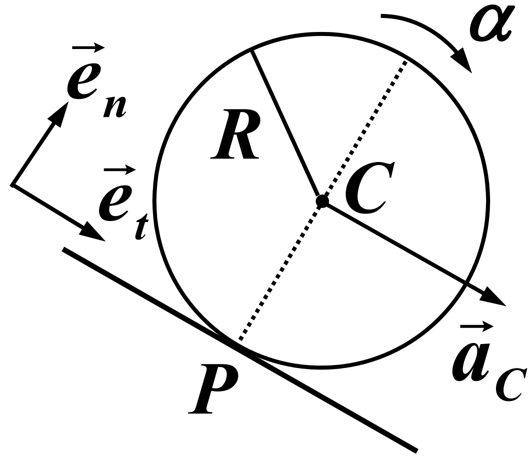
证：用相对运动关系证明。

如图建立坐标系 $\vec{e}_t, \vec{e}_n$，设圆球向下运动。

设顺时针方向为正，不妨设角加速度 $\alpha > 0$，即圆球沿顺时针方向加速转动。

设 $\vec{a}'_P$ 是 P 点相对质心 C 的加速度，

根据相对运动关系有：



$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_C \qquad (1)$$

$$\vec{a}_C = a_C \vec{e}_t = R\alpha \cdot \vec{e}_t \qquad (2)$$

在质心系，P 点瞬间随球作沿顺时针方向的加速转动，所以：

$a'_{Pn} = \omega^2 R$ 方向为 $\vec{e}_n$

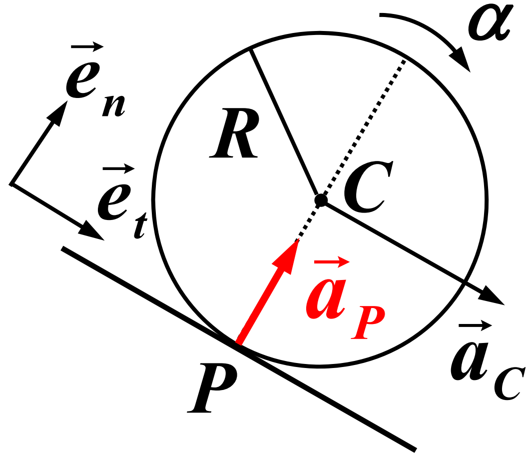
$a'_{Pt} = R\alpha$ 方向为 $-\vec{e}_t$

$$\therefore \ \vec{a}'_P = \omega^2 R \cdot \vec{e}_n - R\alpha \cdot \vec{e}_t \qquad (3)$$

由 (1)(2)(3) 解出：

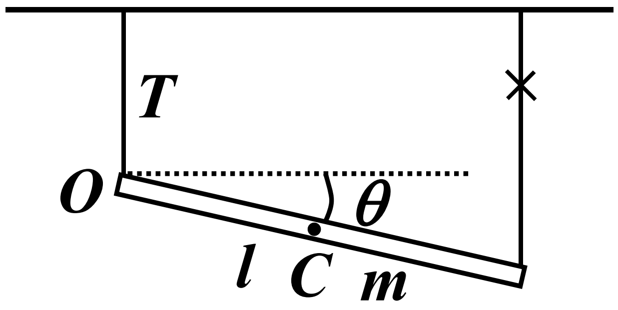
$$\vec{a}_P = \vec{a}'_{Pn} = \omega^2 R \cdot \vec{e}_n$$

$\therefore$ $\vec{a}_P$ 沿 PC 连线方向。



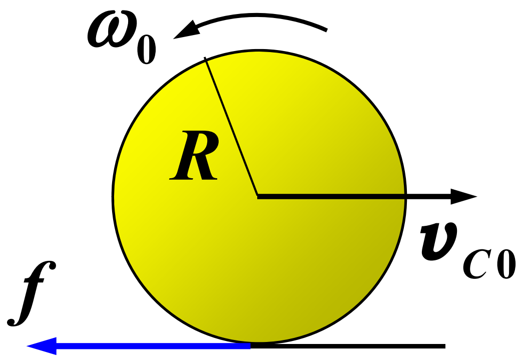
本题所证明的结论也适用于其它质量分布均匀的圆形物体。

【思考】 剪断右绳瞬间，左绳张力。



答案： $T=\dfrac{mg}{1+3\cos^2\theta}$

【例】在桌面上搓乒乓球使其具有初始ω_0和$\boldsymbol{v}_{C0}$，乒乓球会前进一段距离后自动返回。讨论出现这种现象的原因和条件（乒乓球看成匀质球壳）。



解：分析前进阶段：

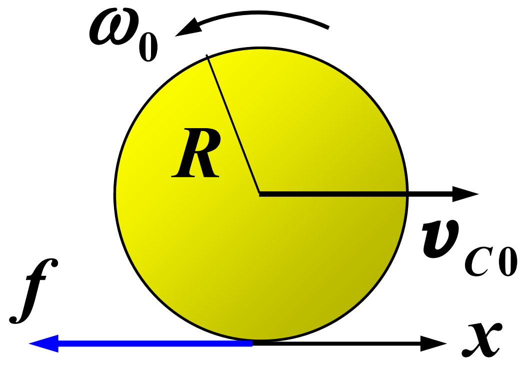
运动状态：打滑

受力：与$\boldsymbol{v}_{C0}$方向相反的滑动摩擦力f

滑动摩擦力 f 的作用 $\begin{cases} \text{使质心速度 } \boldsymbol{v}_C \text{ 减小} \\ \text{使转动的角速度 } \omega \text{ 减小} \end{cases}$

自动返回条件：$\boldsymbol{v}_C = 0$，$\omega > 0$　　(1)

质心运动方程：设 x 方向为正



$$-f = ma_C \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_{C0} + a_C t \qquad (3)$$

对过质心基轴的转动方程：设逆时针为正

$$-fR = J_{C\text{轴}}\alpha \quad (J_{C\text{轴}} = 2mR^2/3) \qquad (4)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \qquad (5)$$

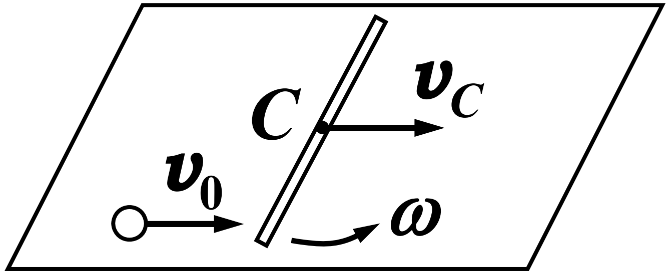
(1)–(5) 得： $\omega_0 > \dfrac{3v_{C0}}{2R}$

【思考】

（1）返回阶段，乒乓球最终达到纯滚动状态，这时还受摩擦力作用吗？

（2）返回阶段，乒乓球达到纯滚动之后，最终还会停下来，这是怎么回事？

【例】光滑水平面静止放置长 l、质量 $3m$ 的匀质细杆，质量 m 的小球以初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 垂直于杆身在杆端处与杆发生弹性碰撞。求：碰后杆的角速度。



解：对杆+球系统，无水平外力作用。

设小球碰后速度为$\boldsymbol{v}$，没有反弹。

水平动量守恒：$m\boldsymbol{v}_0 = m\boldsymbol{v} + 3m\boldsymbol{v}_C$

对任意定点角动量守恒，选与碰撞点重合的定点，逆时针为正：

$$0=\frac{3ml^2}{12}\omega-\frac{l}{2}3mv_C+0$$

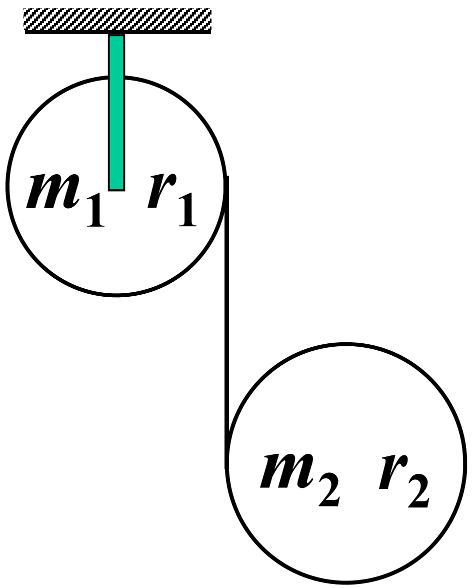
弹性碰撞，动能不变：

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\frac{3ml^2}{12}\omega^2+\frac{1}{2}3mv_C{}^2$$

解得：$\omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$，$v_C=\frac{2}{7}v_0$，$v=\frac{1}{7}v_0$

【思考】选择与杆质心 C 重合的定点，角动量守恒如何写？

【例】质量 m_2、半径 r_2 的圆盘沿着不可伸长的轻绳竖直方向展开，轻绳跨过质量 m_1、半径 r_1 的定滑轮，轻绳和定滑轮间无相对滑动，定滑轮轴承处光滑。求：圆盘 m_2 质心加速度。



解： 设绳中张力 T，m_1 角加速度 α_1，m_2 质心加速度a_C，角加速度 α_2，绳上 A 点加速度 a。

分别对 2 圆盘列隔离体方程：

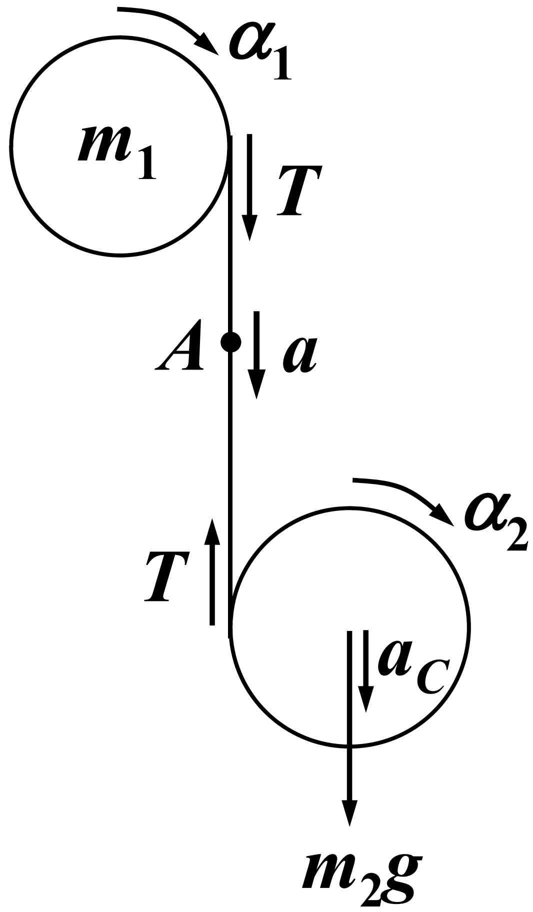
$$Tr_1 = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \alpha_1$$

$$m_2 g - T = m_2 a_C$$

$$Tr_2 = \frac{1}{2}m_2 r_2^2 \alpha_2$$

$$a = r_1 \alpha_1$$

$$a_C - a = r_2 \alpha_2$$



解出：

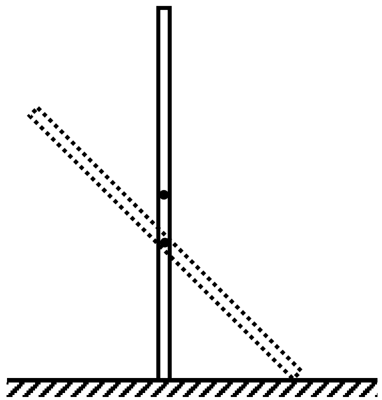
$$a_C = \frac{2(m_1 + m_2)}{3m_1 + 2m_2} g$$

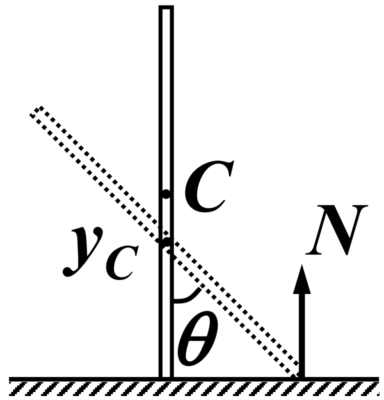
$$T = \frac{m_1 m_2}{3m_1 + 2m_2} g$$

$$\alpha_1 = \frac{2m_2}{3m_1 + 2m_2} \frac{g}{r_1}$$

$$\alpha_2 = \frac{2m_1}{3m_1 + 2m_2} \frac{g}{r_2}$$

【例】匀质细杆直立在光滑水平地面上，从静止状态释放后，因不稳定而滑行倾倒。在细杆全部着地前，它的下端是否会跳离地面？

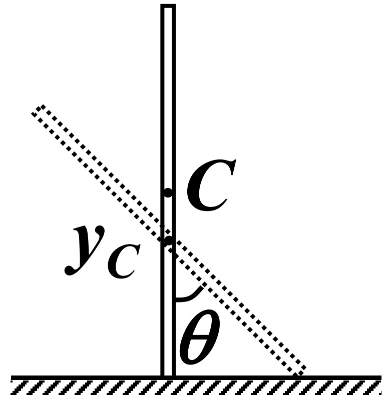




解：杆水平方向不受外力，故质心 C 只沿竖直方向向下运动。跳不跳要看 N 是否为零。

设杆质量 m，长 l，质心坐标、速度、加速度分别为 y_C、v_C、a_C，角速度 ω，角加速度 α，支持力 N。

几何约束关系：　$y_C = \frac{l}{2}\cos\theta$



$$\boldsymbol{v}_C = \frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t},\quad \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v}_C = \omega\frac{l}{2}\sin\theta \qquad (1)$$

机械能守恒：

$$mg\frac{l}{2}\left(1-\cos\theta\right) = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_C{}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\omega^2 \qquad (2)$$

(1)(2) 得：

$$\boldsymbol{v}_C^2 = 3gl(1-\cos\theta)\sin^2\theta \Big/ (1+3\sin^2\theta) = glf(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad 2\boldsymbol{v}_C a_C = gl\frac{\mathrm{d}f(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f(\theta)}{\mathrm{d}\theta}gl\omega \qquad (3)$$

(1)(3) 得：

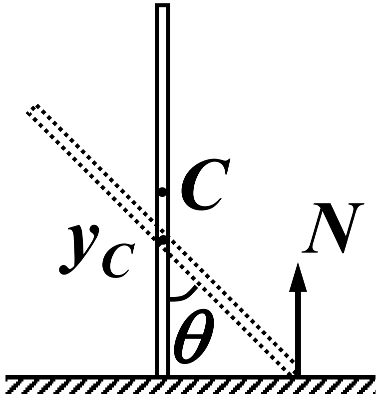
$$a_C = \frac{\sin^2\theta + 3\sin^4\theta + 2\cos\theta - 2\cos^2\theta}{(1+3\sin^2\theta)^2}3g$$

$$N = mg - ma_C = \frac{3\cos^2\theta - 6\cos\theta + 4}{(1+3\sin^2\theta)^2}mg$$

易判定 $N > 0$，所以不会跳离地面。

另法： (1)(2) 得：

$$\omega^2 = glf(\theta)\frac{4}{(l\sin\theta)^2} = \frac{g}{l}\cdot h(\theta)$$

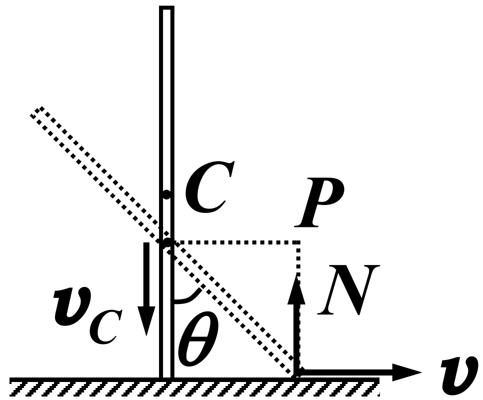


$$\Rightarrow 2\omega\alpha = \frac{g}{l}\frac{\mathrm{d}h(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\omega$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{g}{2l}\dfrac{\mathrm{d}h(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \\[2em] N\dfrac{l}{2}\sin\theta = (\dfrac{1}{12}ml^2)\alpha \end{array}\right\} N = \frac{mg}{12\sin\theta}\frac{\mathrm{d}h(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

质心速度和角速度关系也可由瞬心直接得到：

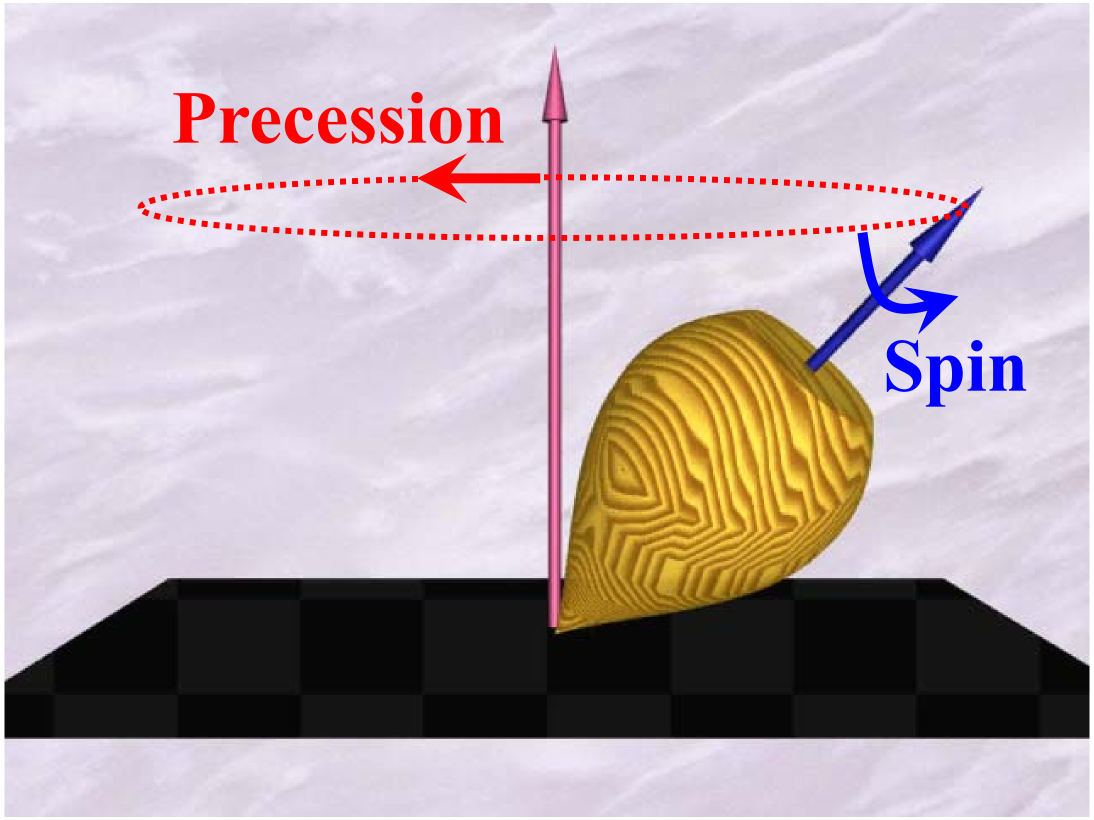
$$\boldsymbol{v}_C = \omega \frac{l}{2} \sin\theta$$



【思考】支持力 N 做功否？

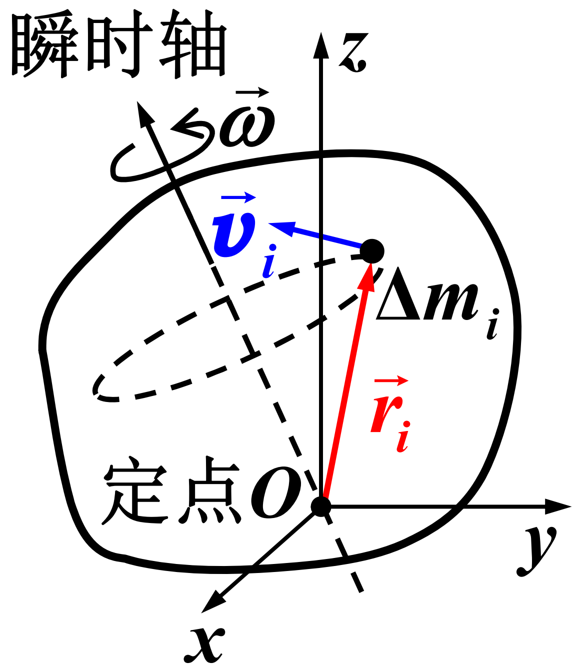
§ 6.8 进动

高速自转物体，其自转轴绕另一个轴转动的现象，如玩具陀螺：



一. 定点转动刚体的角动量和角速度的关系

对定点 O 的角动量：



$$\vec{L}=\sum \vec{r}_i \times(\Delta m_i \vec{v}_i)$$

$$\vec{v}_i=\vec{\omega}\times\vec{r}_i$$

$$\vec{r}_i=x_i\vec{i}+y_i\vec{j}+z_i\vec{k}$$

$$\vec{L}=\sum \Delta m_i \vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)$$

$$=\sum \Delta m_i[(\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i)\vec{\omega}-(\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\vec{r}_i]$$

（ $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$ ）

$$L_x = \sum \Delta m_i [(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\omega_x - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})x_i]$$

$$= \sum \Delta m_i [(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_x - (x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)x_i]$$

$$= \sum \Delta m_i [(y_i^2 + z_i^2)\omega_x - x_i y_i \omega_y + x_i z_i \omega_z]$$

令 $J_{xx} = \sum \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2) = \int (y^2 + z^2)\mathrm{d}m$

$$J_{yy} = \sum \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2) = \int (x^2 + z^2)\mathrm{d}m$$

$$J_{zz} = \sum \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m$$

$$J_{xy} = J_{yx} = \sum -\Delta m_i x_i y_i = -\int xy\mathrm{d}m$$

$$J_{xz} = J_{zx} = \sum -\Delta m_i x_i z_i = -\int xz\mathrm{d}m$$

$$J_{yz} = J_{zy} = \sum -\Delta m_i y_i z_i = -\int yz\mathrm{d}m$$

$$\Rightarrow \quad L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z$$

同理 $$L_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z$$

$$L_z = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \vec{L} = \hat{J}\vec{\omega}}$$

$\hat{J}$ — 刚体对O点的惯量张量，是实对称矩阵

对角元 J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} — 对轴的转动惯量

非对角元 J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} 等 — 惯量积

1. $\hat{J}$ 只和刚体相对定点 O 的质量分布有关，和坐标系无关，$\hat{J}$ 元素值和坐标系有关。

过定点 O 总存在 3 个正交轴使 $\hat{J}$ 对角化：

$$\hat{J}=\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

轴 1, 2, 3 — 惯量主轴

J_1, J_2, J_3 — 主转动惯量

惯量主轴是刚体的动力学对称轴。

规律：在质量分布对称的情况下，刚体的几何对称轴是惯量主轴。

2. 坐标系不动，刚体动：$\hat{J}$ 元素和 t 有关

坐标系和刚体固连一起动：$\hat{J}$ 元素和 t 无关

本体坐标系：和刚体固连的坐标系

主轴坐标系：取主轴的本体坐标系

任意时刻，在主轴坐标系下：

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

$$\vec{L}_1 = J_1\vec{\omega}_1,\quad \vec{L}_2 = J_2\vec{\omega}_2,\quad \vec{L}_3 = J_3\vec{\omega}_3$$

二. 定点转动刚体的动能

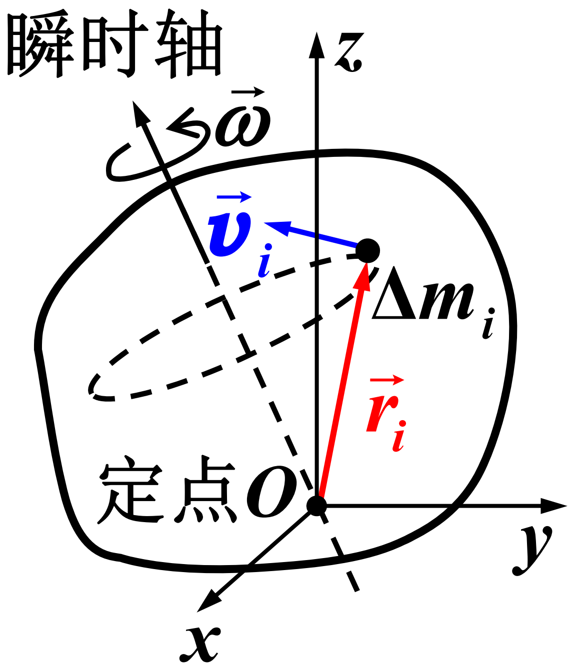
$$E_k = \sum \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2$$

$$= \sum \frac{1}{2} \Delta m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$= \sum \frac{1}{2} \Delta m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum (\vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i)$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}}$$ — 定点转动刚体动能



$$E_k = \frac{1}{2}(\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z)\begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\hat{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{J}\hat{\omega} \qquad \hat{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

任意时刻，在主轴坐标系下：

$$E_k = \frac{1}{2}(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2)$$

三. 陀螺的运动

常见的两种陀螺：欧拉陀螺、拉格朗日陀螺

欧拉陀螺：不受力矩作用的自由转动刚体。

如：陀螺仪、抛在空中的飞盘。

拉格朗日陀螺：是对称陀螺，其中 **2** 个惯量主轴的转动惯量相同，质心位于第 **3** 个惯量主轴上。陀螺在重力矩作用下绕某个支点作定点转动。

如：地面上的玩具陀螺绕支点的定点转动。

1. 欧拉陀螺的运动

陀螺作定点转动，力矩为零，角动量守恒：

$$\vec{L} = \text{常矢量}$$

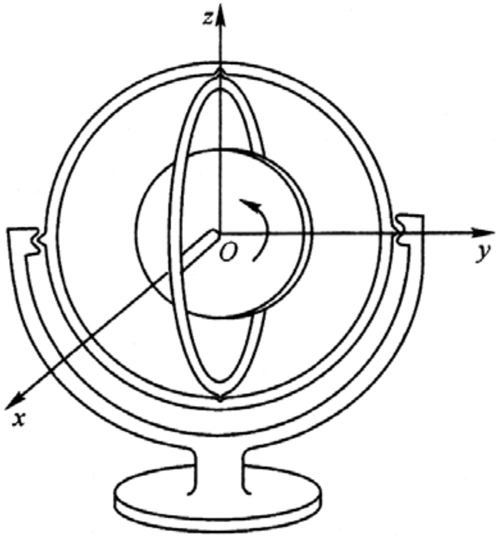
但陀螺的角速度守恒吗？是常矢量吗？

研究表明：

- 刚体不受外力矩作用时，如果一开始沿某主轴方向转动，则刚体一直保持沿该主轴方向作定轴转动，此时角速度守恒。

如果一开始不沿主轴方向转动，则刚体角速度不守恒。瞬时轴在空间不断改变方向，划出锥面。

- 三个主轴中，只有沿着转动惯量最大和最小的主轴的转动是稳定的，能保证角速度守恒。沿中间值的主轴转动，受到外界扰动后会不稳定，不能保证角速度守恒。

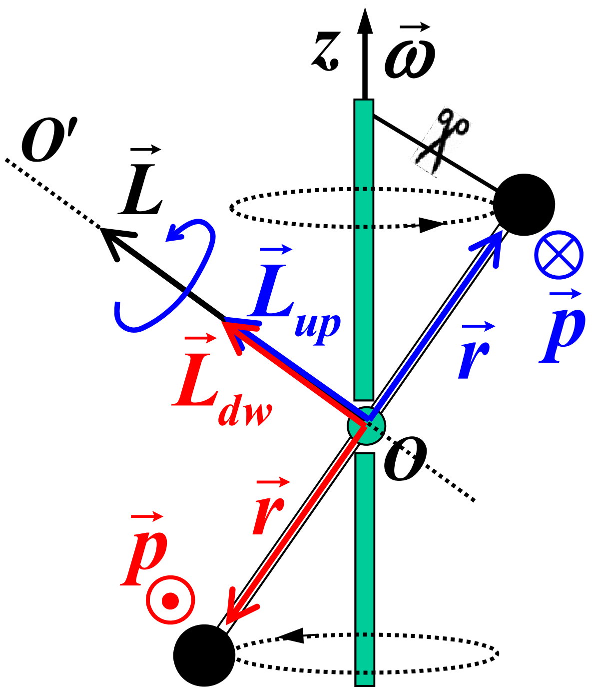


常平架的内外圈转动能抵消外力矩，使得陀螺不受力矩作用，这从陀螺参考系很容易理解。这样陀螺能保持转动方向不变 — 空间定向

【思考】扔飞盘的技巧是什么？

【演示】力矩突变

O 是轻杆中点，剪断绳会如何运动？



剪断瞬间及之后时间，对 O 点角动量守恒，能“眼见”保持沿剪断瞬间的 OO' 轴作定轴转动。

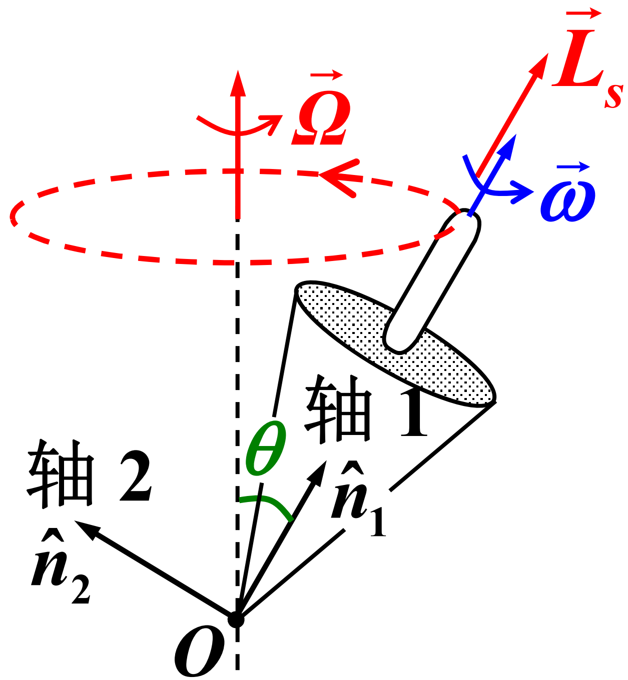
实际按欧拉陀螺的动力学分析，角动量守恒没错，但对转动的分析不是这么简单。

这是欧拉 — 潘索问题。

2. 拉格朗日陀螺的运动

主轴坐标系： 轴 1、轴 2

选轴 1、轴 2
进动角速度 $\vec{\Omega}$
自转角速度 $\vec{\omega}$
} 共面

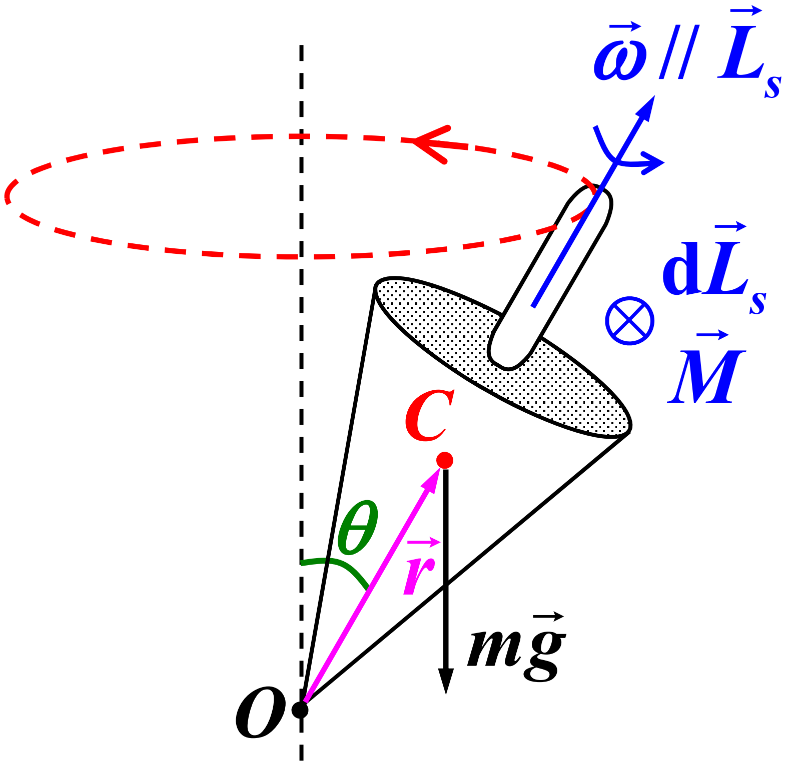


注意： 主轴随刚体转动

$$\vec{\omega}_{总} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} = (\omega + \Omega\cos\theta)\cdot\hat{n}_1 + \Omega\sin\theta\cdot\hat{n}_2$$

$$\vec{L} = J_1(\omega + \Omega\cos\theta)\cdot\hat{n}_1 + J_2\Omega\sin\theta\cdot\hat{n}_2$$

$$\omega >> \Omega,\ \ J_1 \sim J_2 \ \Rightarrow \ \vec{L} \approx J_1\vec{\omega} = \vec{L}_s$$（自转角动量）



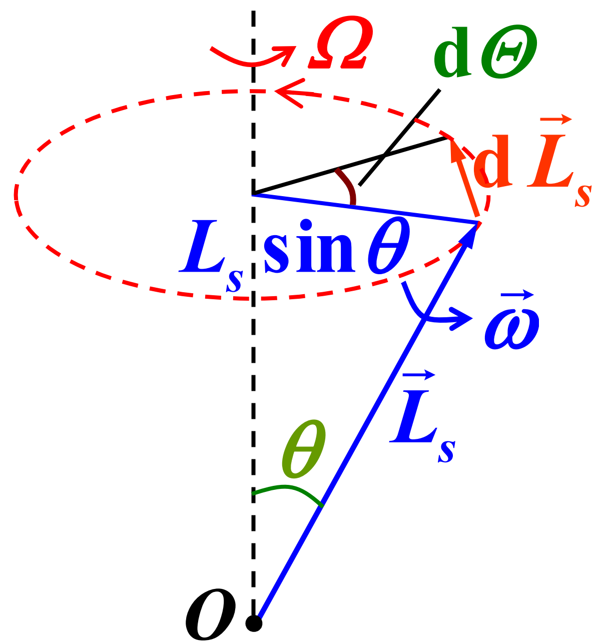
对O点，分析对称陀螺自转角动量$\vec{L}_s$的变化：

$$\vec{M} \approx \frac{\mathrm{d}\vec{L}_s}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{L}_s \,//\, \vec{M}$$

$$\vec{M} \perp \vec{L}_s \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{L}_s \perp \vec{L}_s$$

进动每一瞬间，角动量$\vec{L}_s$、力矩$\vec{M}$的大小不变、方向变，始终保持$\vec{M} \perp \vec{L}_s$、$\mathrm{d}\vec{L}_s \perp \vec{L}_s$的关系。

进动角速度： $\Omega = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}$



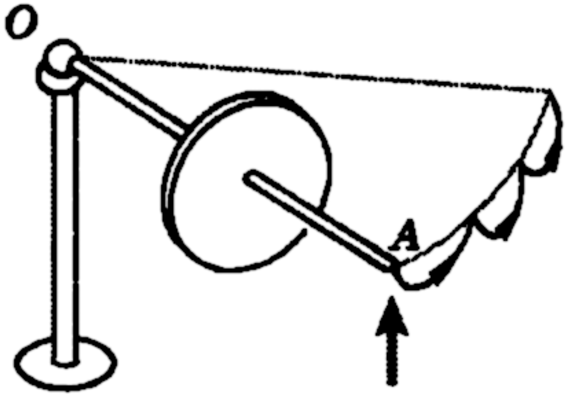
$$\left|\mathrm{d}\vec{L}_s\right| = L_s \sin\theta \,\mathrm{d}\Theta = M\,\mathrm{d}t$$

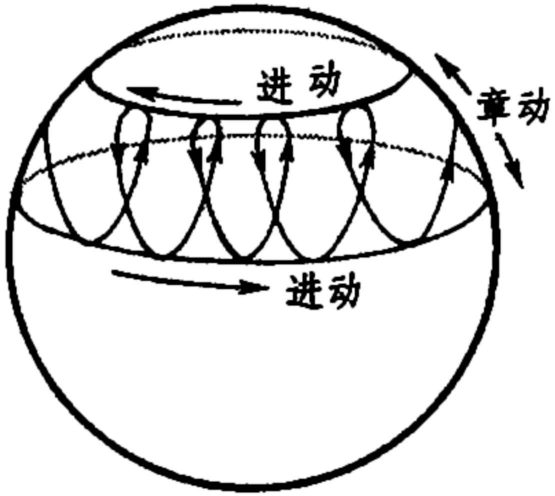
$$\therefore \quad \boxed{\Omega = \frac{M}{L_s \sin\theta} = \frac{M}{J\omega \sin\theta}}$$

或者： $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_s}{\mathrm{d}t} = \vec{\Omega} \times \vec{L}_s = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \Omega L_s \sin\theta = M$

$$\Omega = \frac{M}{L_s \sin\theta}$$

另外，陀螺自转轴在进动中也可能出现微小的上下周期性的摆动 — 章动。





【演示】车轮进动，对称陀螺的定轴性

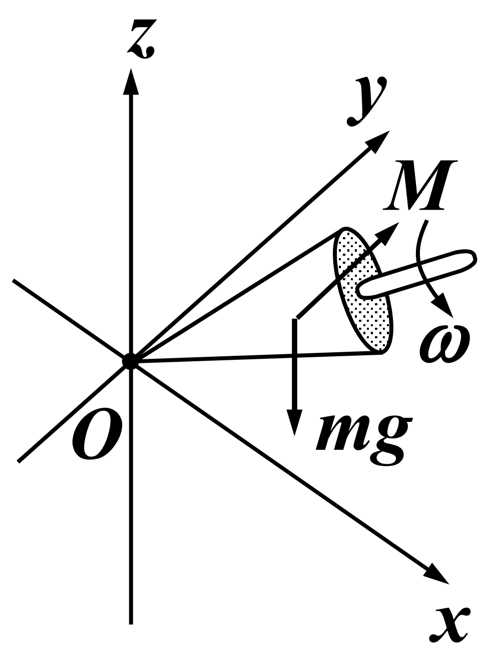
【TV】进动防止炮弹翻转　翻身陀螺

四. 回转仪和回转效应

回转仪：泛指高速自转的对称陀螺

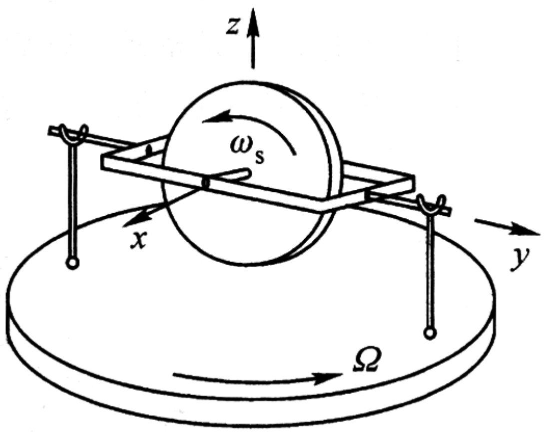
设回转仪的自转轴正处于 xz 面内，则重力矩沿 y 轴正向。

下一时刻，回转仪并不屈服于重力矩的安排，去绕 y 轴转动，而是绕 z 轴进动，使自转轴朝着 y 轴 — 重力矩的方向转动。

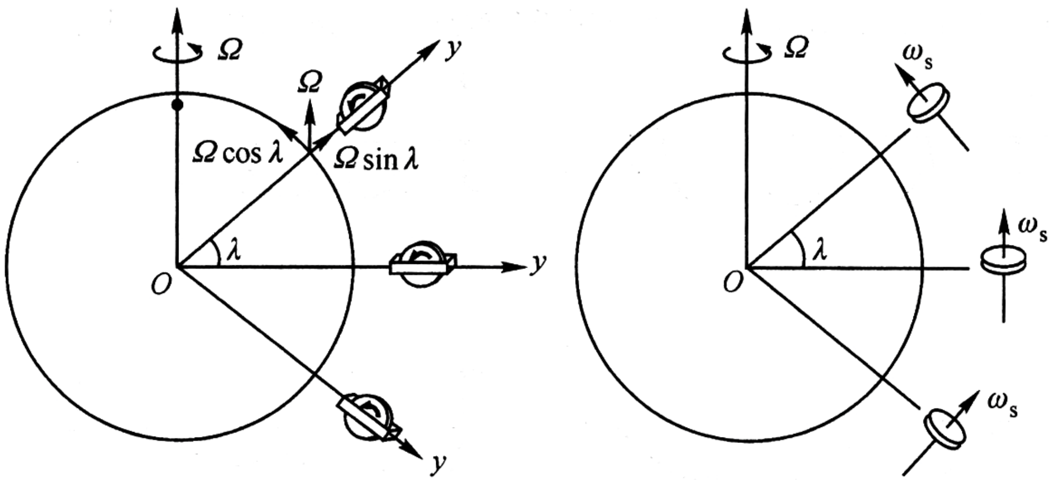


回转仪对于力矩的反应 — 高速自转时自转轴朝力矩方向偏转是普遍的，称为回转效应。

回转罗盘



转台上的二自由度陀螺

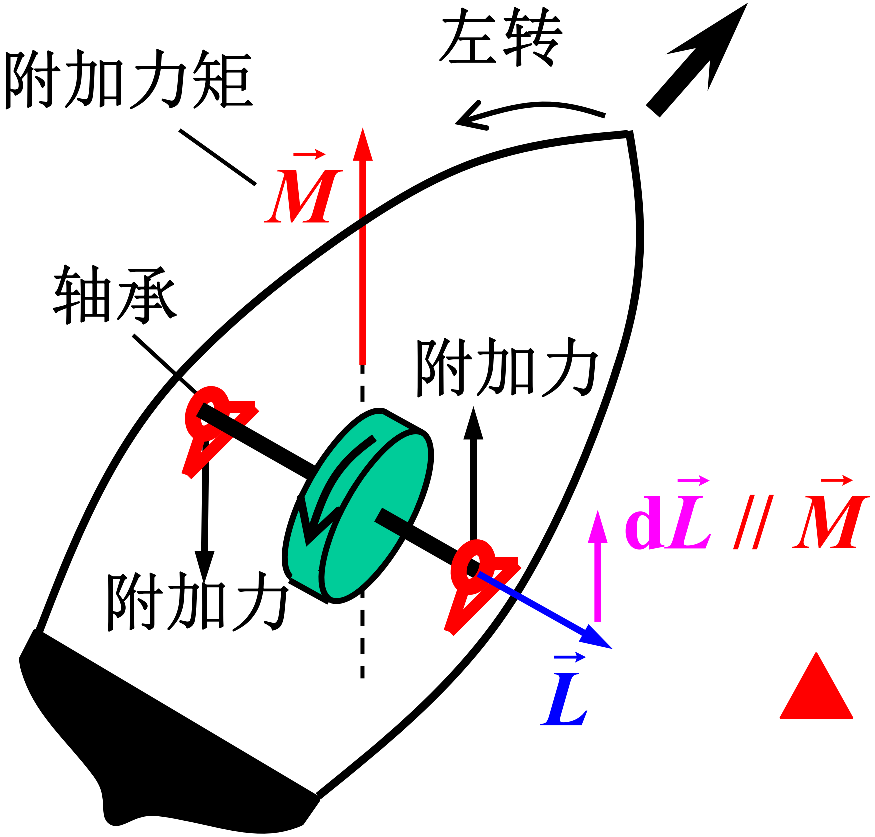


回转罗盘

【思考】转台上的二自由度陀螺会怎么运动？

【讨论】回转效应的利弊

▲ 轮船转弯时，涡轮机轴承要承受附加力。



附加力会损坏轴承，甚至翻船。

对海浪，回转效应则可使船体保持平衡、稳定。

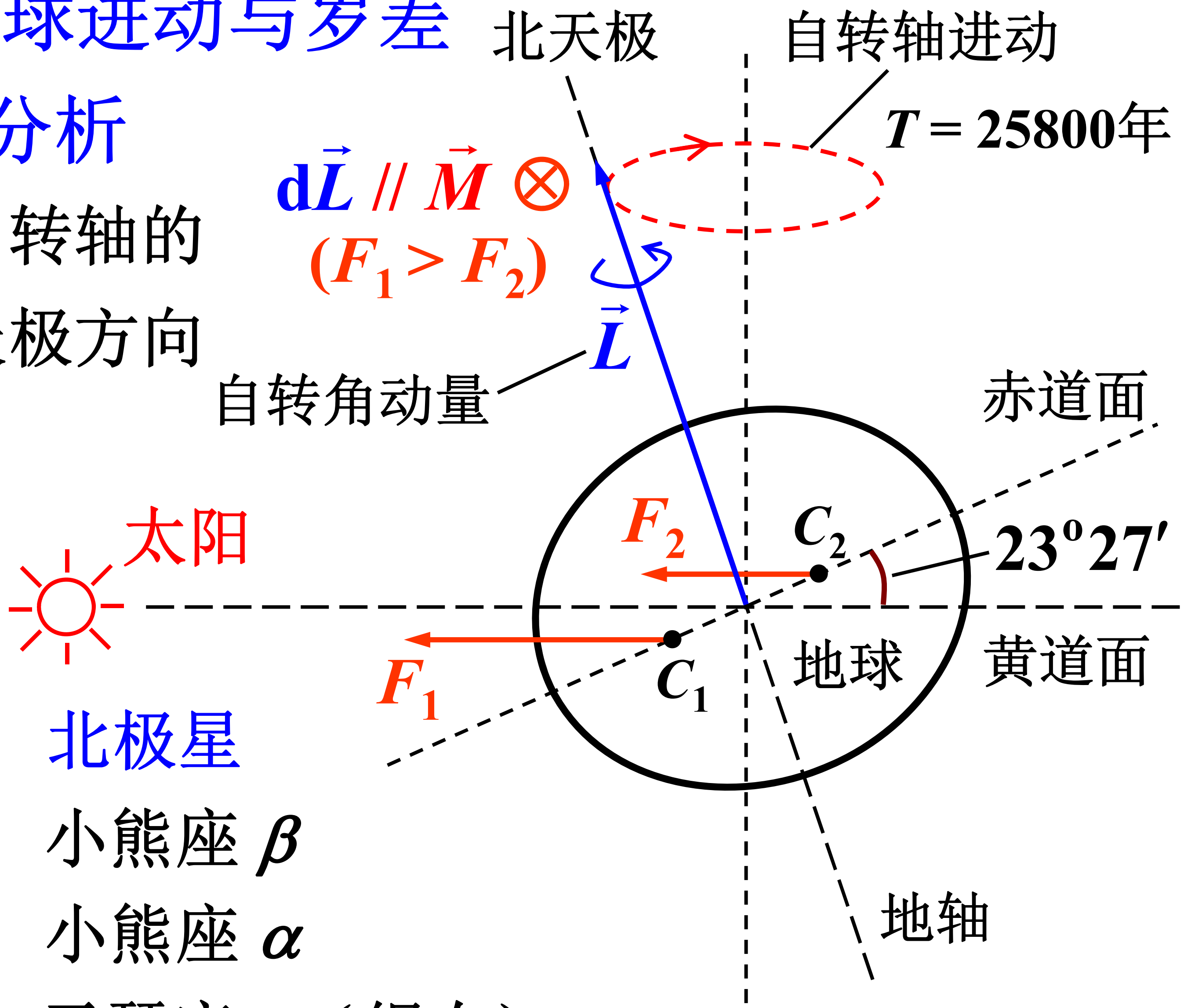
▲ 三轮车拐弯时易翻车

【TV】内侧车轮上翘

【讨论】地球进动与岁差

先太阳系分析

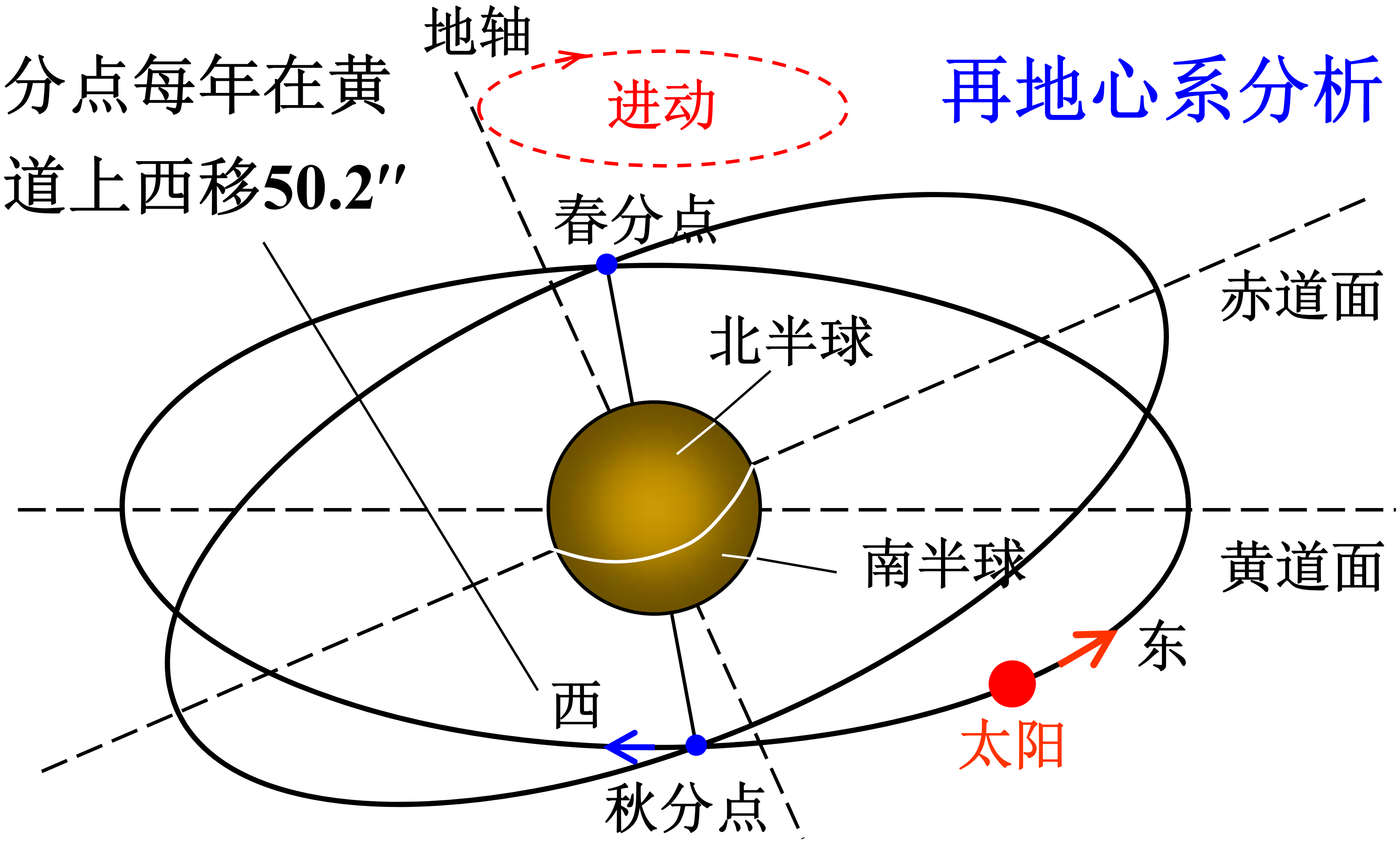
随着地球自转轴的进动，北天极方向不断改变。



	北极星
3000年前	小熊座 β
现在	小熊座 α
12000年后	天琴座 α（织女）

再地心系分析

分点每年在黄道上西移50.2″

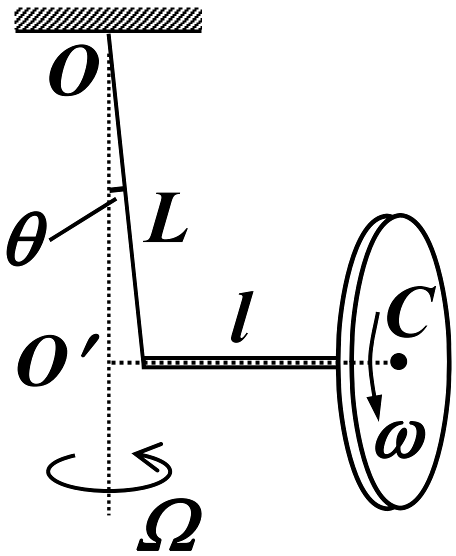


太阳年（回归年）：太阳由春分 → 秋分 → 春分

恒星年：地球绕太阳一周的时间

岁差 = 恒星年 − 太阳年 = 20分23秒

【例】长 l 的轮轴吊在长 L 的绳上。轮子以角速度 ω 高速自转，同时绕 OO' 竖直轴在水平面进动，绳与竖直方向成极小夹角 θ。设轮质量 m，绕轻轴转动惯量 J，C 是质心。求：进动角速度 Ω 和小夹角 θ。（$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$，$CO' \approx l$）



解：θ 很小，近似绕 OO' 轴进动：

$$\Omega = \frac{mgl}{J\omega}$$

质心近似作半径 l 的圆周运动：

$$T_{//} = m\Omega^2 l, \quad T_{\perp} = mg$$

$$T_{//} = T_{\perp}\tan\theta \approx T_{\perp}\theta$$

$$\theta = \frac{\Omega^2 l}{g} = \frac{m^2 g l^3}{J^2\omega^2}$$