第五章 角动量

§ **5.1** 力矩

§ **5.2** 质点角动量定理

§ **5.3** 质点角动量守恒定律

§ **5.4** 质点系的角动量定理和守恒定律

§ **5.5** 质心系中的角动量定理

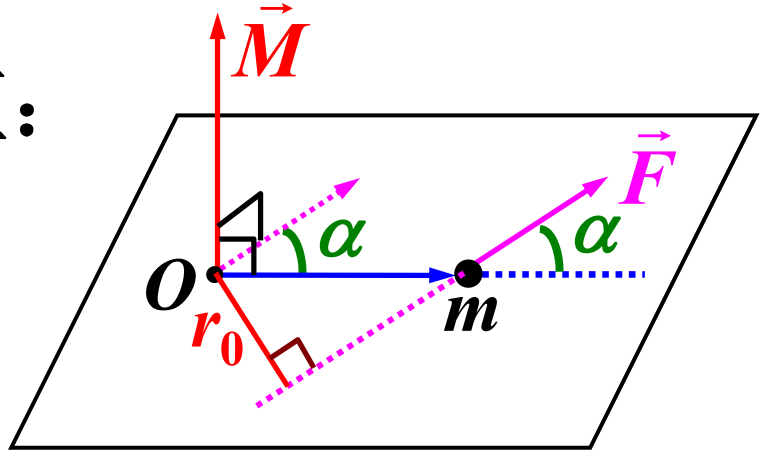
§ **5.6** 两体问题

§ **5.7** 有心力场中的运动

§ **5.8** 对称性和守恒律

§ 5.1 力矩

定义力对参考点 O 的力矩：



$$\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

大小：$M = rF\sin\alpha = r_0 F$

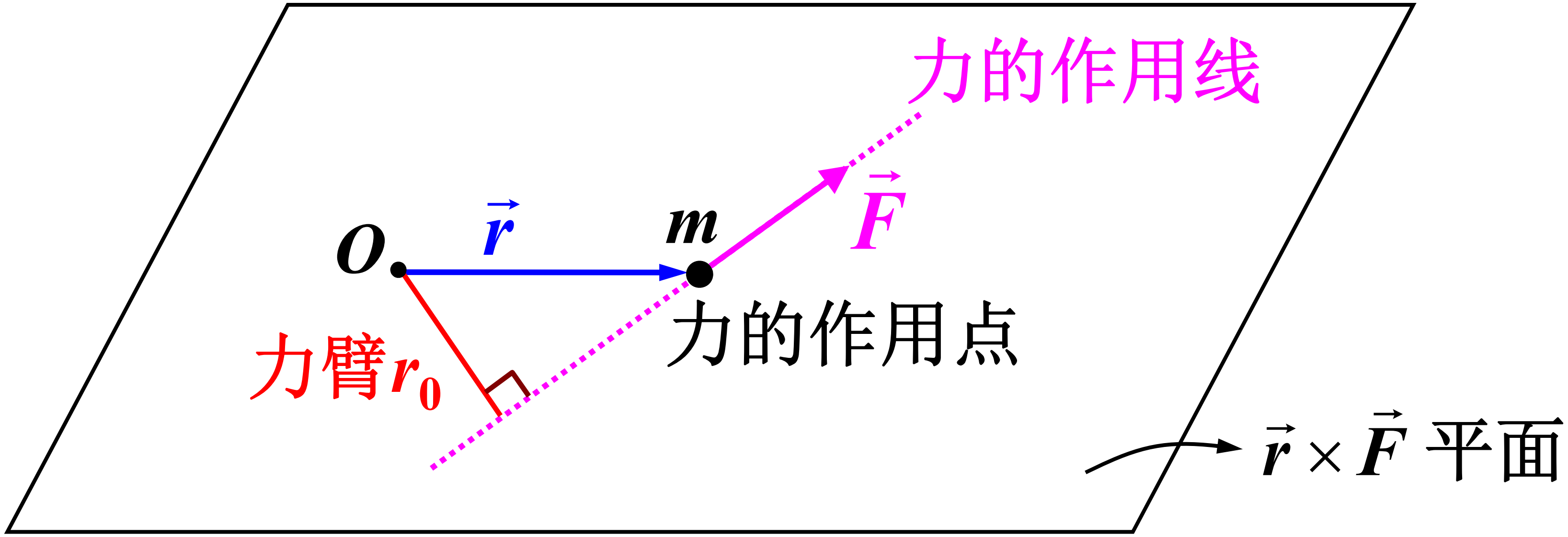
单位：N·m　　r_0—力臂

方向：垂直于 $\vec{r}\times\vec{F}$ 决定的平面（右螺旋）

注意：参考点 O 是参考系内一固定点

$\vec{r}$是力的作用点相对参考点 O 的位矢

力矩要素

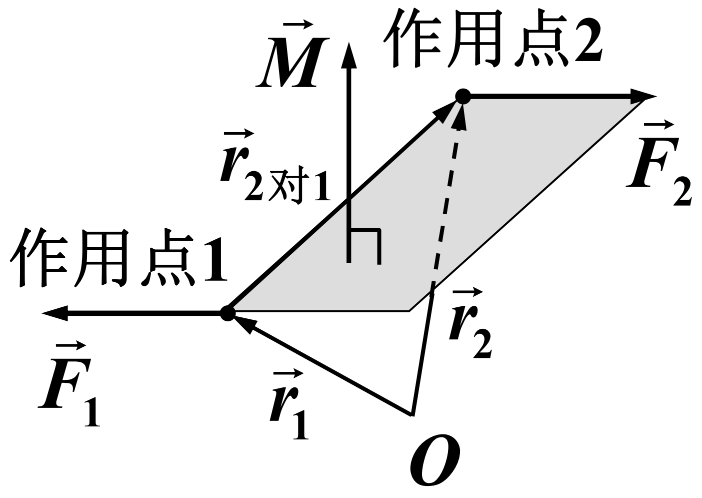


力矩中的力是滑移矢量：只能通过作用点沿作用线移动，这样保证力矩不变。

力偶和力偶矩

力偶：大小相等、方向相反且不在同一直线上的两个力

任选参考点 O，力偶矩：



$$\vec{M}=\vec{r}_1\times\vec{F}_1+\vec{r}_2\times\vec{F}_2$$

$$=(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\times\vec{F}_2$$

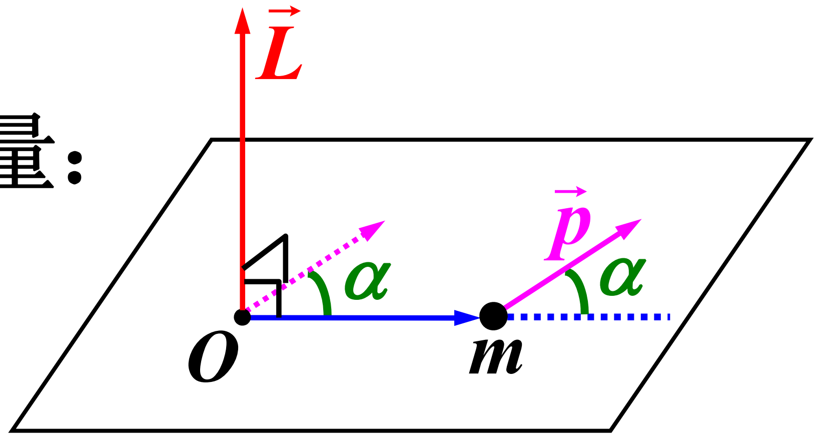
$$=\vec{r}_{2对1}\times\vec{F}_2=\vec{r}_{1对2}\times\vec{F}_1$$

力偶矩与参考点无关，方向 ⊥ 两力所在平面。

§ 5.2 质点角动量定理

一. 角动量

质点对参考点 O 的角动量：



$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})}$$

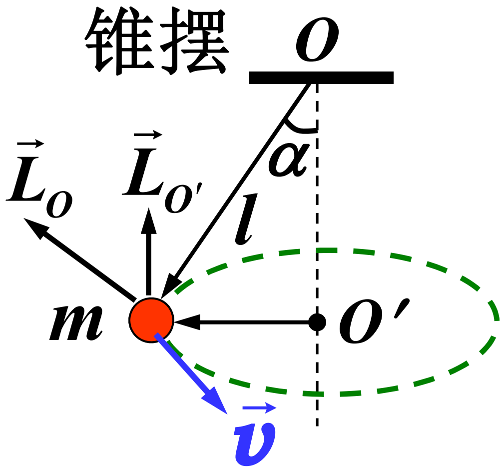
大小： $L = rmv\sin\alpha$， 单位：kg m^2/s

方向：垂直于 $\vec{r}$，$\vec{p}$ 决定的平面（右螺旋）

注意：参考点 O 是参考系内一固定点

$\vec{r}$ 是相对参考点 O 的位矢

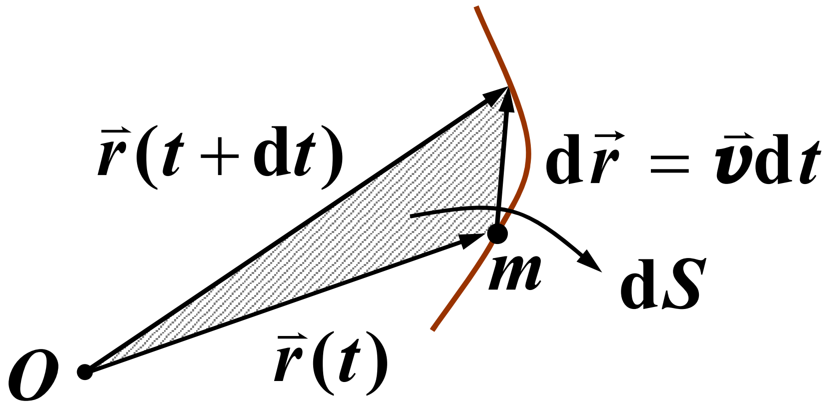
角动量和参考点有关:



$$\vec{L}_O = \vec{r}_{m对O} \times m\vec{v} \quad \begin{cases} L_O = lmv \\ \text{方向变化} \end{cases}$$

$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{m对O'} \times m\vec{v} \quad \begin{cases} L_{O'} = lmv\sin\alpha \\ \text{方向竖直向上不变} \end{cases}$$

面积速率



质点运动时相对参考点 O 存在转动，单位时间内相对参考点 O 的位矢扫过的面积为：

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{r}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\mathrm{d}t\right|$$

面积速率 $$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|=\frac{L}{2m}$$

若质点对 O 点角动量守恒，则面积速率不变。

二. 质点对定点的角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$$

$$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}\qquad\boxed{\mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}\,\mathrm{d}t}$$ （微分形式）

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1}$$ （积分形式）

$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,\mathrm{d}t$ — 冲量矩，力矩对时间的积累作用

锥摆角动量

对 O 点： $\vec{r}_{om}\times\vec{T}+\vec{r}_{om}\times m\vec{g}$

$$=\vec{r}_{om}\times\vec{T}_{//}\neq 0$$

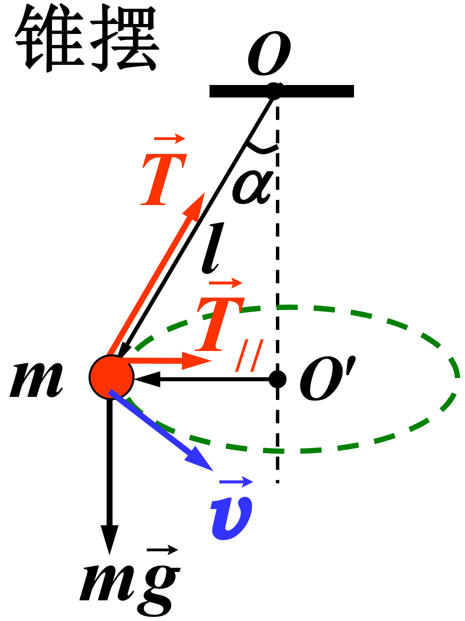
合力矩不为零，角动量变化。

对O'点： $\vec{r}_{o'm}\times\vec{T}+\vec{r}_{o'm}\times m\vec{g}$

$$=\vec{r}_{o'm}\times\vec{T}_{//}=0$$

合力矩为零，角动量大小、方向都不变。

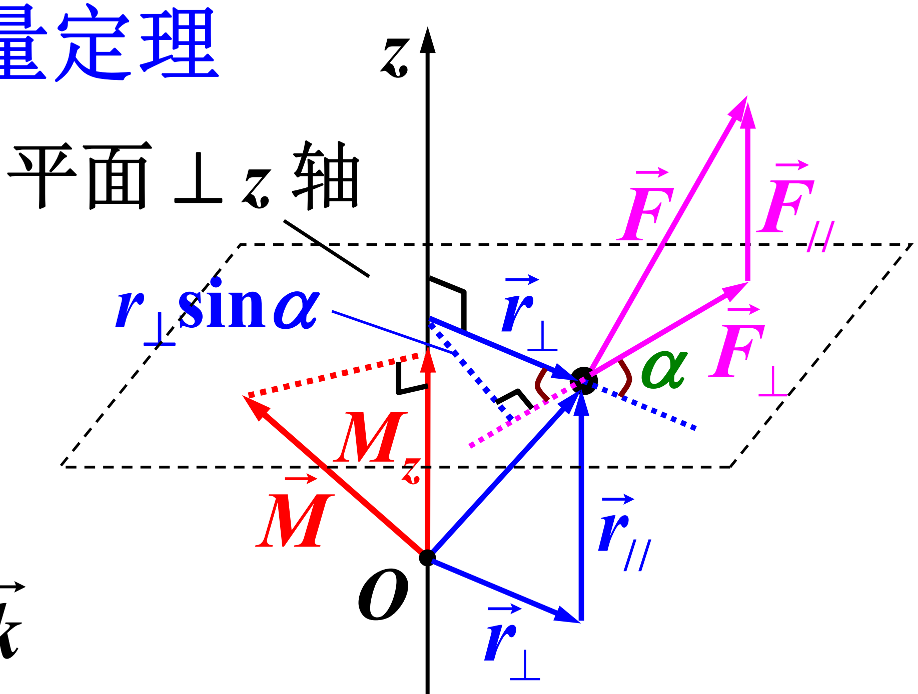
锥摆



【思考】经1/4周期，对O点的力矩的冲量矩？

三. 质点对定轴的角动量定理

1. 力对轴的力矩



把对 z 轴上任一点 O 的力矩向 z 轴投影：

$$M_z = \vec{M}\cdot\vec{k} = (\vec{r}\times\vec{F})\cdot\vec{k}$$

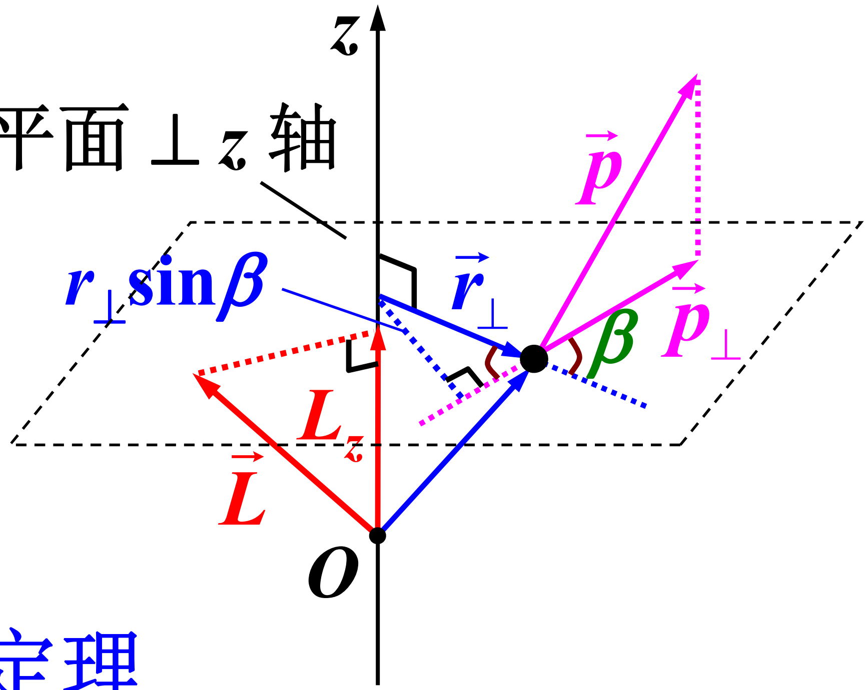
$$= [(\vec{r}_\perp + \vec{r}_{//})\times(\vec{F}_\perp + \vec{F}_{//})]\cdot\vec{k} = (\vec{r}_\perp \times \vec{F}_\perp)\cdot\vec{k}$$

M_z $\begin{cases} \text{大小：} & F_\perp r_\perp \sin\alpha \\ \text{方向：} & \text{产生和 } \vec{k} \text{ 成右手关系的转动效果，则与 } \vec{k} \text{ 同向，否则反向} \end{cases}$

2. 质点对轴的角动量

$$L_z = \vec{L}\cdot\vec{k} = (\vec{r}_\perp \times \vec{p}_\perp)\cdot\vec{k}$$

$$L_z \begin{cases} \text{大小：} \quad p_\perp r_\perp \sin\beta \\ \text{方向判断同 } M_z \end{cases}$$

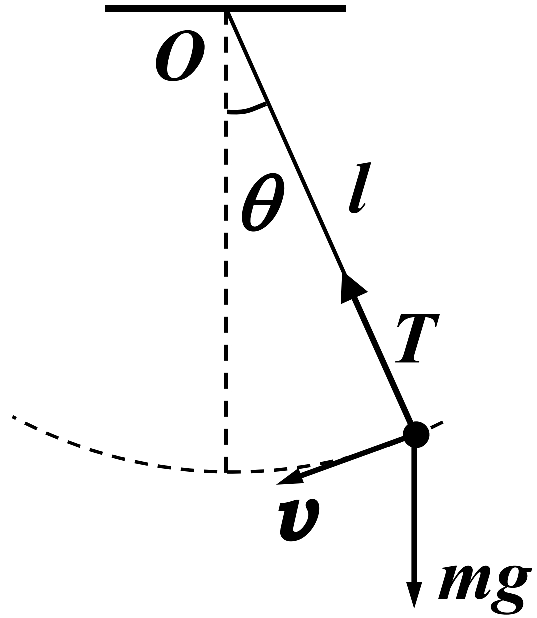


3. 质点对定轴的角动量定理

$$\vec{M}\cdot\vec{k} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{L}\cdot\vec{k}) \quad （\vec{k}\text{是常矢量}）$$

$$\boxed{M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}}$$

【例】推导单摆运动方程



选悬点 O 为参考点，规定顺时针方向为正：

$$M = mgl\sin\theta$$

$$L = lm\boldsymbol{v} = -ml^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

由角动量定理得： $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

小角摆动时： $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

§ 5.3 质点角动量守恒定律

质点对定点的角动量守恒定律

$$\boxed{\vec{M} = 0\text{，}\vec{L} = \text{常矢量}}$$

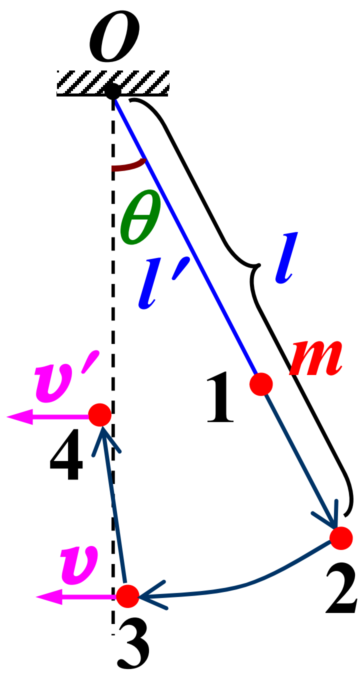
$$\vec{M} = 0 \text{ 条件} \begin{cases} \vec{F} = 0 \\ \vec{F} \text{ 通过参考点，如有心力场} \end{cases}$$

质点对定轴的角动量守恒定律

$$\boxed{M_z = 0,\ \ L_z = \text{常量}}$$

角动量守恒定律是物理学的基本定律之一。

【例】荡秋千原理



$1 \to 2$：人迅速蹲下，使有效摆长 $\overline{Om}$ 由 l' 变为 l；

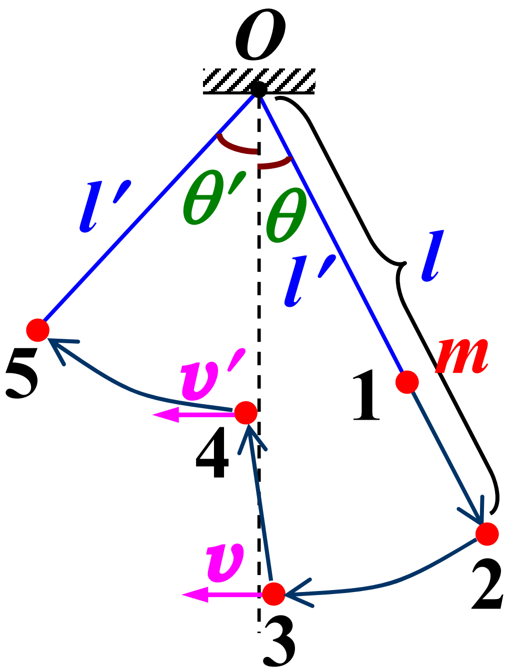
$2 \to 3$：对（人+地球）系统，只重力作功，机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(1-\cos\theta) \qquad (1)$$

$3 \to 4$：人对 O，$M_{外} = 0$

角动量守恒：$mv'l' = mvl \qquad (2)$

4 → 5：对（人+地球）系统，机械能守恒：



$$\frac{1}{2} m v'^2 = mgl'(1-\cos\theta') \qquad (3)$$

由 (1)(2)(3) 可知：

$\theta' > \theta$　即人越摆越高

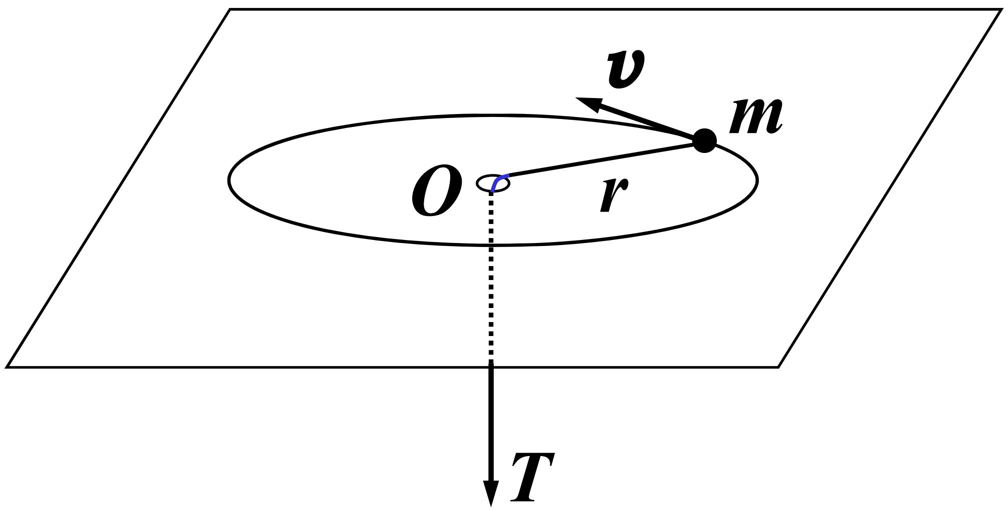
【思考】人越摆越高，能量从哪儿来？

【例】刚性轻绳穿过水平面上小孔 O 拴住小球，使其在水平面可绕 O 作圆周运动，设一切接触光滑，初始速率和半径为 v_0、r_0，

（1）初始拉力 T？

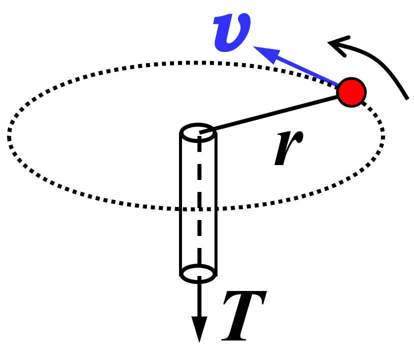
（2）缓慢拉动轻绳使 T 增到 $2T$，小球速率 v？

（3）拉力所作的功。

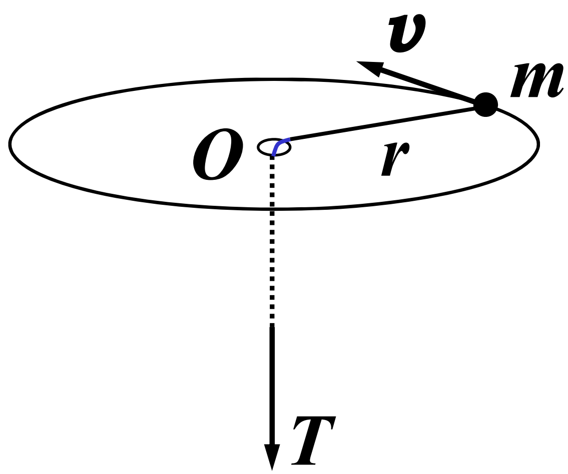


【演示】抡绳小球

离心节速器



解：以 O 为参考点，力矩为零，角动量守恒。



（1） $T = m v_0^2 / r_0$

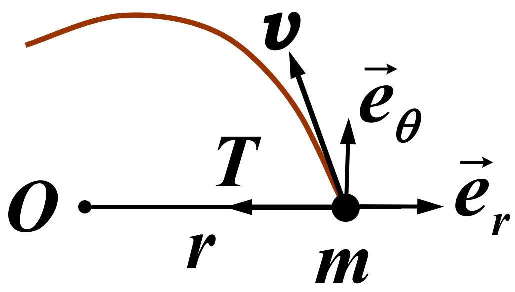
（2）角动量守恒： $m v r = m v_0 r_0$

圆周运动： $\dfrac{m v^2}{r} = 2T = \dfrac{2 m v_0^2}{r_0}$

$\Rightarrow \quad v = \sqrt[3]{2}\, v_0, \quad r = \dfrac{r_0}{\sqrt[3]{2}}$

（3）小球实际作螺旋线运动，缓慢拉动绳，可近似认为小球每瞬间作圆周运动

$$T=\frac{m\upsilon^2}{r},\quad m\upsilon r=m\upsilon_0 r_0$$



$$\mathrm{d}W=\vec{T}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-T\mathrm{d}r=-\frac{m\upsilon_0^2r_0^2}{r^3}\mathrm{d}r$$

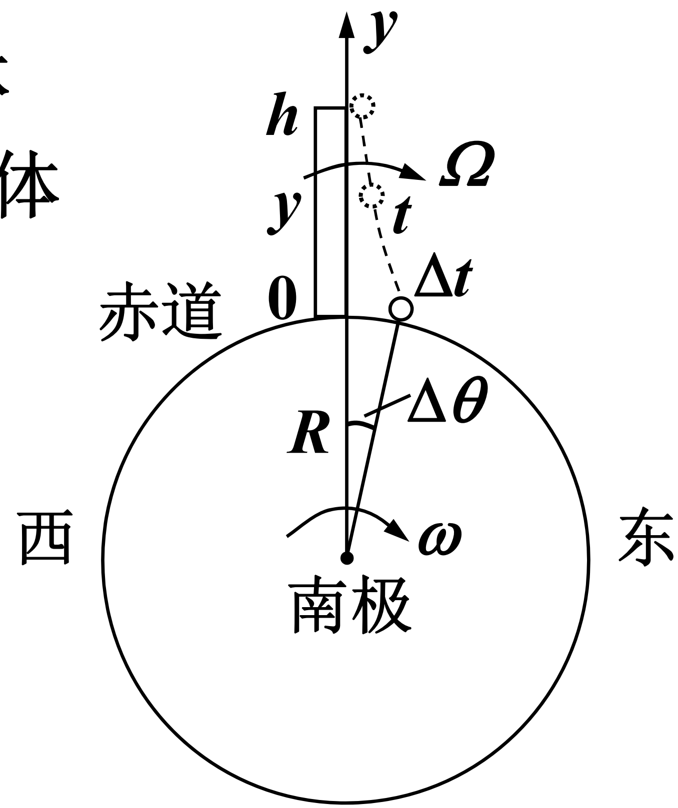
$$W=\int_{r_0}^{r_0/\sqrt[3]{2}}-\frac{m\upsilon_0^2r_0^2}{r^3}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2(\sqrt[3]{4}-1)$$

恰好等于小球动能增量

$$E_k=\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2(\sqrt[3]{4}-1)$$

【例】落体偏东

在地心系求解，Ω 是下落物体角速度，ω 是地球角速度。物体对地球自转轴角动量守恒：



$$\Delta\theta = \int_0^{\Delta t} \Omega \mathrm{d}t - \omega \Delta t \qquad (1)$$

$$t = \sqrt{2(h-y)/g} \qquad (2)$$

$$\Delta t = \sqrt{2h/g} \qquad (3)$$

$$m(R+y)^2 \Omega = m(R+h)^2 \omega \quad \Rightarrow \quad \Omega = \omega \left(\frac{R+h}{R+y} \right)^2 \qquad (4)$$

对 (4) 式在 $y=h$ 附近做展开：

$$\Omega=\omega\left(\frac{R+h}{R+y}\right)^2\approx\omega[1-\frac{2(y-h)}{R+h}]\approx\omega[1+\frac{2}{R}(h-y)] \quad (5)$$

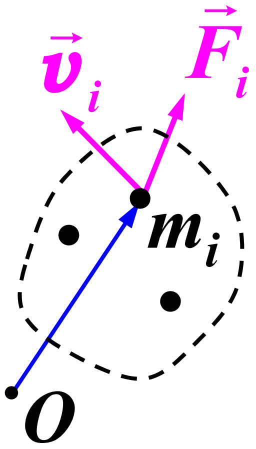
由 (2) 式得： $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}y\Big/\sqrt{2g(h\text{-}y)}$ (6)

由 (5)(6)(1) 式得：

$$\Delta\theta=\int_0^h\frac{\omega\mathrm{d}y}{\sqrt{2g(h\text{-}y)}}\left(1+\frac{2}{R}(h-y)\right)-\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}=\frac{2h\omega}{3R}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

落体东移距离：$R\Delta\theta\approx\dfrac{2h\omega}{3}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

§ 5.4 质点系的角动量定理和守恒定律



质点系角动量：$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \vec{L}_i\right) = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\vec{M}_{i外} + \vec{M}_{i内}\right)$$

$$\vec{M}_{外} = \sum_i \vec{M}_{i外} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{内} = \sum_i \vec{M}_{i内} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}\right) = 0$$

注意：所有 $\vec{L}_i$ 和 $\vec{M}_i$ 都对同一参考点 O 定义。

质点系对定点的角动量定理：$\boxed{\vec{M}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$

质点系对定轴的角动量定理：$\boxed{M_{外z} = \dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}}$

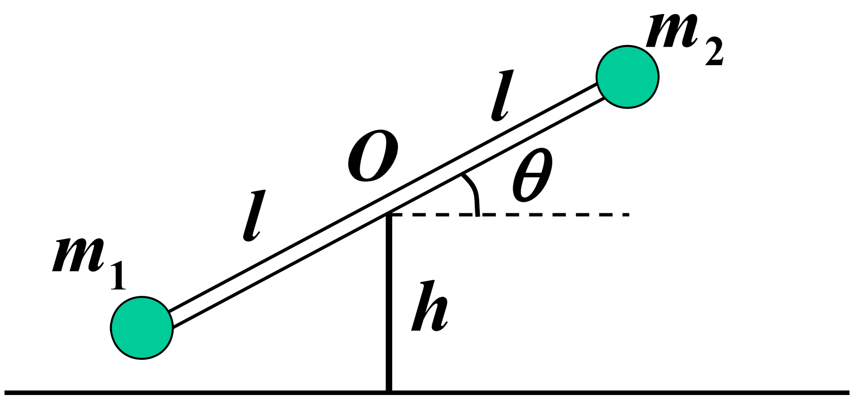
质点系对定点的角动量守恒定律：

$$\boxed{\vec{M}_{外} = 0，\ \vec{L} = 常矢量}$$

质点系对定轴的角动量守恒定律：

$$\boxed{M_{外z} = 0，\ L_z = 常量}$$

【例】长 $2l$ 的轻杆两端固定质量为 m_1、m_2 两物体，支点 O 高 h，系统静止，m_1 着地。使系统瞬间获得顺时针绕向的角速度 ω_0，ω_0 至少多大 m_2 可着地？



解：选物体、轻杆为系统，设顺时针转动为正，

对 O 的力矩、角动量：

$$M=-m_1gl\cos\theta+m_2gl\cos\theta=(m_2-m_1)gl\cos\theta$$

$$L=lm_1\omega l+lm_2\omega l=(m_1+m_2)l^2\omega$$

根据角动量定理： $\boldsymbol{M}=\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{(m_2-m_1)g}{(m_1+m_2)l}\cos\theta$$

几何约束关系： $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=-\omega$

$$\Rightarrow \quad \omega\mathrm{d}\omega=-\frac{(m_2-m_1)g}{(m_1+m_2)l}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\int_{\omega_0}^{0}\omega d\omega=\int_{\theta_0}^{-\theta_0}-\frac{(m_2-m_1)g}{(m_1+m_2)l}\cos\theta\mathrm{d}\theta \qquad \sin\theta_0=\frac{h}{l}$$

$$\omega_0=\frac{2}{l}\sqrt{\frac{(m_1-m_2)gh}{m_1+m_2}}$$

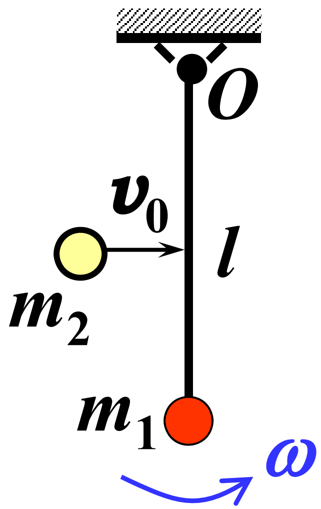
(机械能守恒直接给出：

$$2(m_1-m_2)gh=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l^2\omega_0^2$$

)

【例】长 l 的轻杆固结小球 m_1，小球 m_2 以水平速度 v_0 碰杆中部并粘合。

求：碰撞后杆的角速度 ω



解：选 m_1、m_2、杆为系统

碰时重力和轴力通过 O，

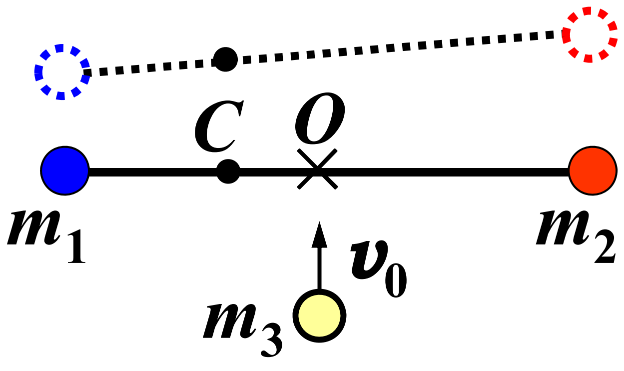
对 O 角动量守恒：

$$\frac{l}{2}m_2 v_0 = l m_1 \omega l + \frac{l}{2}m_2\omega\frac{l}{2}$$

$$\omega = 2m_2 v_0 / (4m_1 l + m_2 l)$$

【思考】（m_1+m_2）的水平动量是否守恒？

【例】光滑水平面上，m_1, m_2 用长为l的轻杆连结，静止放置，m_3 以速度 v_0 垂直射向杆中心 O，发生弹性碰撞。



求：碰后m_1, m_2, m_3速度，m_1和m_2的质心速度

解：选 m_1、m_2、m_3 为系统，

弹性碰撞：动能守恒

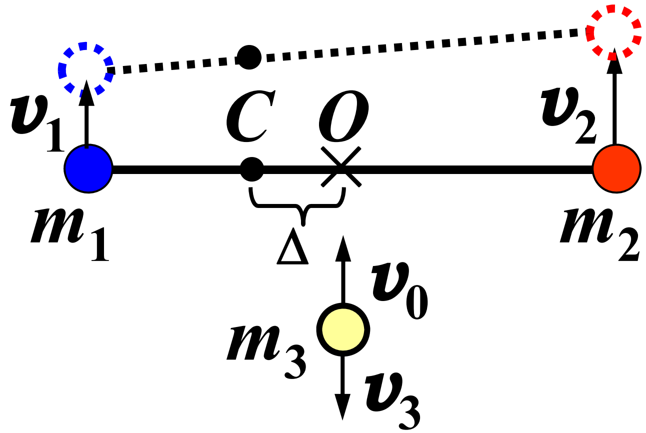
水平方向不受外力 $\begin{cases} \text{水平方向动量守恒} \\ \text{垂直水平方向角动量守恒} \end{cases}$

设碰后m_1、m_2、m_3的速度分别为v_1、v_2、v_3

动能守恒： $$\frac{1}{2}m_3 v_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2$$

动量守恒： $$m_3 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_3 v_3$$

角动量守恒：



选与 O 点重合的定点，

规定垂直页面向外为正：

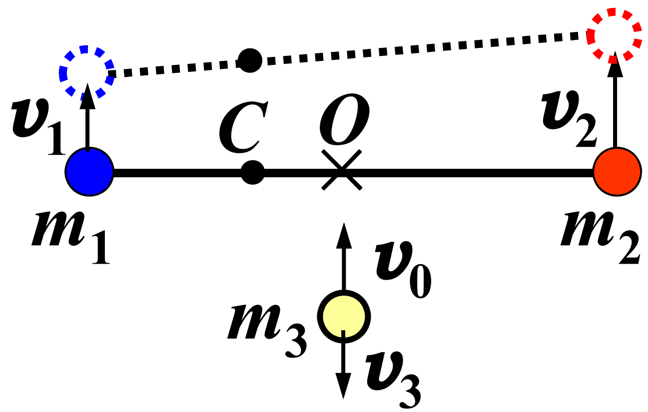
$$0 = -m_1 v_1 \frac{l}{2} + m_2 v_2 \frac{l}{2}$$

若选与质心 C 重合的定点有：

$$m_3 v_0 \Delta = -m_1 v_1 (\frac{l}{2} - \Delta) + m_2 v_2 (\frac{l}{2} + \Delta) - m_3 v_3 \Delta$$

解得：

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{4m_2m_3}{4m_1m_2+(m_1+m_2)m_3}v_0 \\ v_2 = \dfrac{4m_1m_3}{4m_1m_2+(m_1+m_2)m_3}v_0 \\ v_3 = \dfrac{4m_1m_2-(m_1+m_2)m_3}{4m_1m_2+(m_1+m_2)m_3}v_0 \end{cases}$$

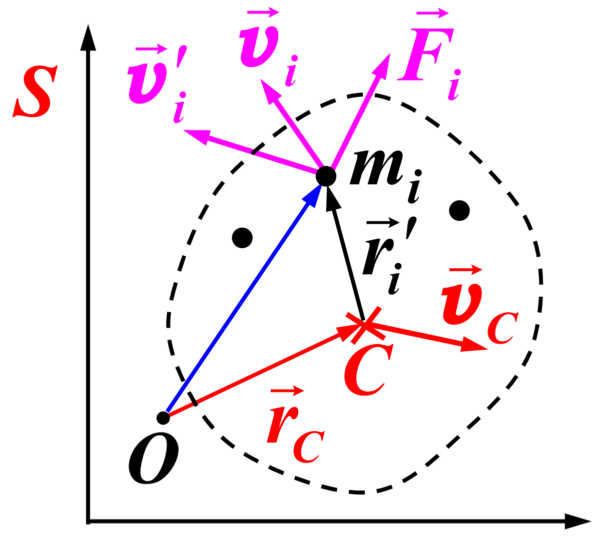


$$v_C = \frac{8m_1m_2m_3}{(m_1+m_2)[4m_1m_2+(m_1+m_2)m_3]}v_0$$

若 $m_1 \neq m_2$，$v_1 \neq v_2$，碰后杆、m_1、m_2系统既平动又转动（角速度会求吗？）。

§ 5.5 质心系中的角动量定理

一. 角动量关系



设 O 是惯性系 S 内一固定点，

S 系中质点系对 O 点角动量：

$$\boxed{\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)}$$

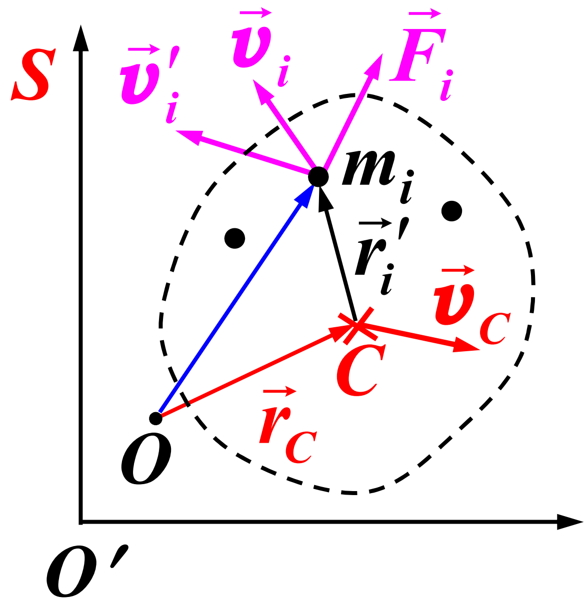
S 系中质心 C 对 O 点角动量：

$$\boxed{\vec{L}_C = \vec{r}_C \times (\sum m_i) \vec{v}_C = \vec{r}_C \times \vec{P}}$$

质心系中，质点系对质心 C 的角动量：

$$\boxed{\vec{L}' = \sum \vec{r}_i' \times (m_i \vec{v}_i')}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_C}$$



证明： 先证明 $\sum m_i \vec{r}_i' = 0$

$$\sum m_i \vec{r}_i' = \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_C)$$

$$= \sum m_i [(\vec{r}_i + \vec{r}_{O对O'}) - (\vec{r}_C + \vec{r}_{O对O'})]$$

$$= \sum m_i (\vec{r}_{i对O'} - \vec{r}_{C对O'})$$

$$= (\sum m_i) \frac{\sum m_i \vec{r}_{i对O'}}{(\sum m_i)} - \sum m_i \vec{r}_{C对O'} = 0$$

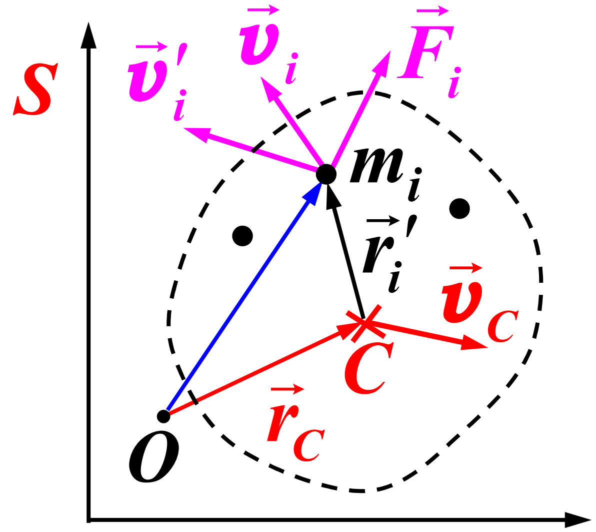
质心位矢定义

$$\vec{L}=\sum \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$

$$=\sum (\vec{r}_i' + \vec{r}_C) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_C)$$

$$=\sum \vec{r}_i' \times (m_i \vec{v}_i') + \sum \vec{r}_C \times (m_i \vec{v}_i')$$

$$+\sum (m_i \vec{r}_i') \times \vec{v}_C + \vec{r}_C \times \sum m_i \vec{v}_C$$

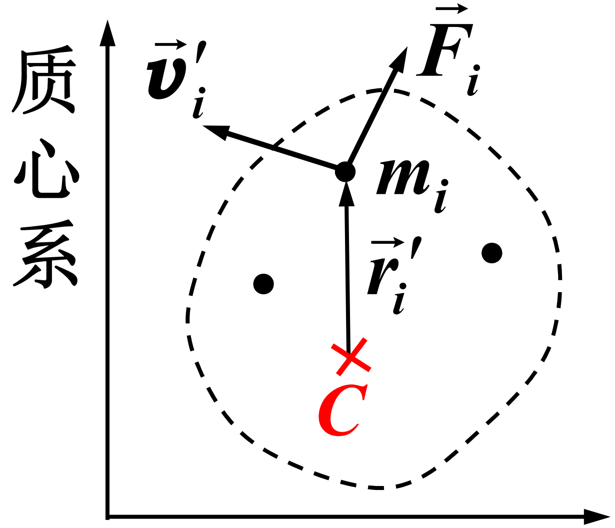


利用关系： $\sum m_i \vec{v}_i' = 0, \quad \sum m_i \vec{r}_i' = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_C$$

二. 质心系中质点系对质心的角动量定理

$$\boxed{\vec{M}'_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}}$$



$$\vec{L}' = \sum \vec{r}'_i \times (m_i \vec{v}'_i)$$

$$\vec{M}'_{外} = \sum \vec{r}'_i \times \vec{F}_i$$

—— 外力对质心 C 的合力矩

在质心系中，质点系对质心的角动量定理成立，与质心系是否是惯性系无关。

证明：

若质心系是惯性系，则必然成立。

如果质心系是非惯性系，则惯性力对质心的力矩为零：

$$\vec{M}_{惯C}=\sum_i \vec{r}_i'\times(-m_i\vec{a}_C)=-(\sum_i m_i\vec{r}_i')\times\vec{a}_C=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}=\vec{M}'_{外}+\vec{M}_{惯C}=\vec{M}'_{外}$$

仍然成立。

或者用角动量关系证明：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_C}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}_C\times\vec{P})}{\mathrm{d}t}=\underline{\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t}\times\vec{P}}+\vec{r}_C\times\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}_C\times\sum\vec{F}_i$$

$$\vec{v}_C\times m\vec{v}_C=0$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{L}-\vec{L}_C)=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i-\vec{r}_C\times\sum\vec{F}_i$$

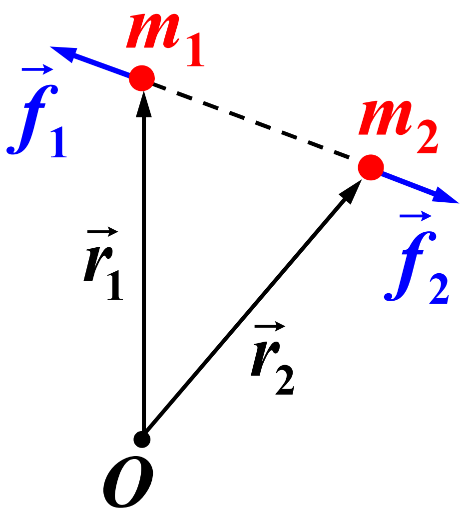
$$=\sum\vec{r}_i{}'\times\vec{F}_i=\vec{M}'_{外}$$

§ 5.6 两体问题

两物体的运动，只是由一对大小相等，方向相反的力造成，这类问题称为两体问题。

如行星绕太阳运动，α粒子被原子核散射等。

这类问题可简化为单体问题处理。



惯性系中固定点

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d} t^2} = \vec{f}_1 \qquad (1)$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d} t^2} = \vec{f}_2 = -\vec{f}_1 \qquad (2)$$

$m_2 \times (1) - m_1 \times (2)$:

$$m_1 m_2 \frac{\mathrm{d}^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\mathrm{d}t^2} = (m_1 + m_2)\vec{f}_1$$

单体运动方程：

$$\boxed{\mu \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_{相对}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{f}}$$

μ — 约化质量

$\vec{r}_{相对}$ — 相对位矢

一质点相对另一质点的运动，可等效成质量为 μ 的质点受相同力作用，在以另一质点为原点的平动参考系中的运动，而不需要考虑惯性力的影响 — 包含在 μ 中。

注意：单体方程中的力 $\vec{f}$ 还是原来的一个力，即使和质量有关，如万有引力，也不需要用约化质量计算，相应势能也是如此。

对单体只要采用约化质量，则牛 II 定律及与其有关的动量、角动量、能量定理都适用。

▲ 单体速度等于两体的相对速度：

$$\vec{v}_{\text{单}} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}_{\text{相对}}}{\mathrm{d}\,t} = \vec{v}_r$$

▲ 单体动能等于两体的内动能：

$$E_{k单} = \frac{1}{2}\mu v_r^2 = E'_k = E_k - E_{kC}$$

▲ 单体机械能等于两体在质心系中的机械能：

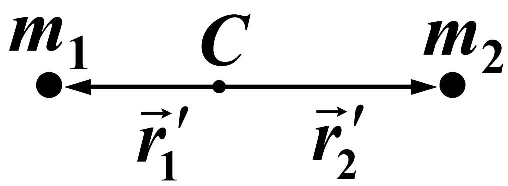
$$E_{单} = \frac{1}{2}\mu v_r^2 + V(r_{相对}) = E'_k + V(r_{相对}) = E'$$

注意：势能 $V(r_{相对})$ 源于两体间的一对力。

▲ 单体角动量等于两体在质心系中对质心的角动量：

$$\vec{L}_{单} = \vec{r}_{相对} \times \mu \vec{v}_r = \vec{L}' = \vec{L} - \vec{L}_C$$

证明：由杠杆定理可知：



$$\vec{r}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_{1对2} \qquad \vec{r}_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_{1对2}$$

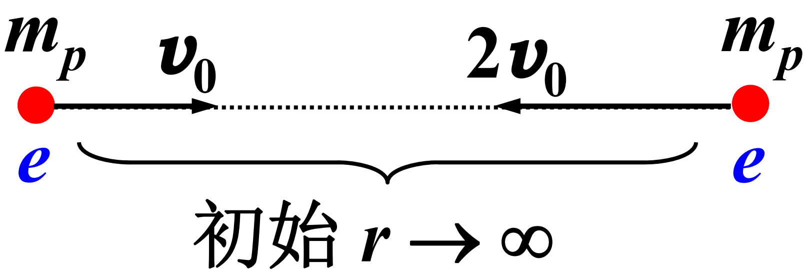
$$\Rightarrow \quad \vec{\upsilon}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{\upsilon}_{1对2} \qquad \vec{\upsilon}_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{\upsilon}_{1对2}$$

$$\vec{L}' = \vec{r}_1' \times m_1\vec{\upsilon}_1' + \vec{r}_2' \times m_2\vec{\upsilon}_2'$$

$$= \vec{r}_{1对2} \times \mu\vec{\upsilon}_{1对2}$$

$$= \vec{L}_{单}$$

【例】用二体问题方法重解两质子相碰时能达到的最近距离问题

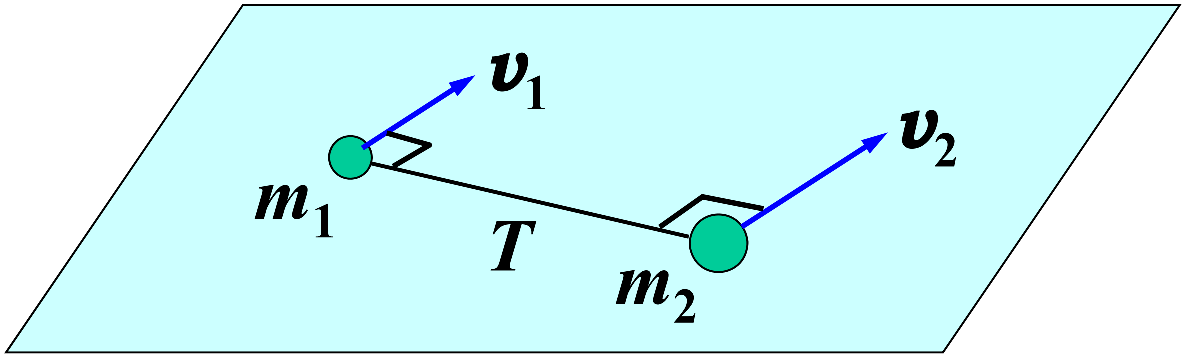


任选一质子，由单体机械能守恒直接给出：

$$\frac{1}{2}\mu(3v_0)^2 = k\frac{e^2}{r_{\min}}$$

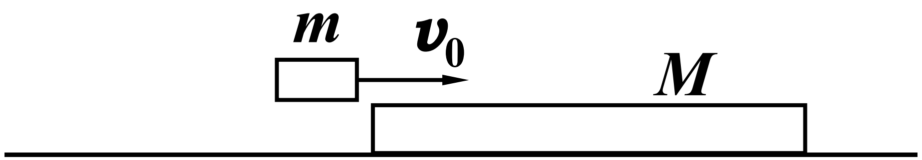
【例】光滑水平面上，两小球 m_1、m_2 用长 l 的轻绳相连。开始时绳拉直，m_1、m_2 的速率分别为 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$，方向一致且与绳垂直。

求：此时绳的张力 T 。



答案：$T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \dfrac{(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)^2}{l}$

【例】长 L、质量 M 的平板静置于光滑水平面上，质量 m 的木块以速度 v_0 射入平板表面上，两者间摩擦系数 μ，求木块恰好未能脱离平板表面条件。



解： 对单体列动能定理方程：

$$\mu mgL = \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v_0^2$$

$$\Rightarrow \quad v_0^2 = 2\mu\frac{M+m}{M}gL$$

【例】采用二体问题方法讨论二体正碰过程中系统动能损失。

碰撞中的动能损失源于内力作功，与参考系无关。

引入恢复系数： $e=\dfrac{v_r}{v_{0r}},\quad 0\le e\le 1$

$$E_{k损}=-W_{内}=\frac{1}{2}\mu v_{r0}^2-\frac{1}{2}\mu v_r^2=\frac{1}{2}(1-e^2)\mu v_{r0}^2$$

换回原惯性系有：

$$E_{k损}=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_{20}-v_{10})^2$$

弹性：$e=0$，完全非弹性：$e=1$，非弹性：$0<e<1$

§ 5.7 有心力场中的运动

一. 有心力

力的作用线始终通过一固定点 — 力心

各向同性有心力

$$\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$$ （$\vec{r}$是相对力心的位矢）

势能： $$V(r) = \int_r^{r_0} f(r)\mathrm{d}r + V(r_0)$$

二. 有心力场中质点运动方程

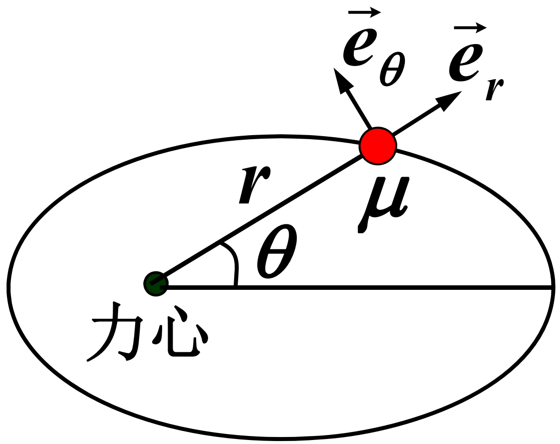
采用两体方法，注意 2 个重要守恒量：

▲ 角动量 $\vec{L} =$ 常矢量

轨道在同一个平面上

▲ 机械能： $E =$ 常量

采用极坐标系：



位矢： $\vec{r} = r\vec{e}_r$

速度： $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

角动量守恒：

$$\vec{L}=\vec{r}\times\mu\vec{v}=r\vec{e}_r\times\mu(\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)=\mu r^2\dot{\theta}(\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta)$$

$$\boxed{\mu r^2\dot{\theta}=L\ (\text{常量})} \qquad (1)$$

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}\mu\vec{v}\cdot\vec{v}+V(r)=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)=E$$

代入 (1) 得关于 r 的方程：

$$\boxed{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}+V(r)=E\ (\text{常量})} \qquad (2)$$

由方程 (1)(2) 消去dt 得：

$$\mathrm{d}\theta = \frac{L\mathrm{d}r}{r\sqrt{2\mu E r^2 - 2\mu r^2 V(r) - L^2}}$$

积分得轨道方程：

$$\boxed{\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{L\mathrm{d}r}{r\sqrt{2\mu E r^2 - 2\mu r^2 V(r) - L^2}}}$$

轨道特征：封闭性、形状、大小和取向由 $\vec{L}$、E 以及 $V(r)$ 的具体形式决定。

三. 平方反比律力场的轨道

势能函数记为： $$V(r) = -\frac{C}{r} \quad \begin{cases} C > 0 & \text{引力势能} \\ C < 0 & \text{斥力势能} \end{cases}$$

带入轨道方程得： $$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{L\mathrm{d}r}{r\sqrt{2\mu E r^2 + 2\mu C r - L^2}}$$

设： $$r_0 = \frac{L^2}{\mu C} \begin{cases} > 0 & \text{引力势能} \\ < 0 & \text{斥力势能} \end{cases}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu C^2}}$$

$$u = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}, \quad \mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}r}{r^2}, \quad u_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \theta - \theta_0 = -\int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(\varepsilon / r_0\right)^2 - u^2}}$$

$$\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{b - ax^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{b}} x\right) + C \quad (a > 0) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \theta - \theta_0 = -\arcsin\left(\frac{|r_0|}{\varepsilon} u\right)$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{|r_0|} \varepsilon \cos\theta} \quad （取\ \theta_0 = -\frac{\pi}{2}）$$

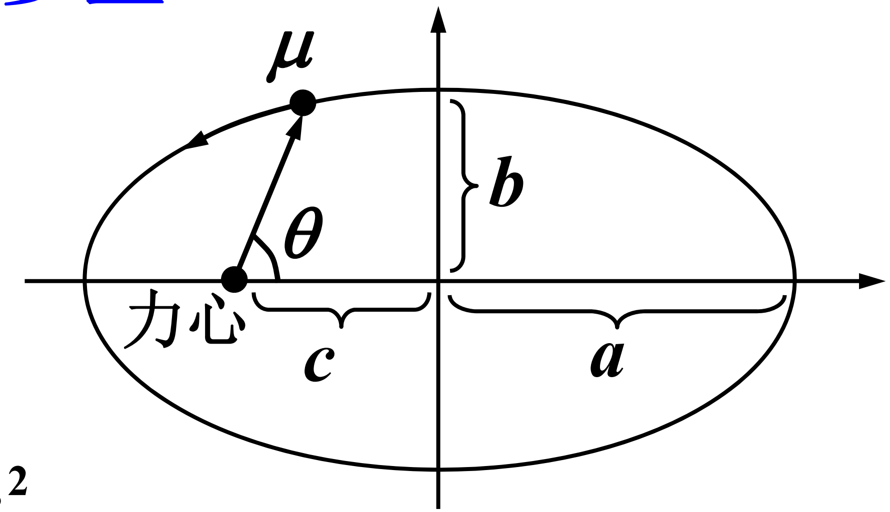
1. 引力情况

$$p = r_0 = \frac{L^2}{\mu C} > 0, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu C^2}}$$

轨道方程： $r = \dfrac{p}{1 - \varepsilon\cos\theta}$ （圆锥曲线）

$$\begin{cases} E < 0,\ \varepsilon < 1, & \text{椭圆轨道（束缚态，封闭轨道）} \\ E = 0,\ \varepsilon = 1, & \text{抛物轨道（刚好逃逸）} \\ E > 0,\ \varepsilon > 1, & \text{双曲轨道（不受约束，开放轨道）} \end{cases}$$

椭圆轨道参量



$$a^2 = b^2 + c^2$$

近地点、远地点：

$$r_{\min} = a - c = r\big|_{\theta=\pi} = \frac{p}{1+\varepsilon}, \quad r_{\max} = a + c = r\big|_{\theta=0} = \frac{p}{1-\varepsilon}$$

偏心率 $\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$ 焦点参数 $p = \dfrac{b^2}{a}$

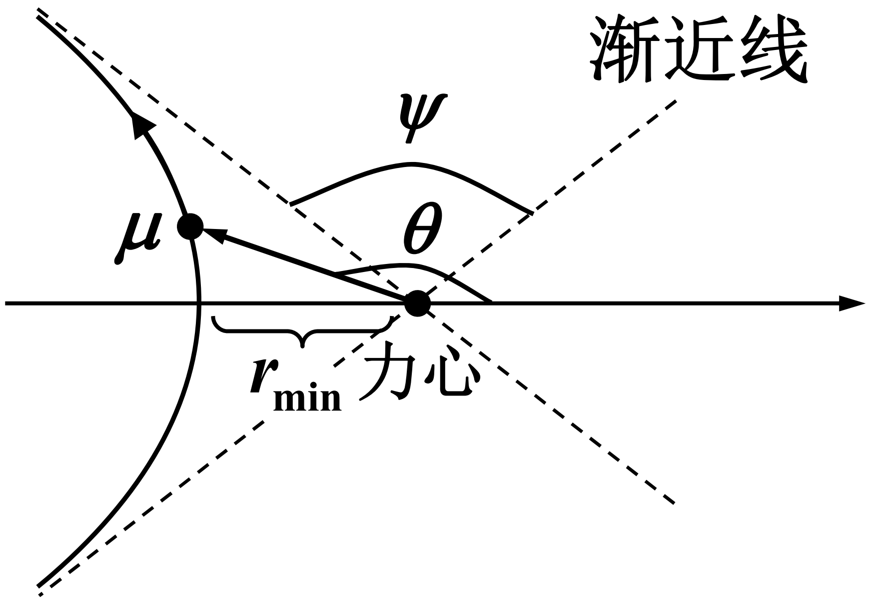
2. 斥力情况

$$p=-r_0=-\frac{L^2}{\mu C}>0,\quad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu C^2}}$$

轨道方程： $r=\dfrac{-p}{1+\varepsilon\cos\theta}$ （双曲线）

只能 $\varepsilon>1$ 且 $\cos\theta<-1/\varepsilon$ 才能保证 $r>0$

所以只能是双曲轨道，不受约束，开放轨道



近地点： $r_{\min} = r\big|_{\theta=\pi} = \dfrac{-p}{1-\varepsilon}$

$$r \to \infty \quad \Rightarrow \quad \psi = \pi - 2\arccos(\frac{1}{\varepsilon})$$

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

四. 有效势和径向运动

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}+V(r)=E$$

径向动能： $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$

离心势能：等效于斥力势能

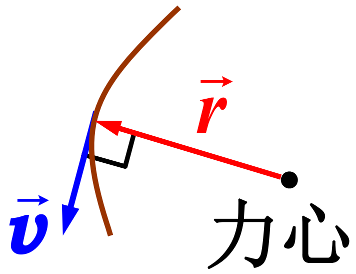
有效势能： $V_{eff}(r)=\frac{L^2}{2\mu r^2}+V(r)$

在径向 r 方向，质点相当于在保守场 $V_{eff}(r)$ 中运动，径向动能和有效势能相互转化。

对万有引力场：

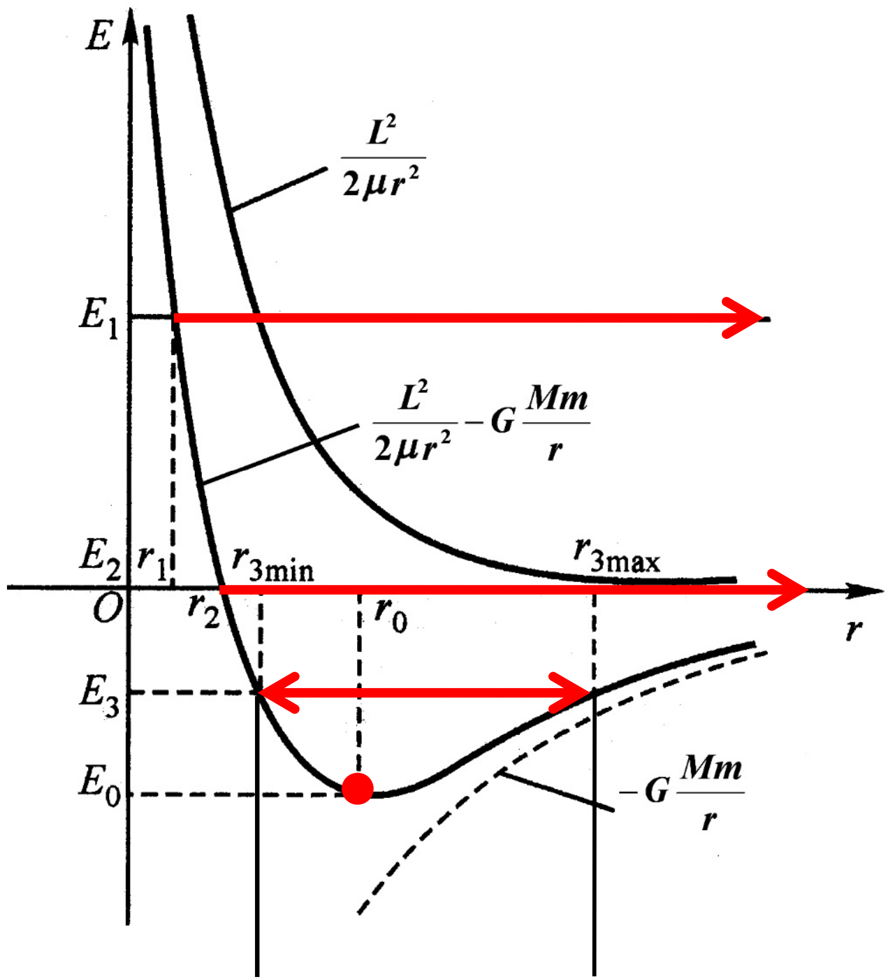
$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{GMm}{r}=E$$

近、远地点条件及方程：



$$\dot{r}=0$$

$$\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{GMm}{r}=E$$



$E = E_1 > 0$，双曲轨道

$r_{\min} = r_1 \le r < \infty$

$E = E_2 = 0$，抛物轨道

$r_{\min} = r_2 \le r < \infty$

$E = E_3 < 0$，椭圆轨道

$r_{3\min} \le r \le r_{3\max}$

$E = E_0 = V_{eff\,\min}$，圆轨道

$r = r_0$

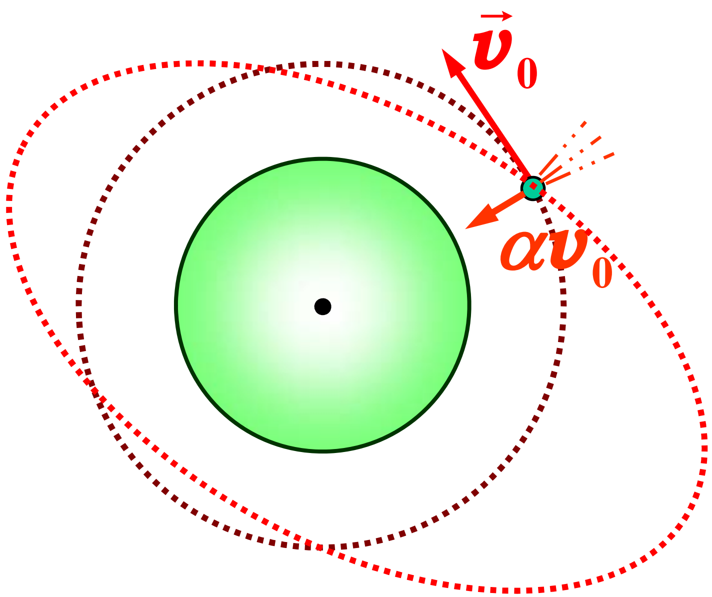
【思考】由势能曲线求椭圆轨道周期

变轨

改变初始条件 $\vec{r}_0, \vec{v}_0$ 可改变轨道特征。

例如宇宙飞船变轨：圆 $\rightarrow$ 椭圆轨道

极短时间向外侧点火喷气，获得指向地心的很小的附加速度 αv_0



【例】 地球半径 $R = 6400\text{km}$，卫星在高度 $h_1=$ 800km 的圆形轨道上运动，速度 $\boldsymbol{v}_1 = 7.5\text{km/h}$。今在星外侧点燃小火箭，其反冲力指向地心，使卫星获得指向地心的附加速度 $\boldsymbol{v}_2 = 0.2\text{km/h}$。

求：此后卫星轨道最低点和最高点的高度？

解：卫星获得的附加速度 $\boldsymbol{v}_2$ 和火箭反冲力指向地心，则卫星的角动量仍守恒。以后卫星进入椭圆轨道。

设近地点（远地点）处速度和高度分别为$\boldsymbol{v}$、h，根据角动量守恒和机械能守恒有：

$$mv_1(R+h_1)=mv(R+h)$$

$$\frac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2)-G\frac{Mm}{R+h_1}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R+h}$$

卫星原来作圆周运动： $G\frac{Mm}{(R+h_1)^2}=m\frac{v_1^2}{R+h_1}$

以上三式消去v、G、M、m 可得：

$$h_{\max}=\frac{v_1(R+h_1)}{v_1-v_2}-R=997\text{km}$$

$$h_{\min}=\frac{v_1(R+h_1)}{v_1+v_2}-R=613\text{km}$$

五. 天体运动

开普勒定律

- 第一定律（轨道定律）：每个行星都在以太阳为焦点的一个椭圆轨道上运动。
- 第二定律（面积定律）：行星相对太阳的矢径，在相等的时间内扫过相等的面积。
- 第三定律（周期定律）：行星椭圆轨道半长轴 a 的立方与运动周期 T 的平方之比为相同的常量 K — 开普勒常量。

$$\frac{a^3}{T^2} = K$$

1. 开普勒第一定律

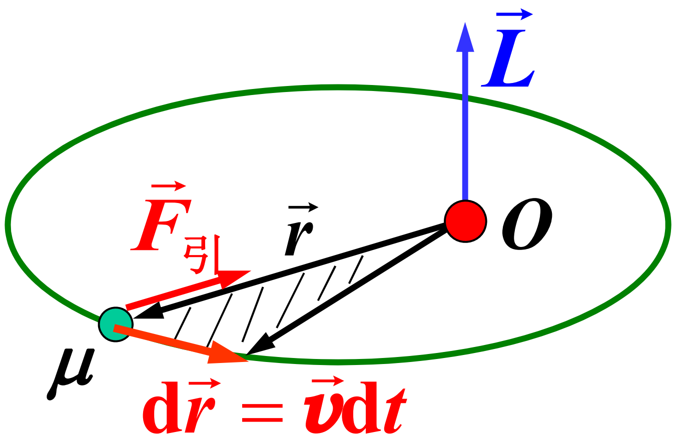
根据前面的讨论有：

轨道方程： $r=\dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}$

$$p=\frac{L^2}{\mu GMm},\quad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu G^2M^2m^2}}$$

行星受引力束缚，$E<0$，$\varepsilon<1$，椭圆轨道。

2. 开普勒第二定律



$\vec{F}_{引}$ 通过 O 点：

$$\vec{L} = \vec{r} \times (\mu \vec{v}) = 常矢量$$

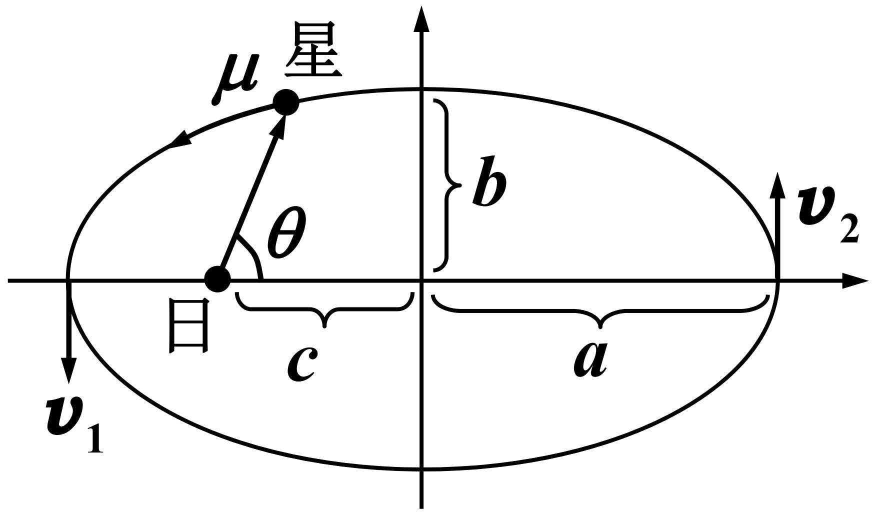
（1）$L =$ 常量

（2）轨道在同一平面内

面积速率：

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{|\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{r}|}{2\mathrm{d}t} = \frac{|\vec{r} \times \vec{v} \cdot \mathrm{d}t|}{2\mathrm{d}t} = \frac{L}{2\mu} = 常量$$

3. 开普勒第三定律



对近日、远日点列方程：

角动量守恒：

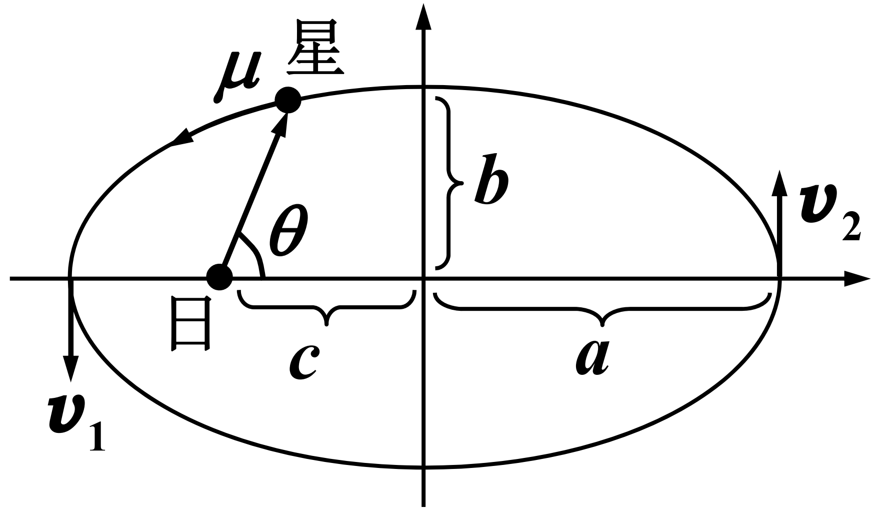
$$(a-c)\mu v_1=(a+c)\mu v_2$$

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2-\frac{GMm}{a-c}=\frac{1}{2}\mu v_2^2-\frac{GMm}{a+c}$$

$$\Rightarrow\quad v_1=\frac{a+c}{b}\sqrt{\frac{GMm}{a\mu}},\quad v_2=\frac{a-c}{b}\sqrt{\frac{GMm}{a\mu}}$$

面积速率



$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{L}{2\mu}$$

$$=\frac{1}{2}(a-c)\boldsymbol{v}_1$$

$$=\frac{1}{2}(a+c)\boldsymbol{v}_2=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{GMm}{a\mu}}$$

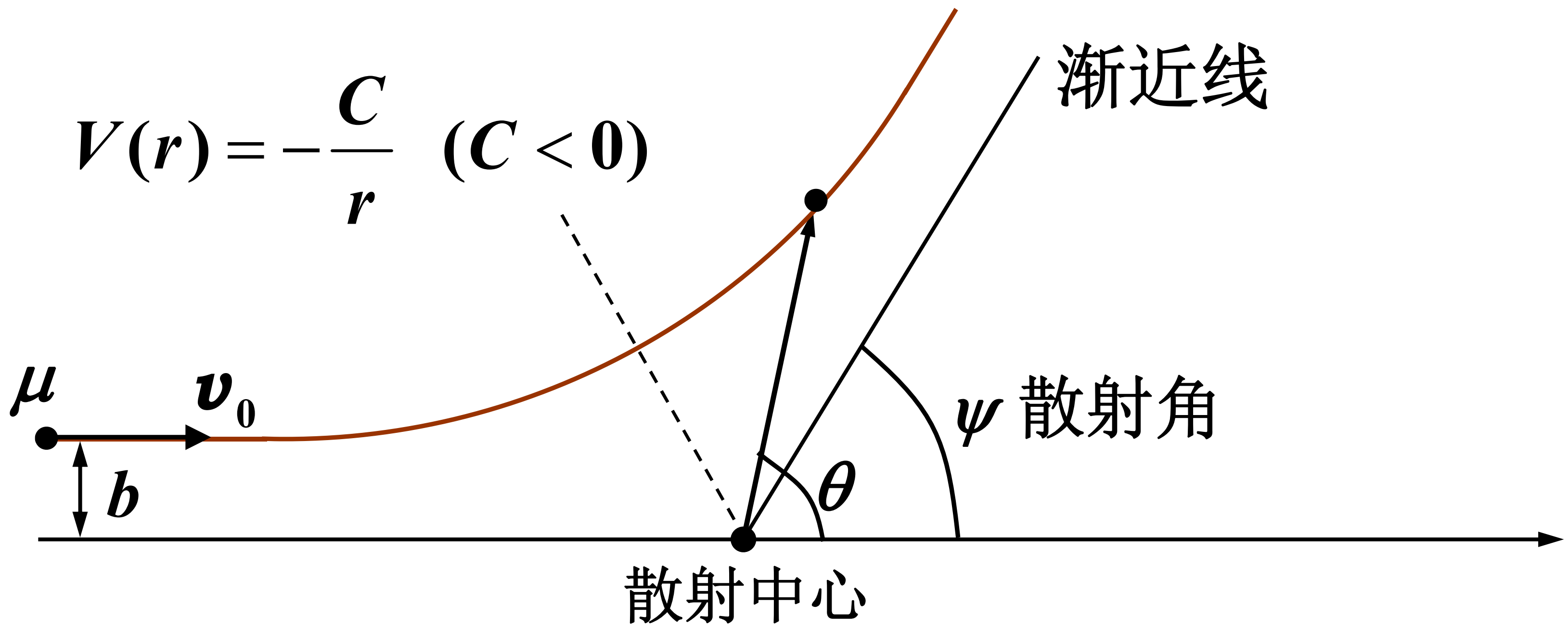
轨道运动周期 $T=\dfrac{\pi ab}{\mathrm{d}S/\mathrm{d}t}=2\pi a\sqrt{\dfrac{a\mu}{GMm}}$

周期定律 $\dfrac{a^3}{T^2}=\dfrac{GMm}{4\pi^2\mu}\approx\dfrac{GM}{4\pi^2}=K\quad(m<<M,\ \mu\approx m)$

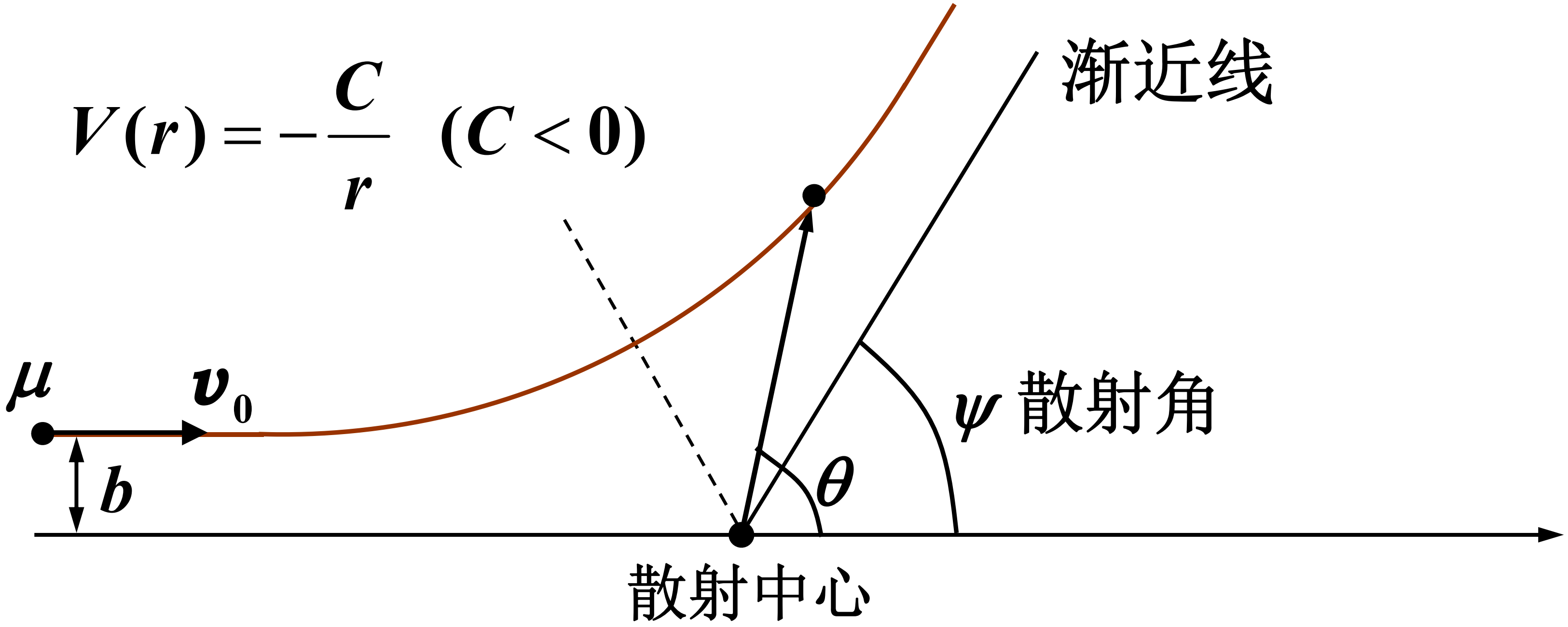
六. 斥力场中的粒子散射

历史上确定原子的核式结构的重要实验是 α 粒子被靶材的原子核散射（弹性碰撞）— 卢瑟福散射。

α 粒子是带 $+2e$ 的 ^{4}He 核，是斥力场散射。



从无穷远以 v_0 入射，瞄准距离是 b — 碰撞参数



$$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu C^2}},\quad L = \mu v_0 b,\quad E = \frac{1}{2}\mu v_0^2,\quad \cos\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \quad \cot\frac{\psi}{2} = \frac{2Eb}{|C|} = \frac{2b}{D},\qquad D = \frac{|C|}{E}$$

§ 5.8 对称性和守恒律

对称性的规律具有极大的普遍性和可靠性，它是统治物理规律的规律。

一. 操作

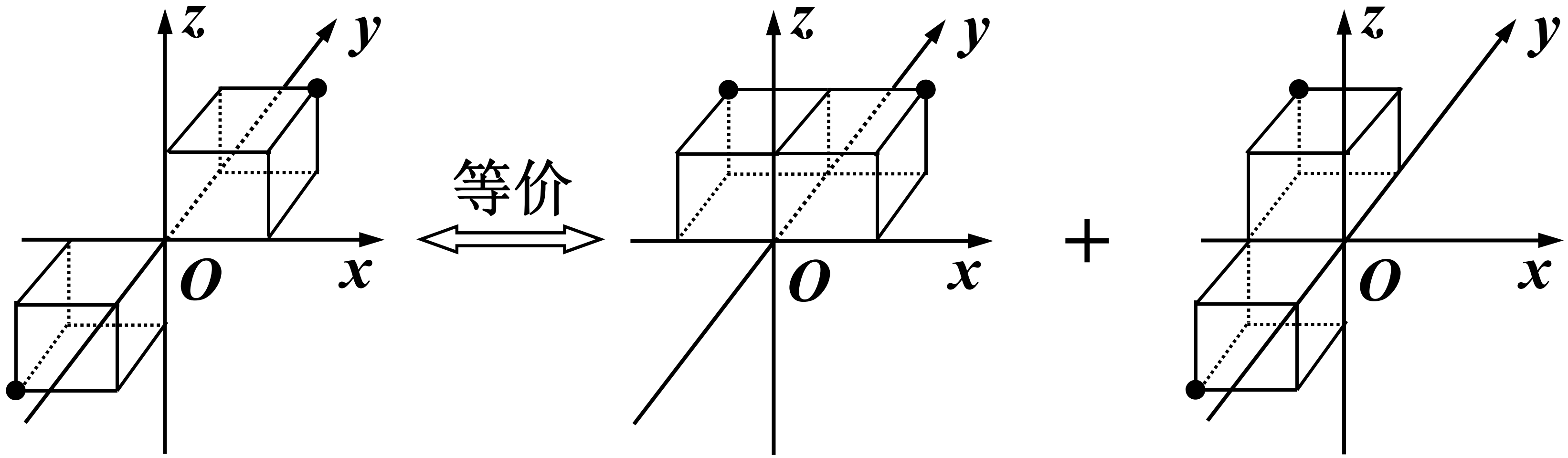
为改变系统的状态而实施的手段称为操作。操作也称为变换。

1. 四种基本空间操作

- 平移操作：系统平移一段距离
- 旋转操作：系统绕某个固定轴转个角度

- 镜像操作：系统对某个平面作镜像反射
- 反演操作：系统对某点作反射

反演操作等价于镜像操作+对垂直于反射面的轴旋转 π 角的联合操作。



对*O*反演　　对*yz*面反射　　绕*x*轴旋转π角

2. 二种基本时间操作

- 平移操作：时间平移一段距离
- 反演操作：时间反向或时间倒流

3. 置换操作

例如：将 C 原子的 6 个电子中的任意 2 个对调看看 C 原子的量子态变不变。

4. 联合操作

例如：先空间旋转再空间平移的联合操作。

注意：一般两个操作次序不同，结果不同。

两种重要的针对时空的联合操作

伽利略变换　　洛伦兹变换

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \dfrac{u}{c^2}x) \end{cases} \quad (\gamma = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}})$$

物理学中除上述操作外，还涉及到其它一些操作如：电荷共轭变换（正反粒子变换），规范变换，全同粒子置换等等。

二. 群的概念

设 $\{A_i, i = 1, 2, \ldots\}$ 表示元素或操作的集合。如果集合元素满足下面 4 个条件，该集合称为群，用 G 表示。

（1）群中任意 2 个元素的乘积是唯一的、单值的，结果仍是群的一个元素。

$$A_i A_j = A_k,\quad A_i, A_j, A_k \in G,\quad i = j \text{ or } i \neq j$$

$A_i A_j = A_j A_i$，称 A_i 和 A_j 对易

$A_i A_j \neq A_j A_i$，称 A_i 和 A_j 不对易

（2）群中必需有不变元素 E ，满足：

$$A_iE = EA_i = A_i,\quad A_i, E \in G$$

（3）群中任意 3 个元素乘积满足组合定则：

$$(A_iA_j)A_k = A_i(A_jA_k),\ A_i, A_j, A_k \in G$$

（4）群中任一元素存在逆元素：

$$A_iA_i^{-1} = A_i^{-1}A_i = E,\quad A_i, A_i^{-1}, E \in G$$

群元素的数目可以有限，也可以无限。

三. 对称性

德国数学家魏尔（**H. Weyl**）**1951** 年提出：

如果系统经过某个操作后状态不变或等价，则该系统对此操作具有对称性。这个操作称为系统的一个对称操作。

对称性：系统在某种操作下的不可分辨性

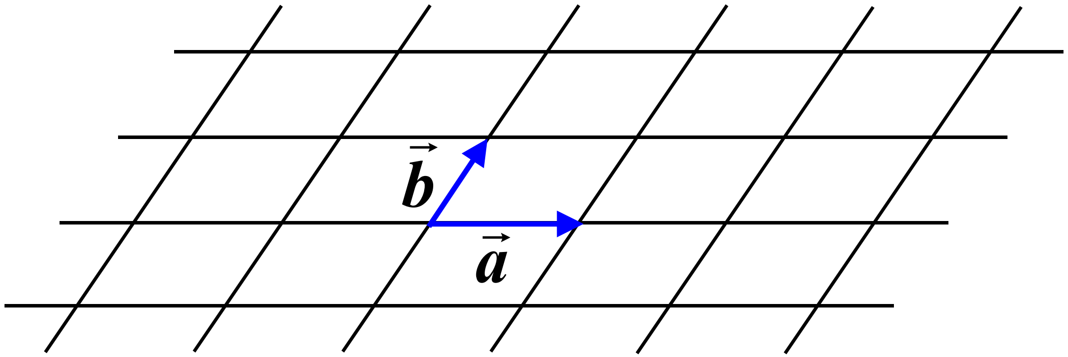
— 不变性

使系统状态保持不变或等价的所有对称操作构成系统的对称群。

系统：具体事物、科学实验、物理定律…

1. 空间里的平移对称性

例如：无限大二维周期性结构



显然如下的操作都是平移对称操作：

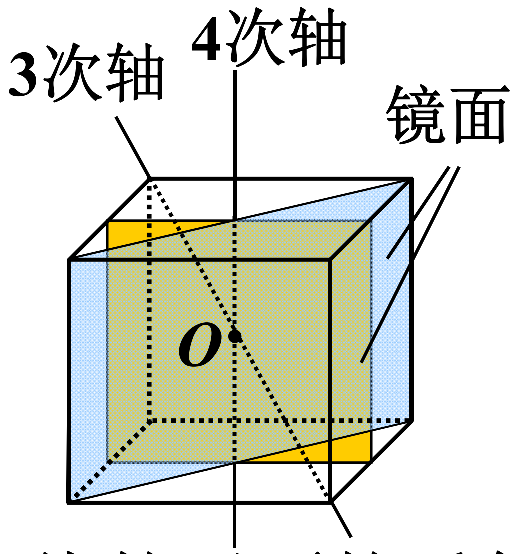
$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_0, \quad \vec{r}_0 = n\vec{a} + m\vec{b} \ (n, m \text{ 是整数})$$

系统具有平移任一 $\vec{r}_0$ 的平移对称性。

任意 2 个平移对称操作对易，所有平移对称操作构成该结构的平移群。

2. 空间里的旋转、镜像和反演对称性

例如：立方体



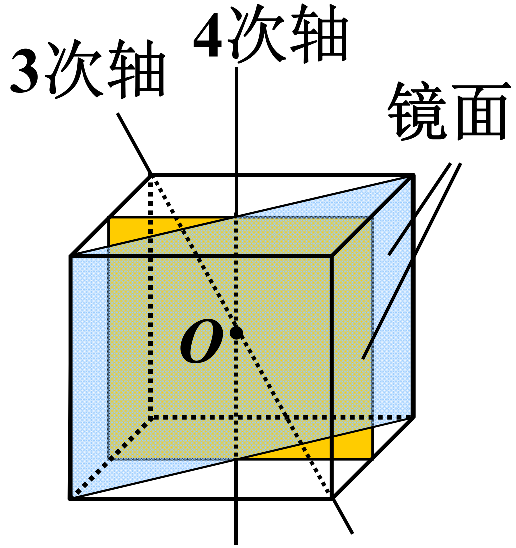
具有绕体对角线旋转 π/3、2π/3 角不变的旋转对称性，体对角线是旋转对称轴，是 3 次轴。

具有对包含相互平行的 2 个面对角线的平面的反射不变的镜像对称性，该反射面称为镜面。

具有对中心 *O* 点的反射不变的反演对称性，*O* 称为反演中心。

还有其他旋转对称轴和镜面。

旋转对称轴、镜面、反演中心
称为对称要素。



系统所有对称要素至少有 **1** 个交点。

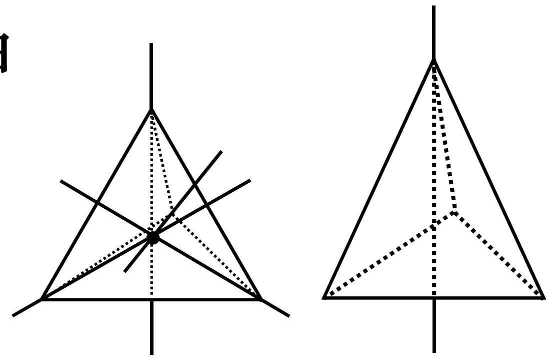
所以旋转、镜像、反演操作也称为点操作：数学上对应正交变换矩阵，旋转操作的矩阵行列式为**+1**，镜像、反演操作的矩阵行列式为**–1**。

系统所有的旋转、镜像、反演对称操作构成其点群。

点群反映了系统在点操作下的全部对称性。

点群所反映的对称性有高低之分。

例如：正四面体沿某个 3 次轴拉伸其它 3 个 3 次轴消失，剩下的对称操作构成的群是原来对称群的子群。



两个重要概念：

轴对称性：对绕一固定轴旋转任意角度不变。

球对称性：对绕一固定点作任意旋转都不变。

球对称性是所有点对称性中最高的。

3. 关于时间的对称性

- 时间平移对称性

例如：保守系统的能量对时间平移任意值都不变，
其能量具有时间平移对称性。

- 时间反演对称性

例如： $t \to -t$ 则 $\vec{v} \to -\vec{v}$， $\vec{a} \to \vec{a}$

所以速度没有时间反演对称性。加速度有时间反演对称性。

保守力只和位型有关，故有时间反演对称性。

耗散力和速度方向有关，故没有时间反演对称性。

热现象的本质是统计现象，与热有关的宏观过程有非平衡因素和耗散因素存在，导致与热有关的宏观过程都不具有时间反演对称性 — 不可逆。

4. 联合操作下的对称性

例如：晶体

晶体既有平移对称性 — 空间周期性，也有点对称性。

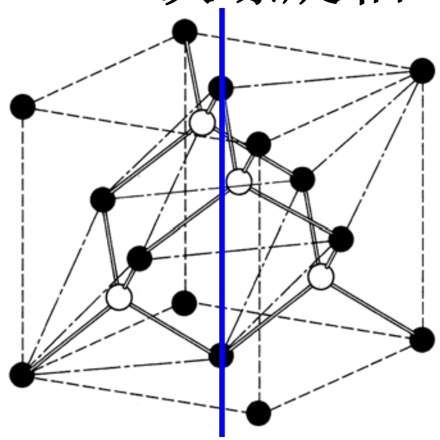
晶体所有的平移对称操作构成晶体的平移对称群。

晶体所有的点对称操作构成晶体的点群。

注意：系统对某些操作可能不具有对称性，但对几种操作的联合却可能具有对称性。这种情况在晶体中很常见。

右图是金刚石周期性结构单元

黑圆是位于立方体顶角或面心上的**C** 原子。白圆是位于立方体的体对角线 **1/4** 处的 **C** 原子。



通过两个相对的面的中心的轴不是 **4** 次轴。

沿此轴方向平移 **1/2** 的立方体边长距离的操作也不是平移对称操作。

但二者组合却是对称操作，称为 **4** 次螺旋轴。

晶体所有的对称操作构成晶体的空间群。

晶体共有 **230** 种空间群，**32**种点群，**7** 种晶系。

Escher 的骑士图案

联合的对称操作：镜象＋黑白置换＋平移操作

四. 物理定律的对称性

前面主要讨论了一些特定系统或事物的对称性。

还有一类对称性是关于物理定律的对称性。

定义实验系统：由全套实验设备以及影响实验的一切外部因素构成。

1. 物理定律的空间平移对称性

如果把实验系统从某地点任意平移到另一个地点，给以同样的实验条件，实验以完全相同的方式进行和结束，则说明物理定律没有因为空间平移而发生变化，这就是物理定律的空间平移对称性。

即空间各处对物理定律一样 — 空间的均匀性。

2. 物理定律的空间旋转对称性

如果把实验系统旋转任意一个角度，给以同样的实验条件，实验以完全相同的方式进行和结束，则说明物理定律没有因为空间旋转而发生变化，这就是物理定律的空间旋转对称性。

即空间各方向对物理定律一样 — 空间的各向同性。

3. 物理定律的时间平移对称性

如果用实验系统做实验，其进行方式和结果与开始时间无关，则说明物理定律没有因为时间平移而发生变化，这就是物理定律的时间平移对称性。

即任何时间对物理定律一样 — 时间的均匀性。

4. 物理定律对时空的对称性

将时空联合，会涉及运动对物理定律的而影响，例如物理定律是否对匀速运动具有对称性？

想象 **2** 套全同实验系统，分别安置在 **2** 个不同的惯性系里。如果给以同样的实验条件，**2** 套实验在各自惯性系以完全相同的方式进行和结束，则说明物理定律对匀速运动具有对称性。

注意：需假设各惯性系等价，无特权惯性系。

物理定律的对称性举例

牛顿定律、热力学定律、麦克斯韦电磁学定律、薛定谔方程、狄拉克方程都具有空间平移对称性、空间旋转对称性、时间平移对称性。

说明空间是均匀的、各向同性的，时间是均匀的。

牛顿定律对伽里略变换具有不变性，但对洛伦兹变换不具有不变性。

麦克斯韦电磁学定律、狄拉克方程对伽里略变换不具有不变性，但对洛伦兹变换具有不变性。

洛仑兹变换是 **4** 维时空的旋转变换。

五. 因果关系和对称性原理

自然规律反映了事物之间的“ 因果关系 ” 。

稳定的因果关系要求可重复性和预见性，

即要求相同的原因必定产生相同的结果，

或等价的原因必定产生等价的结果。

法国物理学家皮埃尔.居里（**Pierre Curie**）于 **1894** 年提出对称性原理：

（**1**）原因中的对称性必然存在于结果中；

（**2**）结果中的不对称性必然存在于原因中。

对称性原理是凌驾于物理规律之上的自然界的一条基本原理。

六. 对称性与守恒定律

德国数学家艾米.诺特（Emmy Noether）1918 年提出的诺特定理，论证了对称性与守恒律之间所存在的普遍联系：

连续变换的对称性都对应一条守恒定律

- 空间的均匀性与动量守恒定律

若实验系统的实验过程和结果和空间平移无关，则实验系统具有连续的空间平移对称性。

具有连续的空间平移对称性的系统，其动量必守恒。

空间的均匀性导致动量守恒定律的成立。

- 空间的各向同性与角动量守恒定律

若实验系统的实验过程和结果与空间方位无关，
则实验系统具有连续的旋转对称性。

具有连续的旋转对称性的系统，其角动量必守恒。

空间各向同性导致角动量守恒定律的成立。

- 时间的均匀性与能量守恒定律

若实验系统的实验过程和结果和时间平移无关，
则实验系统具有连续的时间平移对称性。

具有连续的时间平移对称性的系统，其能量必守恒。

时间的均匀性导致能量守恒定律的成立。

七. 对称性在电磁学中的应用

根据在镜象操作下的变换性质，物理学中的矢量分成极矢量和轴矢量。

极矢量：在镜象操作下，垂直反射面的分量反向，平行反射面的分量不变。

$\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{F}$, $\vec{E}$, 电位移矢量$\vec{D}$...

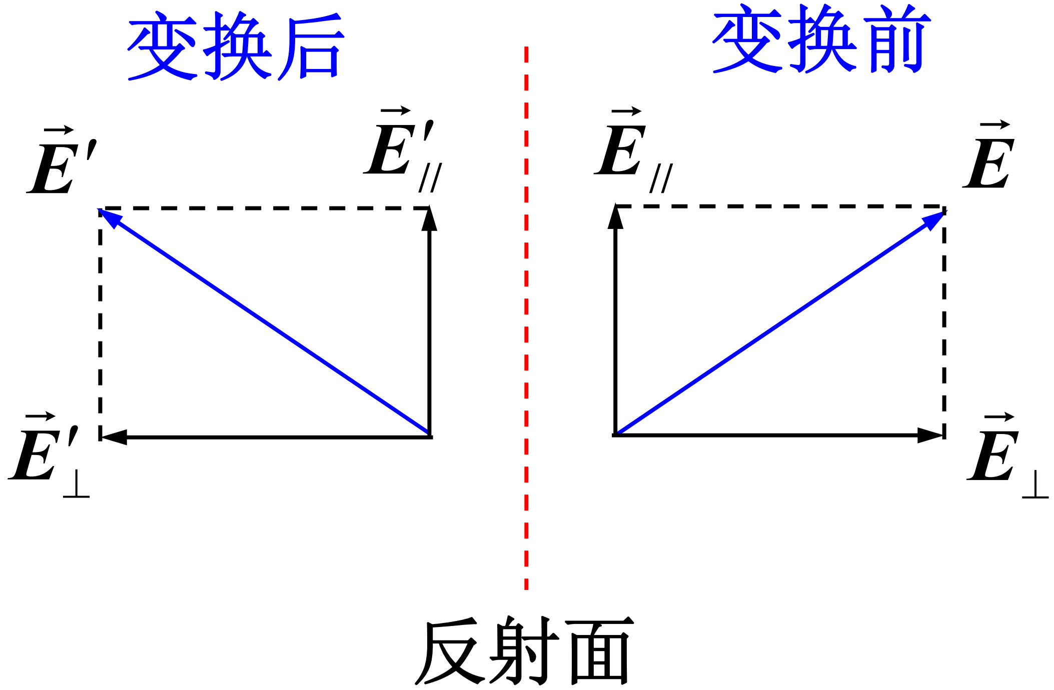
轴矢量（赝矢量）：在镜象操作下，垂直反射面的分量不变，平行反射面的分量反向。

有手性的量：$\vec{\omega}$, $\vec{L}$, $\vec{M}$, $\vec{B}$, 磁场强度$\vec{H}$...

可证明：极矢量×极矢量的结果是轴矢量

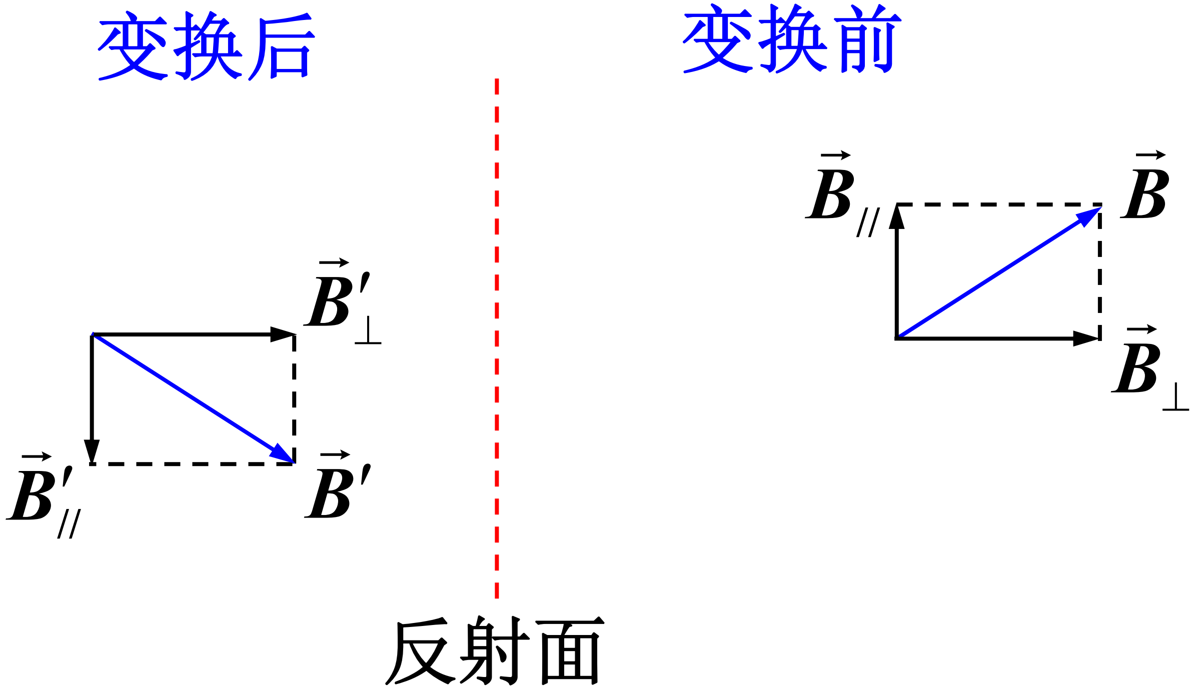
注意：实验可验证一个物理量是极矢量还是轴矢量。

极矢量在镜像操作下的变换



$$\vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//}, \quad \vec{E}'_{\perp} = -\vec{E}_{\perp}$$

轴矢量在镜像操作下的变换

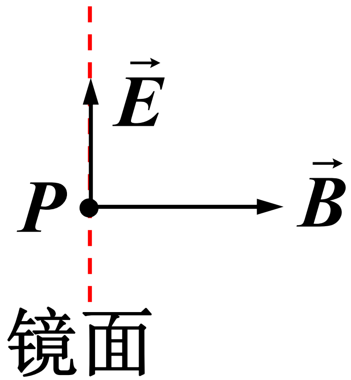


$$\vec{B}'_{//} = -\vec{B}_{//}\,,\quad \vec{B}'_{\perp} = \vec{B}_{\perp}$$

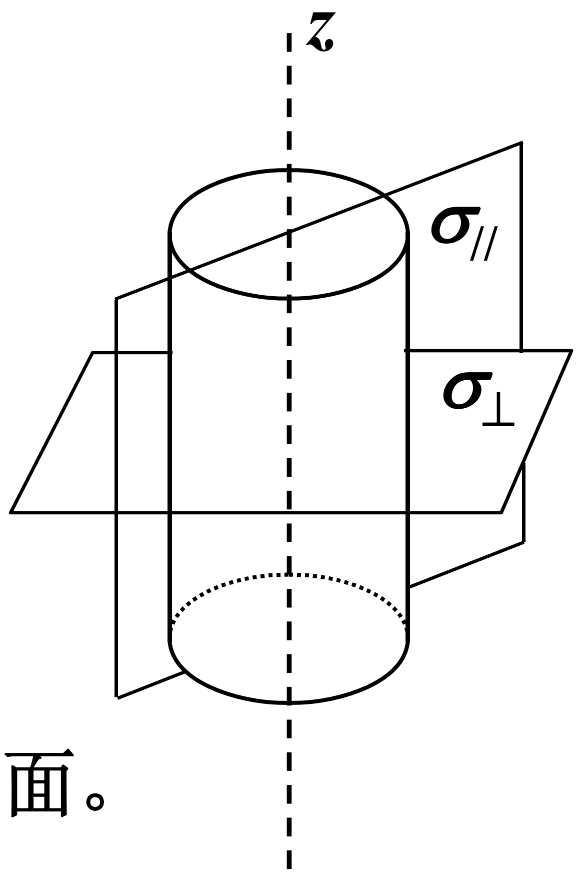
重要问题：对于镜面上的点，其极矢量和轴矢量应满足什么条件？

1. 首先镜面相应镜像对称操作，故其处极矢量或轴矢量在操作前后不变。

2. 要保持操作前后不变，由极矢量、轴矢量变换特性可知，其必须满足：
   - 对极矢量，只能有平行分量（面内分量）
   - 对轴矢量，只能有垂直分量



【例】分析电荷均匀分布的无穷长圆柱体的对称性，以及静电场的函数形式

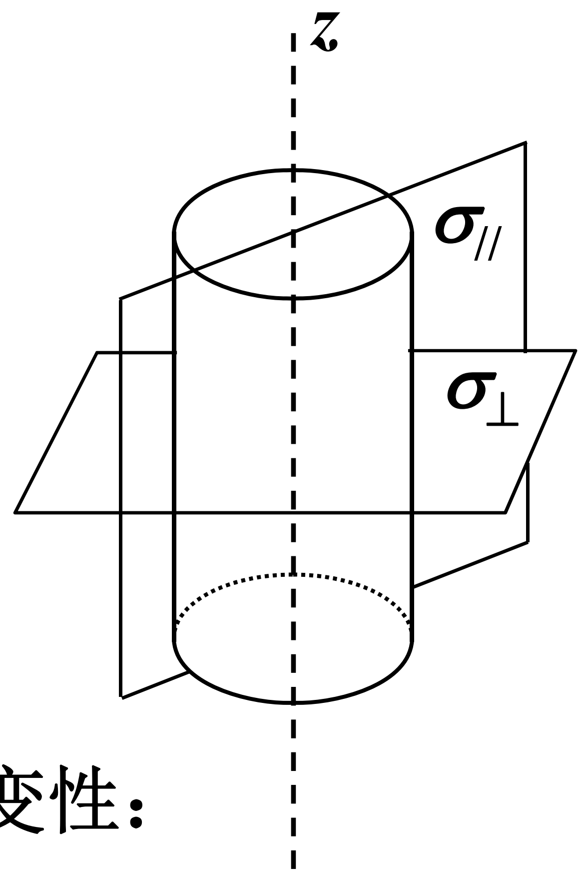


电荷分布的对称性：

- 绕 z 轴的轴对称型性：正反转动任意一个角度保持不变，z 轴是旋转对称轴。
- 对通过 z 轴的任意平面 $\sigma_{//}$ 以及对垂直于 z 轴的任意平面 $\sigma_{\perp}$ 的镜像对称性，$\sigma_{//}$ 和 $\sigma_{\perp}$ 是镜面。
- 沿 z 轴平移任意距离的平移对称性。

电荷产生静电场，静电场具有电荷分布的对称性。

用柱坐标系：



- 空间任一点同属于镜面 $\sigma_{//}$、$\sigma_{\perp}$ 则电场方向只能沿径向

$$\vec{E} = E(r,\theta,z)\vec{e}_r$$

- 关于 z 轴的轴对称性：

$$\vec{E} = E(r,z)\vec{e}_r$$

- 沿 z 轴平移任意距离的平移不变性：

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

如果换成沿 z 轴均匀分布的电流，磁场如何？