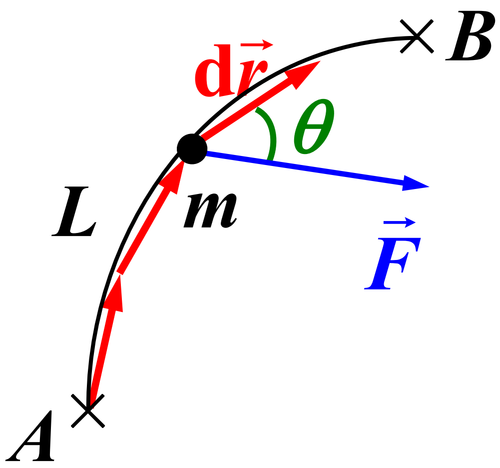
第四章 功和能

§ **4.1** 功
§ **4.2** 动能定理
§ **4.3** 一对力的功
§ **4.4** 保守力
§ **4.5** 势能
§ **4.6** 由势能求保守力
§ **4.7** 均匀球体的引力
§ **4.8** 功能原理和机械能守恒定律
§ **4.9** 质心系中的功能关系
§ **4.10** 碰撞

§ 4.1 功

元功：力和所作用的质点的元位移的标积



$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$W_{AB} = \int_{\substack{A \\ \text{沿}L}}^{B} \mathrm{d}W = \int_{\substack{A \\ \text{沿}L}}^{B} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{\substack{A \\ \text{沿}L}}^{B} F\cos\theta \cdot \left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$

- 功是标量，可正、可负
- 功是过程量，不是状态量
- 功依赖于参考系

§ 4.2 动能定理

质点动能 $\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2}$ — 状态量

质点动能定理：合力的功等于质点动能增量

$$\boxed{W = E_{k末} - E_{k初} = \Delta E_k}$$

证明：$W = \int_{初}^{末} \vec{F}_{合} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{初}^{末} m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$= \int_{初}^{末} m\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = \frac{1}{2} m v_{末}^2 - \frac{1}{2} m v_{初}^2$$

质点系动能定理：

质点 i：合外力功 — $W_{外i}$，合内力功 — $W_{内i}$

$$W_{外i}+W_{内i}=E^{i}_{k末}-E^{i}_{k初}$$

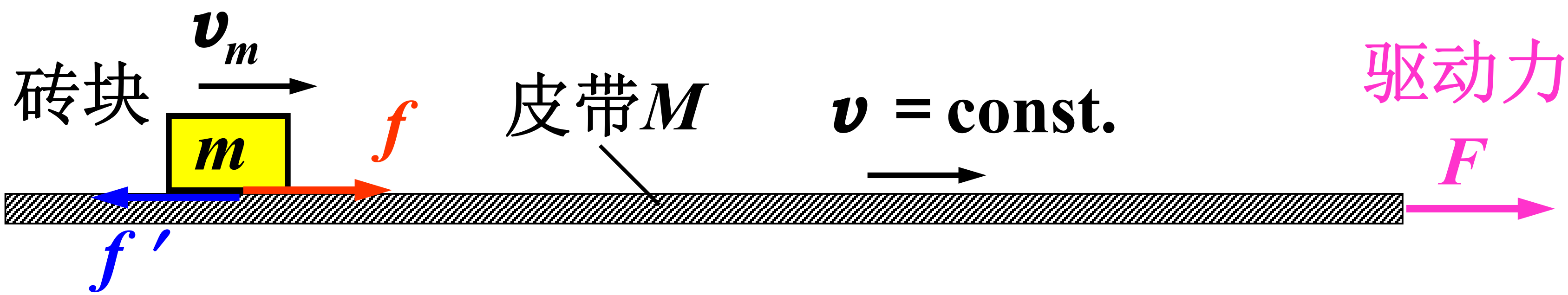
质点系：
$$\sum_i W_{外i}+\sum_i W_{内i}=\sum_i E^{i}_{k末}-\sum_i E^{i}_{k初}$$

$$\boxed{W_{外}+W_{内}=E_{k末}-E_{k初}=\Delta E_{k}}$$

注意： 内力虽成对，但其功之和不一定为零。

动能定理适用于惯性系，否则需考虑惯性力的功。

【例】 皮带 M 以恒定速度 $\boldsymbol{v}$ 传动，将砖块 m 静止地放置其上，当砖块速度 $\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{v}$ 时，判断下面说法对否？其中 f 和 f' 分别是 m、M 受到的摩擦力。

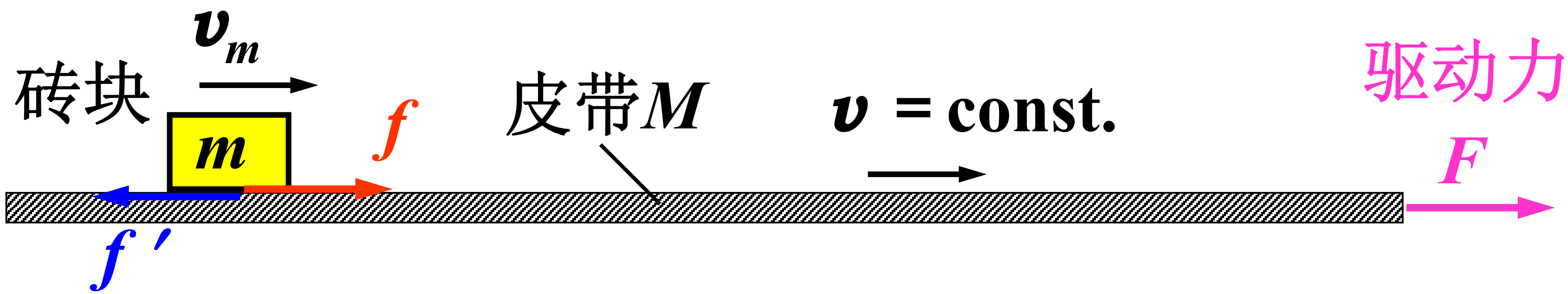


（1）f' 对 M 的功 $= -$ f 对 m 的功

（2）F 的功 $+ f'$的功 $= m$ 获得的动能

（3）F 的功 $+ f'$的功 $= 0$

（4）F 的功 $= m$ 获得的动能



（1）f' 对 M 的功 = – f 对 m 的功

错，m 与 M 间有相对位移。

（2）F 的功 + f' 的功 = m 获得的动能

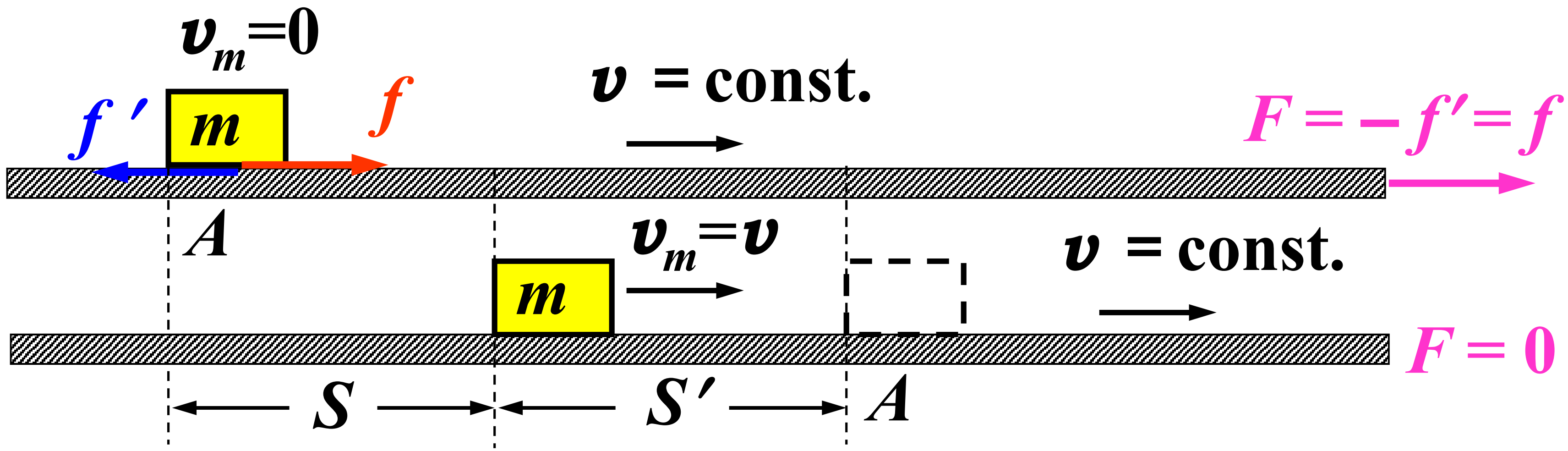
错，F 与 f' 是作用在 M 而非 m 上的

（3）F 的功 + f' 的功 = 0， 对， M 匀速，动能不变

（4）F 的功 = m 获得的动能

错，F 是作用在 M 上的

【思考】F 的功 $W_F = ?$



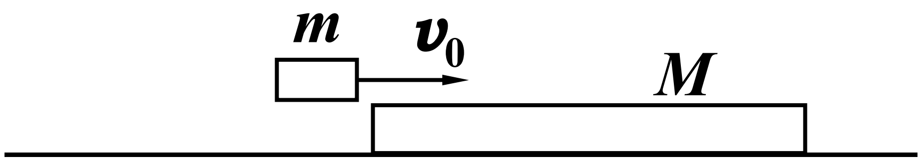
$$W_F = F\cdot(S+S') = f\cdot S - [f\cdot(-S')]$$

$S+S'$ = 地面系皮带位移

S = 地面系砖块位移， $-S'$ = 皮带系砖块位移

$$W_F = \frac{1}{2}mv^2 - (-\frac{1}{2}mv^2) = mv^2 \qquad S = S'$$

【例】长 L、质量 M 的平板静置于光滑水平面上，质量 m 的木块以速度 v_0 射入平板表面上，两者间摩擦系数 μ，求木块恰好未能脱离平板表面条件。



解：选水平面为参考系，木块和平板为系统。

恰好未能脱离平板表面条件：运动到右端时，木块相对平板速度为 0

水平方向动量守恒：$(M+m)v=mv_0$

动能定理：$W=(M+m)v^2/2-mv_0^2/2$

摩擦内力作功：$W=-\mu mgL$

$$\Rightarrow \quad v_0^2 = 2\mu \frac{M+m}{M} gL$$

另法： 选木板为参考系 — 平动非惯性系

木板加速度： $a_M = \frac{\mu mg}{M}$

木块所受惯性力： $F_{惯} = -ma_M = -m\frac{\mu mg}{M}$

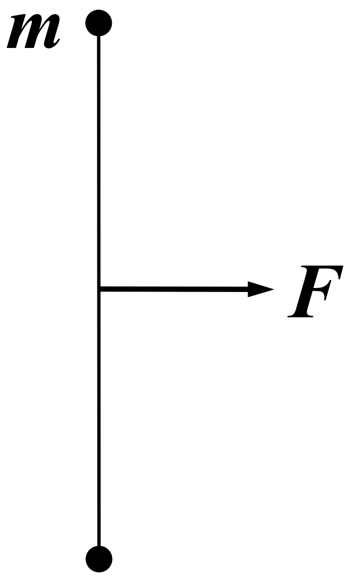
对木块用动能定理：惯性力和摩擦力作功等于动能增量：

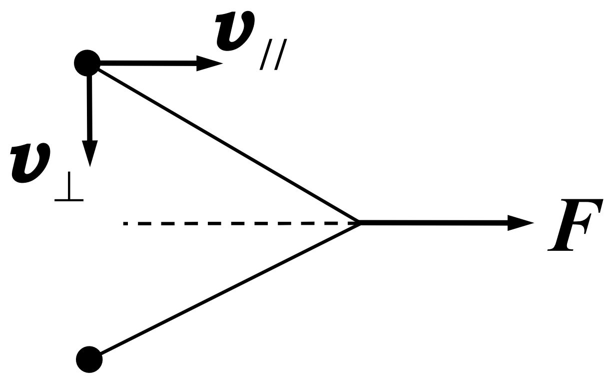
$$m\frac{\mu mg}{M} L + \mu mgL = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Rightarrow \quad v_0^2 = 2\mu \frac{M+m}{M} gL$$

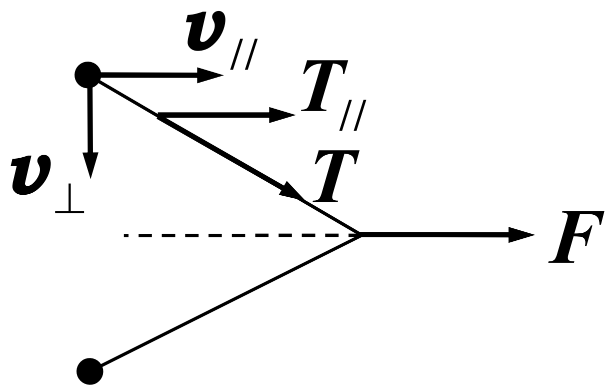
【例】质量同为 m 的两个小球，用长为 $2l$ 的轻绳连接后静止放置在光滑水平上。绳的中点一直受恒力 F 作用，方向和初始时刻的绳方向垂直。

求：在两球第一次相碰前的瞬间，小球在垂直于 F 的方向上分速度多大？





解： 恒力 F 作用点的质元质量为零，故绳张力 T 的平行分量为：



$$T_{//}=F/2$$

设碰前小球在平行方向的位移和速度分别为 $s_{//}$、$v_{//}$：

$$T_{//}s_{//}=\frac{1}{2}mv_{//}^2$$

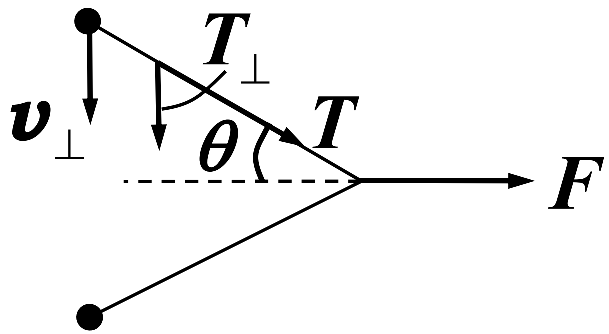
对小球+轻绳系统，张力 T 为内力，做功为零。

恒力 F 为外力，其作用点的质元位移为 $s_{//}+l$，故：

$$F(s_{//}+l)=2\times\frac{1}{2}m(v_{//}^2+v_{\perp}^2)$$

$$\Rightarrow\quad v_{\perp}=\sqrt{Fl/m}$$

另法： 绳中张力的垂直分量：



$$T_\perp = T_{//}\tan\theta = \frac{F}{2}\tan\theta$$

小球垂直方向的位移：

$$s_\perp = l - l\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}s_\perp = -l\cos\theta\cdot\mathrm{d}\theta$$

对小球用动能定理：

$$\int_{\pi/2}^{0} T_\perp \mathrm{d}s_\perp = \int_{\pi/2}^{0} -\frac{Fl}{2}\sin\theta\cdot\mathrm{d}\theta = \frac{Fl}{2} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_\perp^2$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_\perp = \sqrt{\frac{Fl}{m}}$$

§ 4.3 一对力的功

一对力： 分别作用在两个物体上，大小相等、方向相反，不一定是作用与反作用力

一对力的功：

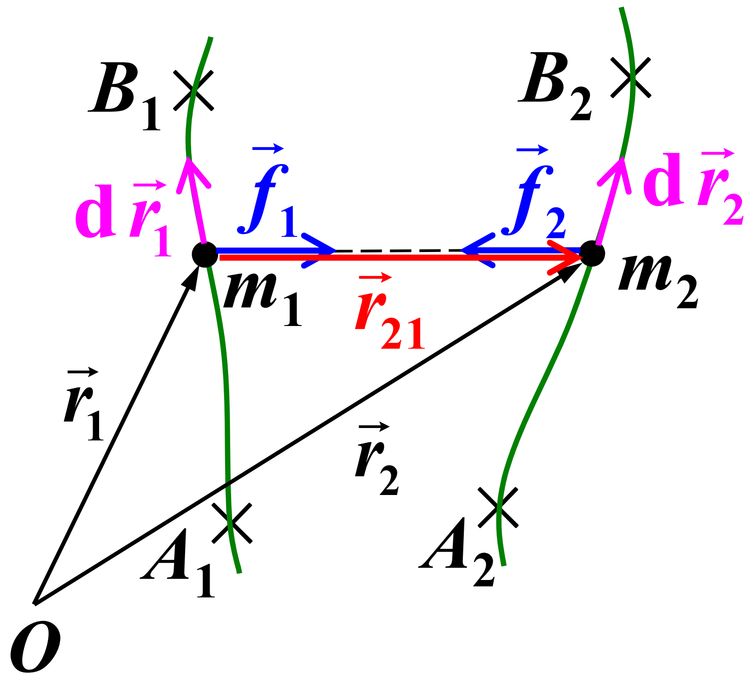
$$\mathrm{d}W_{对} = \vec{f}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2$$

$$= \vec{f}_2 \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_2 - \mathrm{d}\vec{r}_1)$$

$$= \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$= \vec{f}_2 \cdot \underline{\mathrm{d}\vec{r}_{21}}$$

m_2 相对 m_1 的元位移



$$\mathrm{d}W_{对} = \vec{f}_{单个力} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{相对}$$

相对元位移

$$\boxed{W_{对} = \int_{\substack{相对初位置 \\ 沿相对运动路径}}^{相对末位置} \vec{f}_{单个力} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{相对}}$$

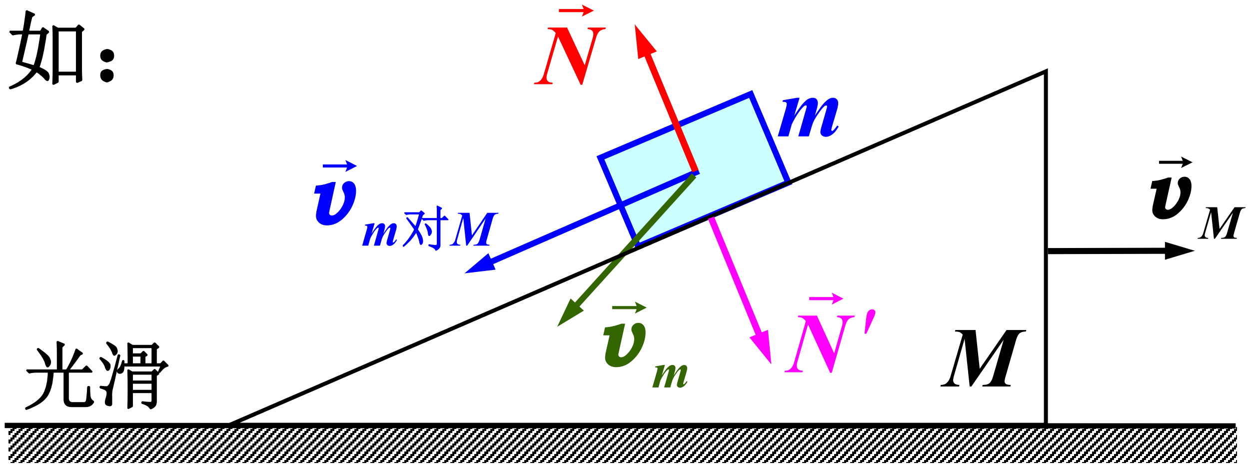
▲ $W_{对}$ 与参考系选取无关。

▲ 一对滑动摩擦力的功恒小于零。

摩擦生热：一对滑动摩擦力作功

▲ 无相对位移、相对位移和一对力垂直时，一对力的功必为零。

例如：



$$\vec{N}\text{不垂直于}\vec{v}_m \quad \Rightarrow \quad W_N \neq 0$$

$$\vec{N}'\text{不垂直于}\vec{v}_M \quad \Rightarrow \quad W_{N'} \neq 0$$

但 $\vec{N} \perp \vec{v}_{m对M}$ 所以 $W_N + W_{N'} = 0$

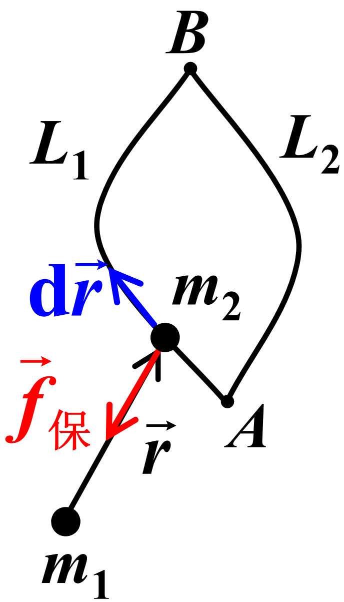
【思考】单个静摩擦力作功 $> 0,\ = 0, < 0$？

一对静摩擦力作功又如何？

§ 4.4 保守力

保守力：一对力，其功之和只和质点间的始末相对位置有关，和相对运动路径无关。

对任选的相对运动路径 L_1、L_2：

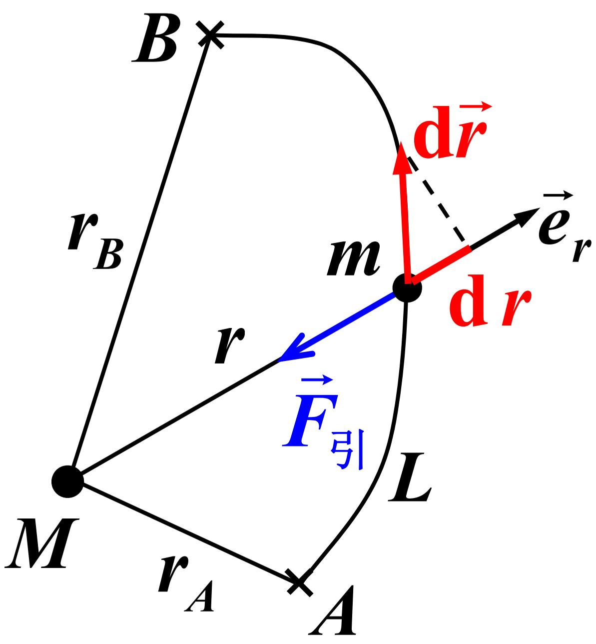


$$\int_{A\,(L_1)}^{B}\vec{f}_{保}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{A\,(L_2)}^{B}\vec{f}_{保}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\boxed{\oint_{任意闭合\,L}\vec{f}_{保}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=0}$$

— 保守力定义式

万有引力 $\vec{F}_{引} = -\dfrac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$



$$W_{对引} = \int_A^B \vec{F}_{引} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_A^B -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} -\frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$= GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$\therefore$ 万有引力是保守力

或对任意闭合路径 L：

$$\oint_L \vec{F}_{\text{引}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint_L -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \oint_L -\frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \oint_L GMm\,\mathrm{d}\frac{1}{r} = 0$$

$\therefore$ 万有引力是保守力

弹性力 $f=-k(x-x_0)$

x_0 — 平衡位置， k — 劲度系数

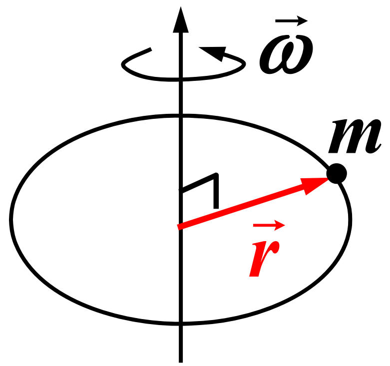
弹性力是保守力

惯性离心力 $\vec{F}_c = m\omega^2\vec{r}$

虽然不是一对力，

但可当作保守力。

转动参考系



重力 $\vec{F}_{重} = m\vec{g}$

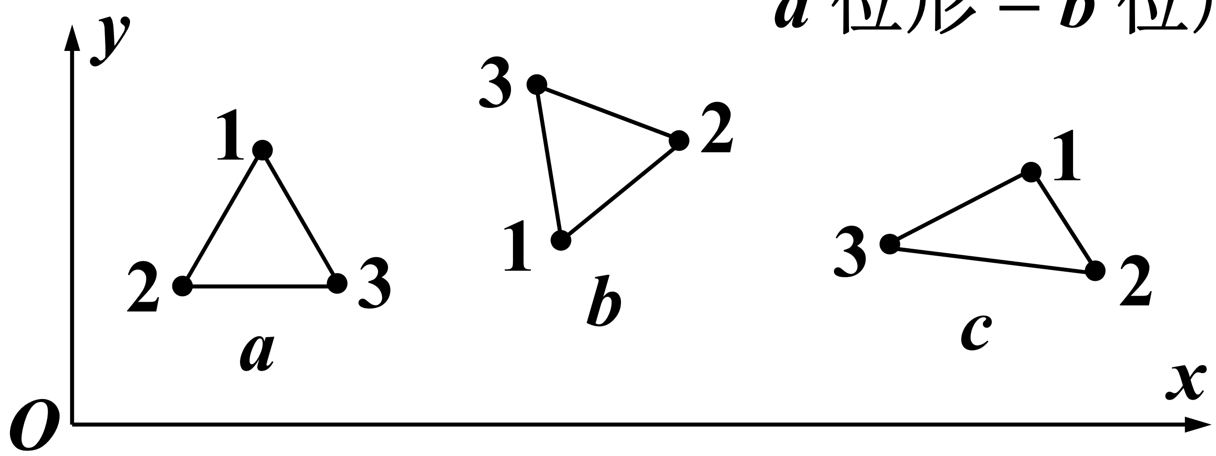
$$\vec{F}_{重} = \vec{F}_{引} + \vec{F}_c$$ — 保守力

§4.5 势能

保守力作功和路径无关，可引入标量函数
— 势能表示其作功。

位形：由质点构成的结构，决定于质点间的相对位置，相对位置不变，位形不变。

a 位形 $=$ b 位形 $\neq$ c 位形



定义：系统由位形 A 变到位形 B，系统的保守内力所作功等于系统势能减少，或等于系统势能增量的负值。

$$\boxed{E_p(A)-E_p(B)=-\Delta E_p=W_{保内}}$$

$$\boxed{-\mathrm{d}E_p=\mathrm{d}W_{保内}}$$

势能零点：规定某位形 O 的 $E_p(O)=0$

▲ 势能属于系统，是状态量

▲ 势能、势能零点选择和参考系无关

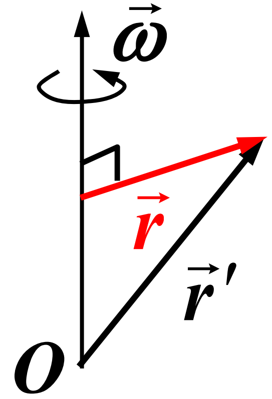
万有引力势能 $E_p(r) = -\dfrac{GMm}{r}$，$E_p(\infty) = 0$

弹性势能 $E_p(x) = \dfrac{1}{2}k(x - x_0)^2$，$E_p(x_0) = 0$

惯性离心势能

$$\mathrm{d}W = m\omega^2\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,' = m\omega^2\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = m\omega^2 r\cdot\mathrm{d}r$$

$$E_p(r) = \int_r^0 m\omega^2 r\cdot\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

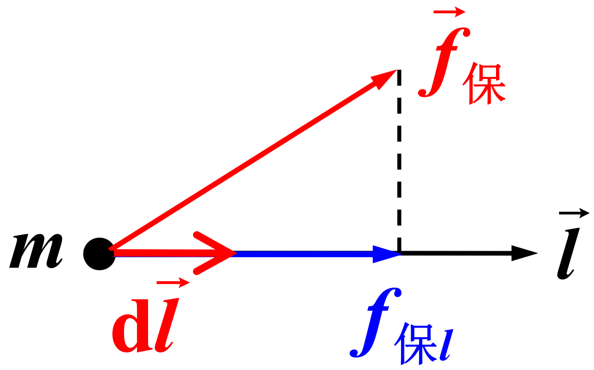


$$E_p(0) = 0$$

§ 4.6 由势能求保守力

$$\vec{f}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mathrm{d}E_p$$

$$f_{保l}\,\mathrm{d}l = -\mathrm{d}E_p$$

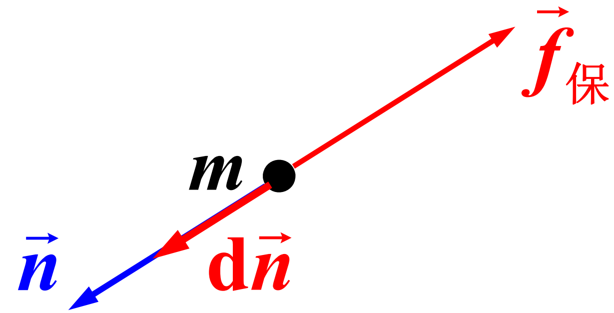


（$\vec{l}$：空间一给定方向）

$$\boxed{f_{保l} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}l}}$$ — 势能方向导数的负值

在某点处，保守力沿空间某一方向的分量，等于势能沿该方向的方向导数的负值。

$$\vec{f}_{保} = f_{保n}\hat{n} \quad = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}n}\hat{n}$$



定义梯度： $\mathbf{grad} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\hat{n}$

$$\vec{f}_{保} = -\mathbf{grad}\,E_p = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}n}\hat{n} \quad \Rightarrow \quad \left|f_{保}\right| = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}n}$$

标量函数梯度：大小等于方向导数最大值，方向指向标量函数增长最快的方向。

直角坐标系下，$E_p = E_p(x, y, z)$

$$\mathrm{d}E_p = -\vec{f}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -f_{保x}\mathrm{d}x - f_{保y}\mathrm{d}y - f_{保z}\mathrm{d}z$$

$$f_{保x} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad f_{保y} = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad f_{保z} = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\therefore \ \vec{f}_{保} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)$$

哈密顿算符 $\boxed{\nabla \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}}$

$$\vec{f}_{保} = -\nabla E_p$$

$$\boxed{\vec{f}_{保} = -\mathbf{grad}\, E_p = -\nabla E_p}$$

— 保守力指向势能下降最快的方向

【例】 弹性势能 $E_p = \dfrac{1}{2}k(x - x_0)^2$

弹性力 $\vec{f} = -\dfrac{\partial}{\partial x}[\dfrac{1}{2}k(x - x_0)^2]\vec{i}$

$$= -k(x - x_0)\vec{i}$$

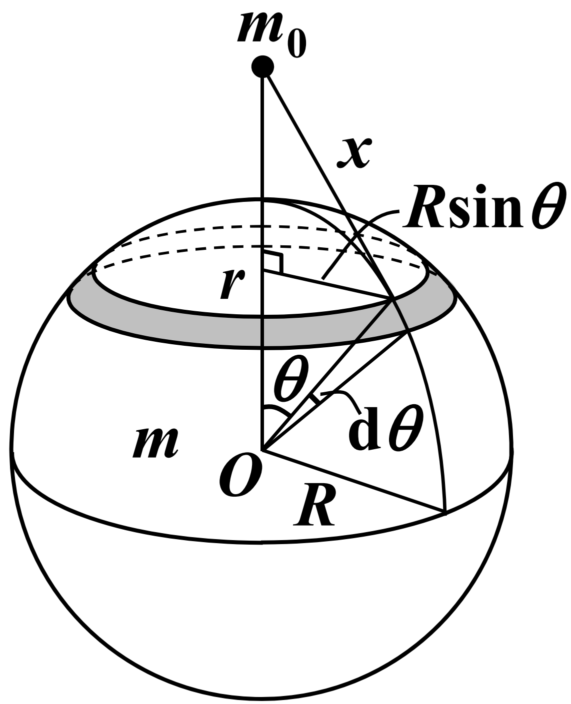
§ 4.7 均匀球体的引力

一. 均匀球壳的引力

设：球壳质量 m，半径 R，

质点质量 m_0，距球心 r

球壳质量面密度：$\sigma = \dfrac{m}{4\pi R^2}$



先求球壳与质点的引力势能

由对称性，选圆环面：$\mathrm{d}S_{环面} = 2\pi R\sin\theta \cdot R\mathrm{d}\theta$

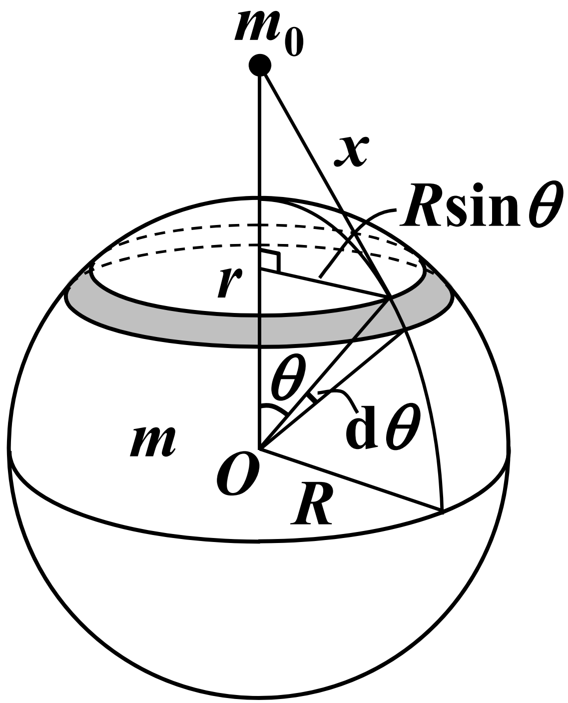
圆环面与 m_0 的势能：$\mathrm{d}E_p = -G\dfrac{(\sigma \cdot \mathrm{d}S_{环面})m_0}{x}$

$$\mathrm{d}E_p = -Gmm_0 \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{2x}$$

$$x^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$$

$$2x\mathrm{d}x = 2rR\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E_p = -Gmm_0 \frac{\mathrm{d}x}{2rR}$$



质点 m_0 在球壳外： $E_p = \int_{r-R}^{r+R} \mathrm{d}E_p = -\frac{Gmm_0}{r}$

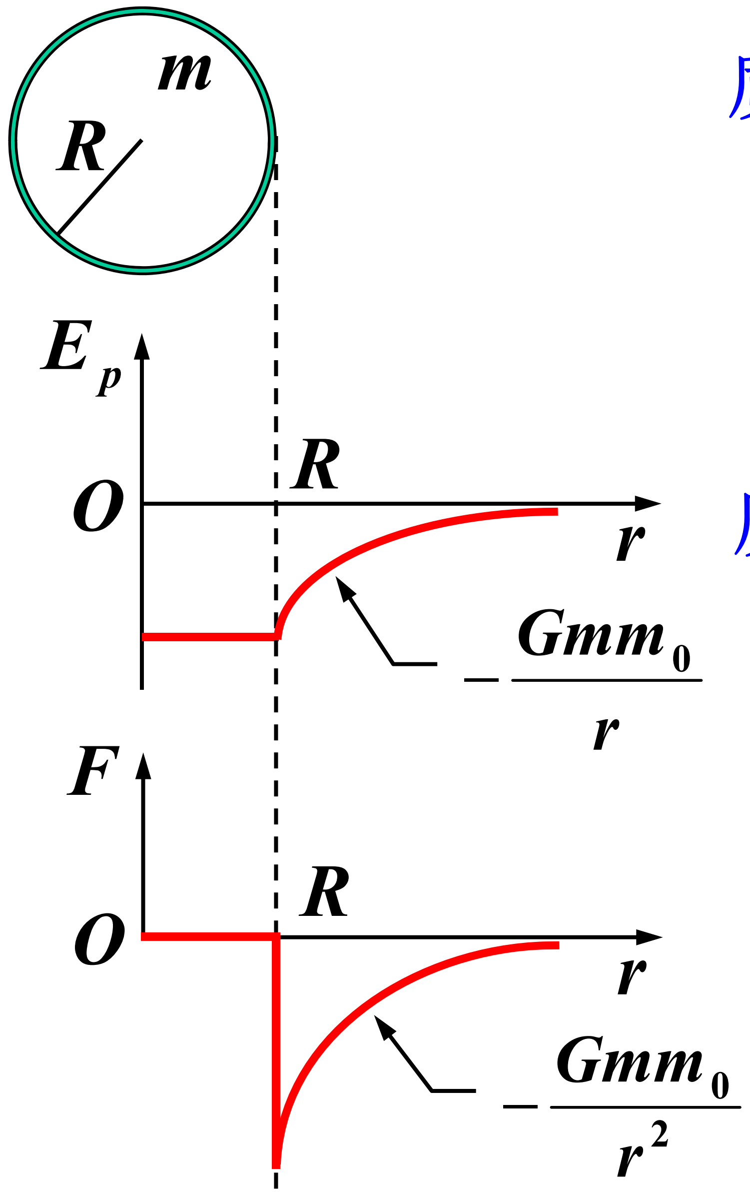
质点 m_0 在球壳内： $E_p = \int_{R-r}^{R+r} \mathrm{d}E_p = -\frac{Gmm_0}{R}$

球壳与质点的引力势能

$$E_p(r)=\begin{cases}-\dfrac{Gmm_0}{R} & (r<R)\\[2ex] -\dfrac{Gmm_0}{r} & (r>R)\end{cases}\qquad E_p(\infty)=0$$

球壳与质点的引力

$$F(r)=-\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}=\begin{cases}0 & (r<R)\\[2ex] -\dfrac{Gmm_0}{r^2} & (r>R)\end{cases}$$



质点 m_0 在球壳外时：

等同于同质量的质点在球心对 m_0 产生的引力。

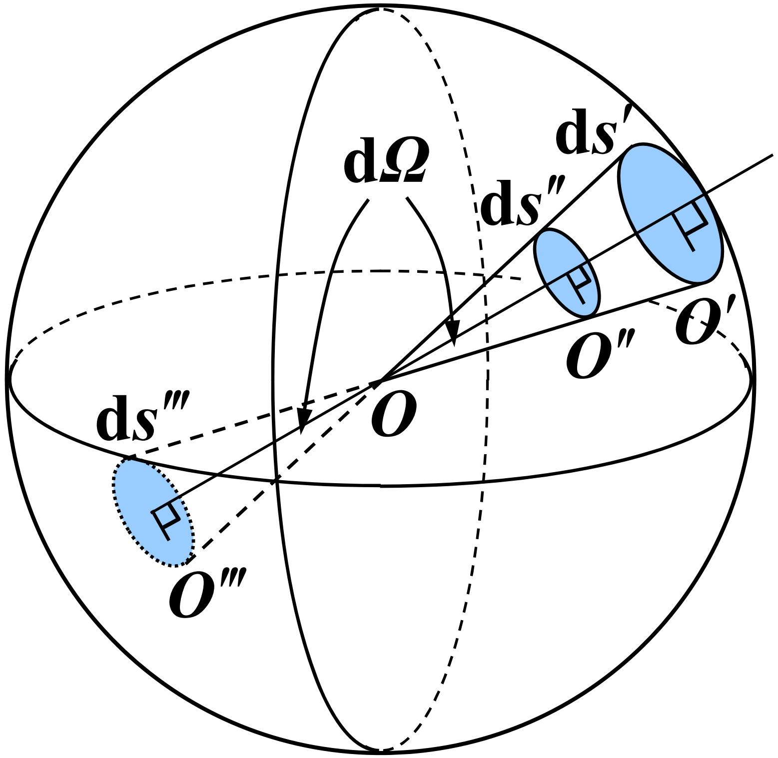
质点 m_0 在球壳内时：

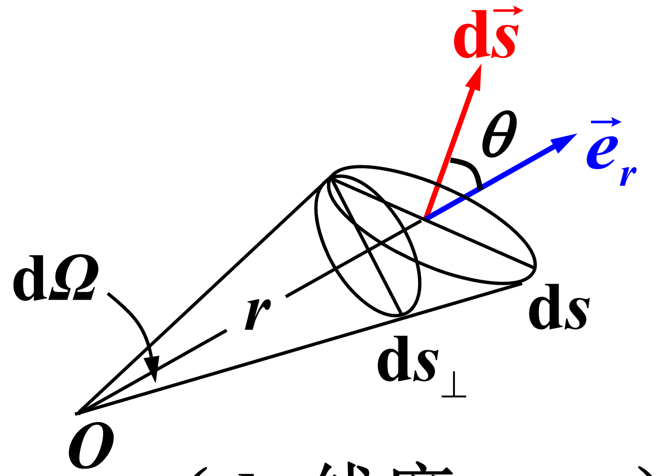
球壳对 m_0 的引力为零。

根源：引力遵循平方反比律

平方反比律的讨论

立体角 $$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}s'}{|OO'|^2} = \frac{\mathrm{d}s''}{|OO''|^2} = \frac{\mathrm{d}s'''}{|OO'''|^2}$$





（ds 线度 << r ）

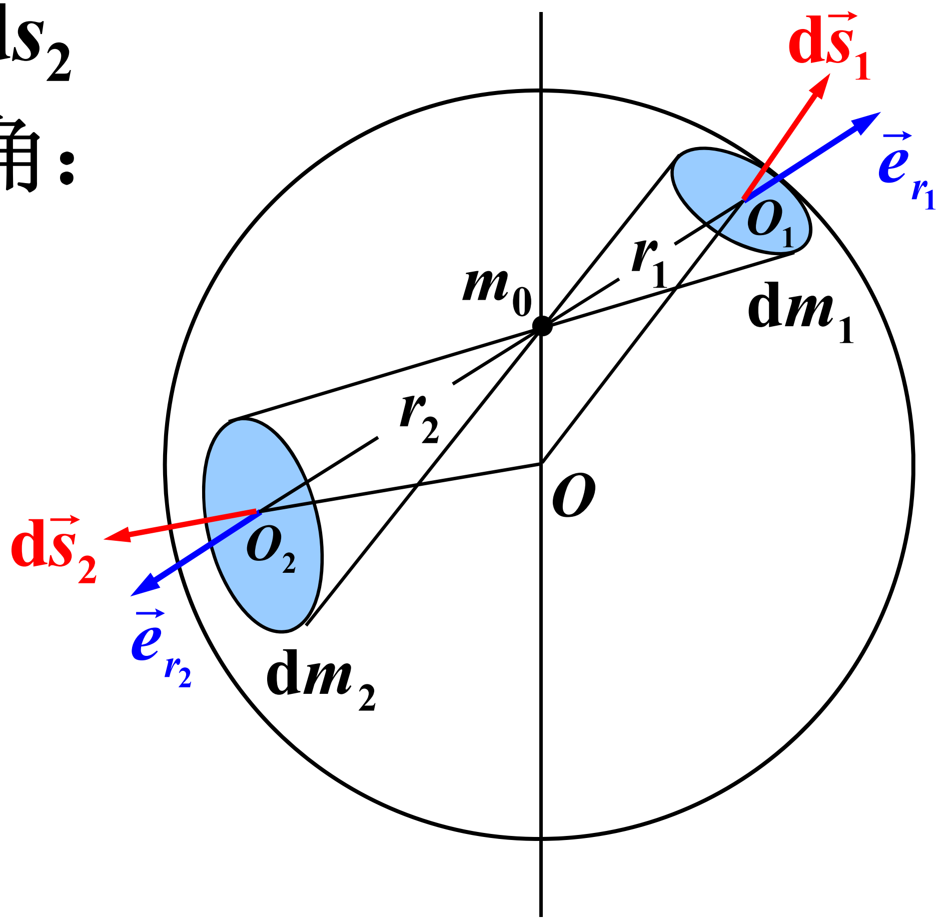
$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}s_\perp}{r^2} = \frac{\mathrm{d}s\cos\theta}{r^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{e}_r}{r^2}$$

球壳上的面元 $\mathrm{d}s_1$、$\mathrm{d}s_2$ 对 m_0 张开相对立体角：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{s}_1\cdot\vec{e}_{r_1}}{r_1^2}=\frac{\mathrm{d}\vec{s}_2\cdot\vec{e}_{r_2}}{r_2^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}s_1}{r_1^2}=\frac{\mathrm{d}s_2}{r_2^2}$$

$$G\frac{\mathrm{d}m_1 m_0}{r_1^2}=G\frac{\mathrm{d}m_2 m_0}{r_2^2}$$



平方反比 $\Rightarrow$ 相对面元引力抵消 $\Rightarrow$ m_0 不受力

补充说明

对引力势能，前面使用了线性叠加的性质，根据是引力有线性叠加性，是两体作用力：

两质点间的引力作用只与两质点有关，与其它质点是否存在无关 — 两体作用。

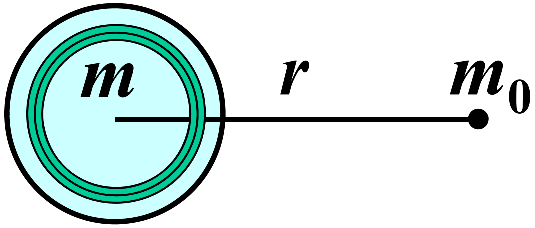
质点系的引力势能具有两体形式：

$$E_p = \sum_{i<j} -\frac{Gm_i m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} = \sum_{i<j} U_{ij}$$

微观世界原子之间的作用，不能完全用两体势能表示 — 存在多体形式。

二. 均匀球体的引力

均匀球体：$\rho=$ 常量，看成同心球壳叠加



等同于相同质量的质点在球心所产生的引力：

$$F=-G\frac{mm_0}{r^2}$$

也适用于ρ随半径分布的球体：$\rho=\rho(r)$。

§ 4.8 功能原理和机械能守恒定律

一. 功能原理

对质点系： $W_{外}+W_{内}=E_k(B)-E_k(A)$

$$W_{保内}=-[E_p(B)-E_p(A)]$$

定义系统机械能 $\boxed{E=E_k+E_p}$ — 状态量

$$\boxed{W_{外}+W_{非保内}=E(B)-E(A)}$$

功能原理适用于惯性系，对非惯性系，需要考虑惯性力的功。

二. 机械能守恒定律

只有保守内力作功时，系统机械能不变：

$$\boxed{W_{外}=0 \text{ 且 } W_{非保内}=0，\text{则 } E=常量}$$

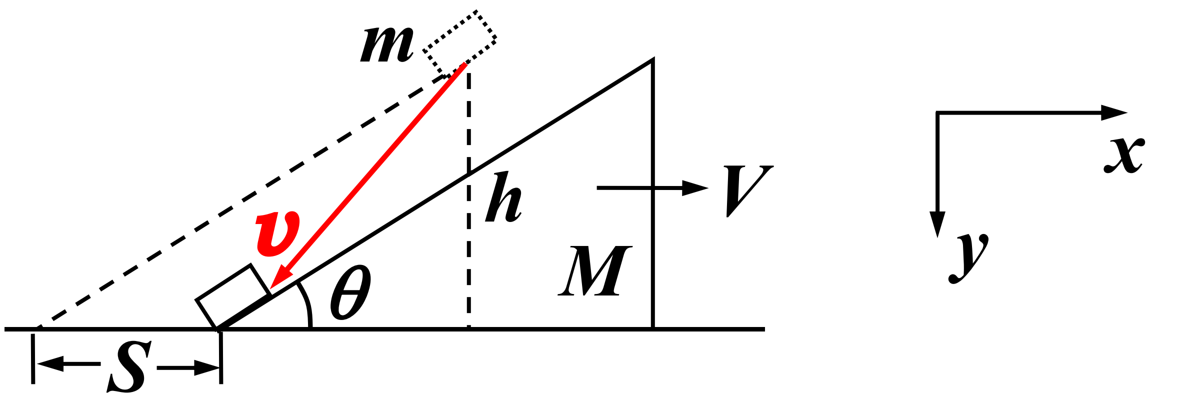
保守系统：内力都是保守力的系统。

孤立的保守系统的机械能守恒：

$$\Delta E=0,\ \ \Delta E_k=-\Delta E_p=W_{保内}$$

动能、势能通过保守内力作功相互转化

【例】水平面上有一质量 M、倾角 θ 的楔块，质量 m 的小滑块从高 h 处静止下滑到底面，忽略所有摩擦。求 m 对 M 作的功 W 、M 后退距离 S 。



解：动能定理＋动量守恒＋机械能守恒＋相对运动

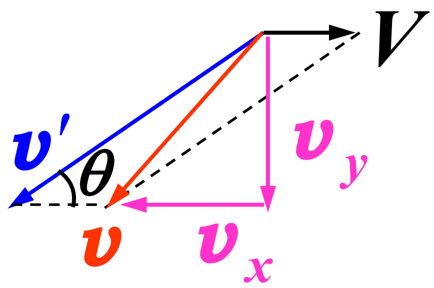
对 M： $W=\frac{1}{2}MV^2$ (1)

对 $m+M$： $MV+m\upsilon_x=0$ (2)

对 m+M+地球：

$$\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)+\frac{1}{2}MV^2=mgh \qquad (3)$$

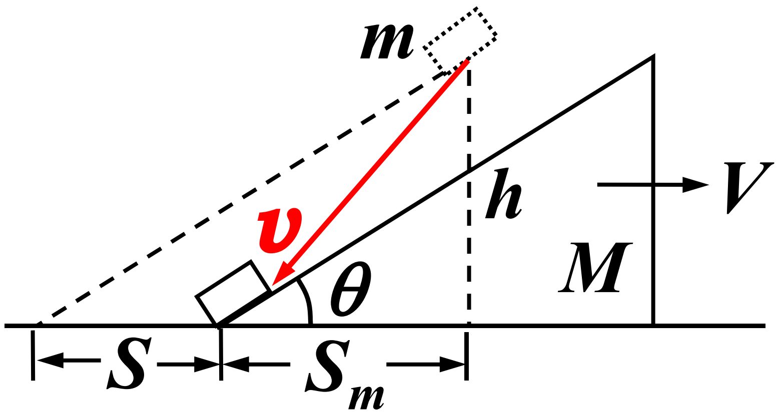
相对运动关系： $\vec{v}=\vec{v}'+\vec{V}$



$$\frac{v_y}{V+(-v_x)}=\mathrm{tg}\,\theta \qquad (4)$$

（1－4）解得： $W=\dfrac{Mgh\cos^2\theta}{(1+M/m)(M/m+\sin^2\theta)}$

设下滑时间 T，对 (2) 式 $MV+m\boldsymbol{v}_x=0$ 积分：



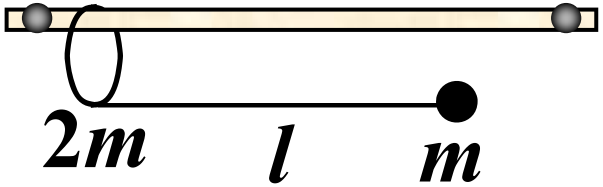
$$M\int_0^T V\,\mathrm{d}t+m\int_0^T \boldsymbol{v}_x\,\mathrm{d}t=0$$

$$MS+mS_m=0 \qquad (5)$$

位移关系：$$\frac{h}{S-S_m}=\mathrm{tg}\,\theta \qquad (6)$$

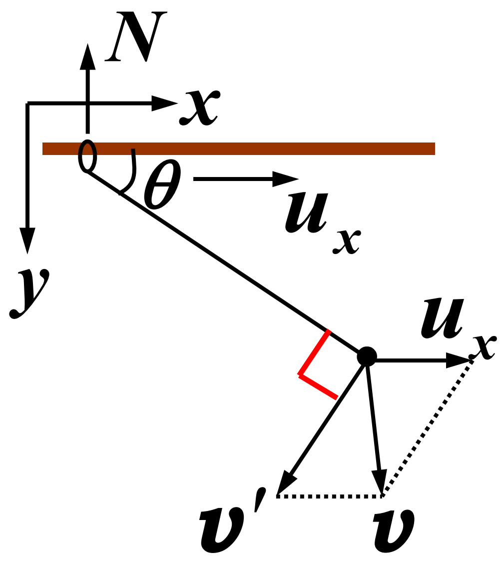
（5—6）解得：$$S=\frac{h}{(1+M/m)\,\mathrm{tg}\,\theta}$$

(5) 式也可由 $m+M$ 质心在 x 方向不动得到



【例】一质量为 $2m$ 的环套在光滑的、水平固定的细杆上，用长 l 的轻绳与质量为 m 的小球相连。将轻绳沿水平拉直，使小球从与环等高处静止释放。

求：当轻绳与水平杆夹角为θ时，其中的张力 T 。



解：环沿 x 方向运动，设速度为 u_x，设球速度为 $\boldsymbol{v}$ 。

环＋球系统：

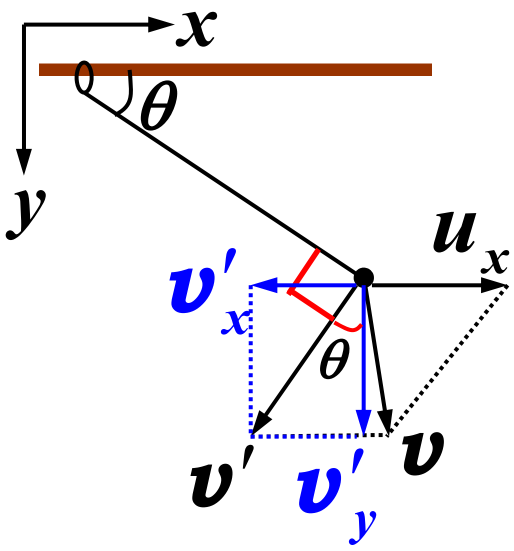
杆力 N 沿 $-y$ 方向，x 方向不受力，分动量守恒：

$$m v_x + 2m u_x = 0 \qquad (1)$$

只重力作功，机械能守恒：

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}2mu_x^2 - mgl\sin\theta = 0 \qquad (2)$$

小球相对环作圆周摆动，设相对速度为 $\boldsymbol{v}'$ 。



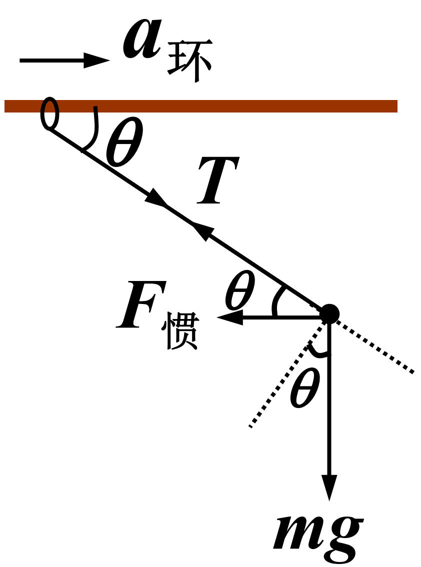
球相对环的速度$\boldsymbol{v}'$的分量满足：

$$|v'_x| = |v'_y| \tan\theta \qquad (3)$$

$$v'_x = v_x - u_x \qquad (4)$$

$$v'_y = v_y - 0 \qquad (5)$$

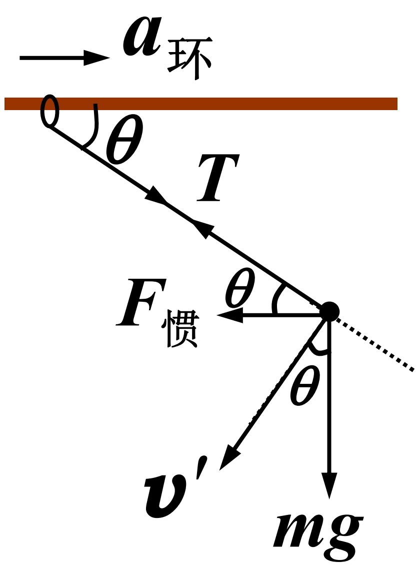
(1)—(5) 可解出所有速度分量



在圆环这个平动非惯性系中求绳中张力 T：

$$F_{惯} = m a_{环} \qquad (6)$$

$$2 m a_{环} = T\cos\theta \qquad (7)$$



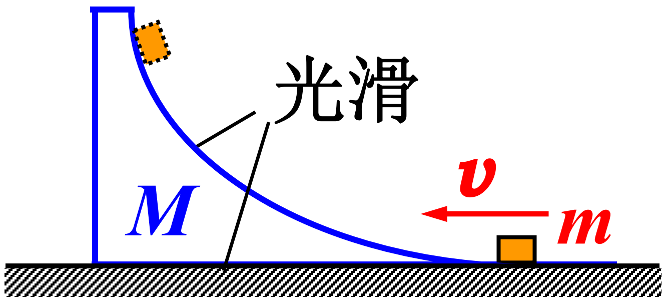
圆周运动法向方程：

$$T+F_{惯}\cos\theta-mg\sin\theta=m\frac{v'^2}{l} \quad (8)$$

(1)—(8) 解出绳中张力 T：

$$T=\frac{2\sin\theta(8+\cos^2\theta)}{(2+\cos^2\theta)^2}mg$$

【思考】下图地面压力如何变化？



【演示】

锥体上滚，载摆小车

【例】若系统在惯性系 S 中动量和机械能守恒，则系统在其它惯性系 S' 中是否动量和机械能也守恒？

答：在其它惯性系 S' 中动量和机械能也守恒。

证：由于 S' 是惯性系，故仍满足 $\sum \vec{F}_{外i} = 0$

故动量仍守恒。

在惯性系 S 中机械能守恒，故：

$$\mathrm{d}W_{外} = 0, \quad \mathrm{d}W_{非保内} = 0$$

设惯性系 S' 相对 S 的速度是 $\vec{v}$（常矢量）

$$\underbrace{\mathrm{d}\vec{r}_i}_{\text{绝对元位移}} = \underbrace{\mathrm{d}\vec{r}_i'}_{\text{相对元位移}} + \underbrace{\vec{v}\,\mathrm{d}t}_{\text{牵连元位移}}$$

$$\mathrm{d}W'_{外} = \sum_i \vec{F}_{外i} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i' = \sum_i \vec{F}_{外i} \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_i - \vec{v}\,\mathrm{d}t)$$

$$= \sum_i \vec{F}_{外i} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i - (\sum_i \vec{F}_{外i}) \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{d}W_{外} + 0 = 0$$

$$\mathrm{d}W'_{非保内} = \mathrm{d}W_{非保内} = 0$$

故 S' 中机械能仍守恒。

系统在某个惯性系中机械能守恒，并不能保证在其它惯性系中机械能也守恒，除非其动量也守恒。

三. 势能函数与系统稳定性

平衡位形：各质点受力为零的位形。

势能函数可反映系统的稳定性：

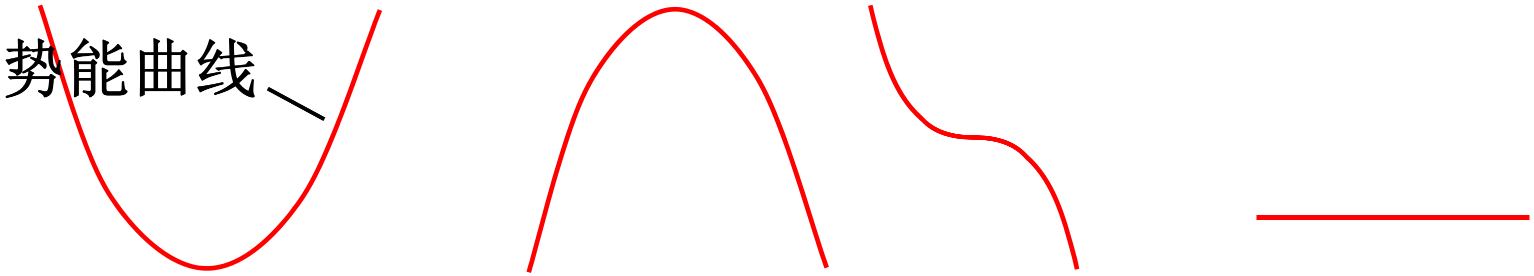
▲ 局部极小点：稳定平衡位形

以平衡位形为基准，位形稍有形变，保守内力会使系统向平衡位形恢复。

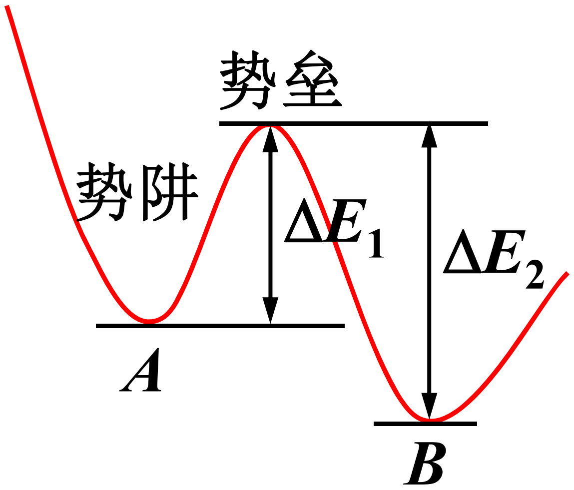
▲ 局部极大点、拐点：不稳定平衡位形

以平衡位形为基准，位形稍有形变，保守内力会使平衡位形进一步破坏瓦解。

平衡种类（一维为例）



稳定平衡　　不稳平衡　　随遇平衡



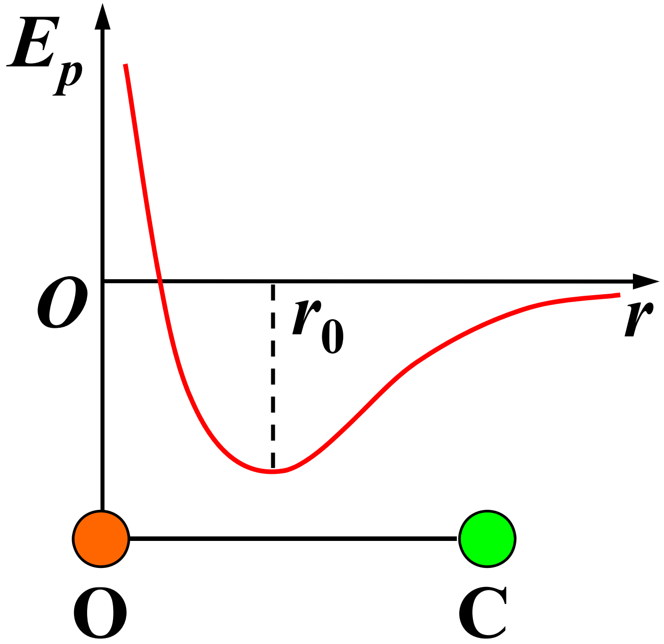
亚稳平衡

在 A 点，若 $E_k > \Delta E_1$ 则质点可越过势垒进入 B 区。

在 B 点，若 $E_k > \Delta E_2$ 则质点可越过势垒进入 A 区。

总能量 E 决定质点在势场中的运动范围。

【例】双原子分子势能曲线

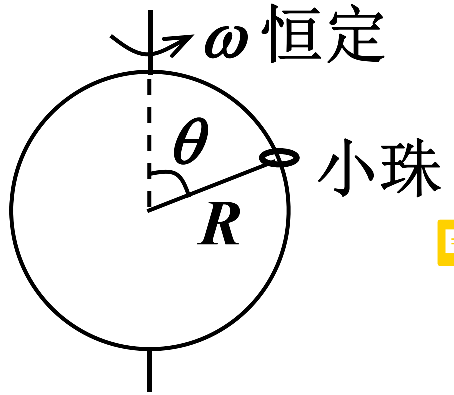


$r = r_0$：$f = 0$，平衡位置

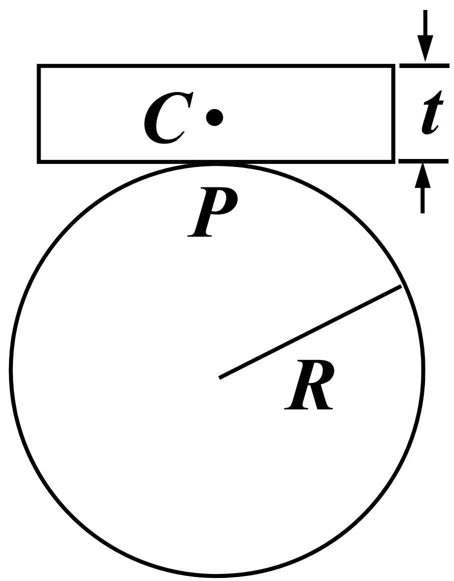
$r > r_0$：$f < 0$，引力作用

$r < r_0$：$f > 0$，斥力作用

【思考】用势能讨论小珠的稳定性



【例】半径 R 的圆柱体在水平面上固定不动，厚度 t 的均匀木板水平放置在圆柱体上，其长度方向与圆柱体的轴垂直，处于平衡状态。问厚度 t 取何值时才稳定。



设木板偏离平衡位置转过一个小角θ

木板不沿圆柱体滑动条件：

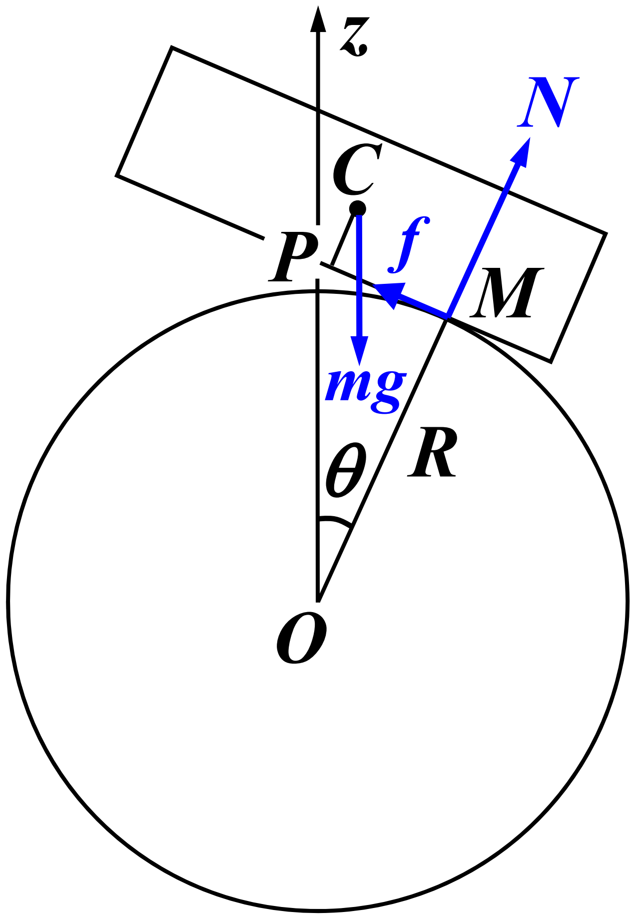
切向合力为零，即：

$$f - mg\sin\theta = 0$$

静摩擦力 f 满足：

$$f \le f_{\max} = \mu N = \mu mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \mu \ge \tan\theta \approx 0$$



故只要 $\mu \neq 0$，木板作小角偏离不会滑动。

矢量关系：

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PC}$$

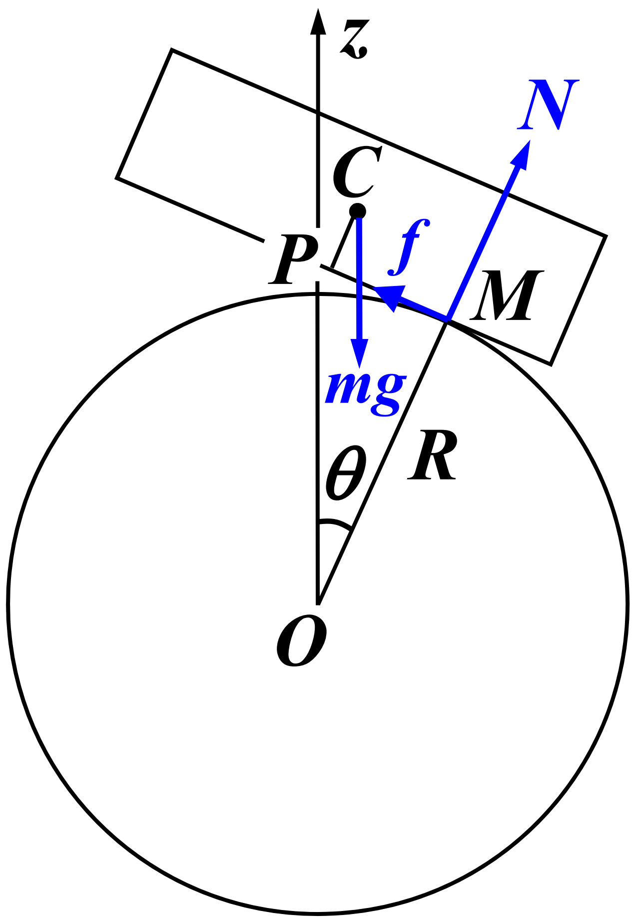
$$OM = R$$

$$MP = R\theta$$

$$PC = \frac{t}{2}$$

质心 C 坐标：

$$z_C = R\cos\theta + R\theta\sin\theta + \frac{t}{2}\cos\theta$$



取 O 点为势能零点，木板的势能为：

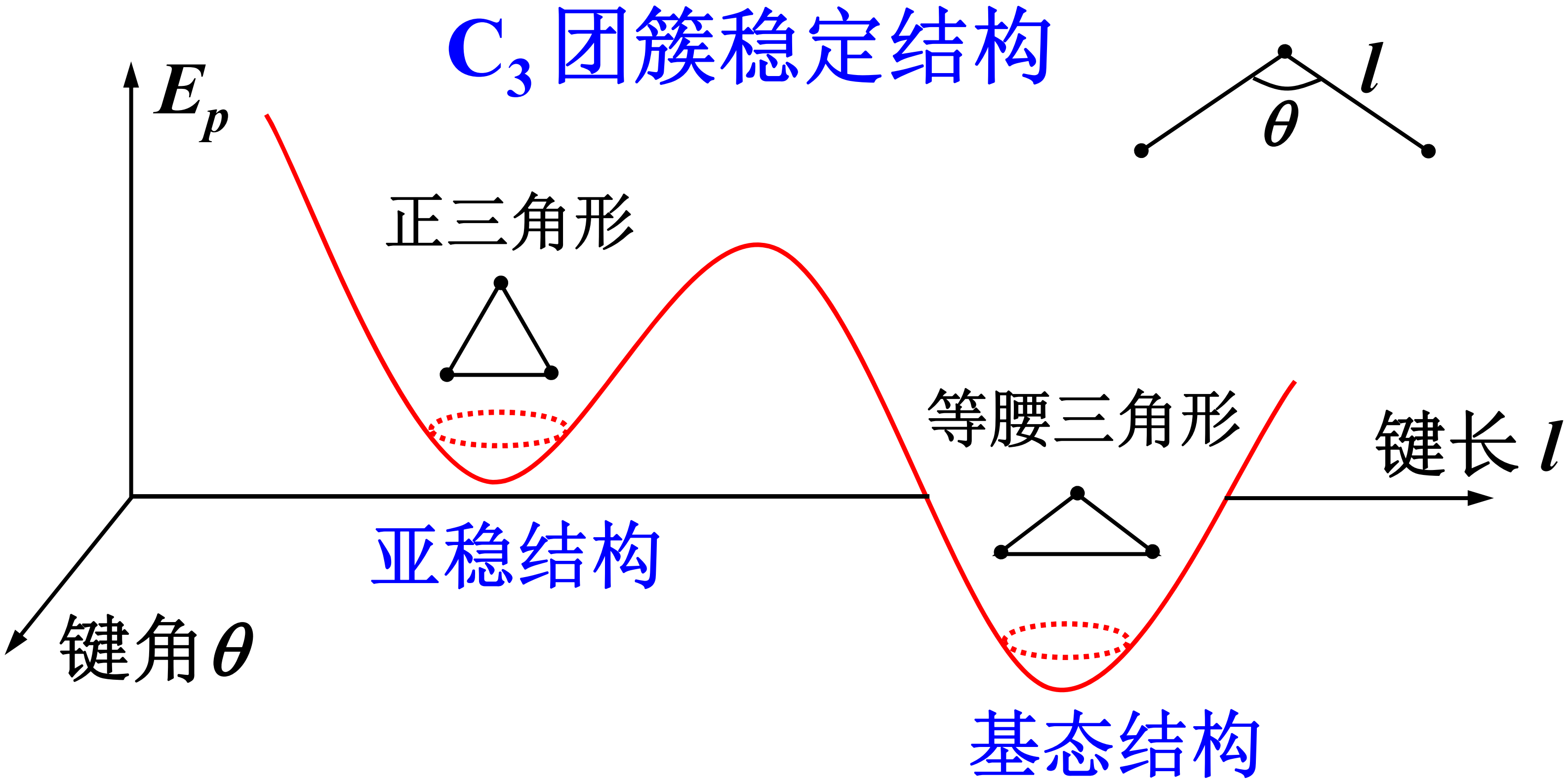
$$E_P = mgz_C = mg(R\cos\theta + R\theta\sin\theta + \frac{t}{2}\cos\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_P}{\mathrm{d}\theta^2} = mg(R\cos\theta - R\theta\sin\theta - \frac{t}{2}\cos\theta)$$

稳定平衡要求： $\left.\frac{\mathrm{d}^2 E_P}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0} > 0 \quad \Rightarrow \quad t < 2R$

木板厚度 t < 圆柱体直径 $2R$ 时，可以稳定。

势能曲面（二维为例）



§ 4.9 质心系中的功能关系

一. 克尼希定理

质心系 S'： $\sum m_i \vec{v}_i' = 0,\quad \vec{v}_C' = 0$

$$E_k' = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$ —— 质点系内动能

惯性系 S： $\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_C$

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$ —— 质点系总动能

$$E_{kC} = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right) v_C^2$$ —— 质心动能

$$E_k=\sum\frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i'+\vec{v}_C)\cdot(\vec{v}_i'+\vec{v}_C)$$

$$=\sum\frac{1}{2}m_i v_i'^2+\underbrace{(\sum m_i\vec{v}_i')}_{=0}\cdot\vec{v}_C+\frac{1}{2}(\sum m_i)v_C^2$$

所以 $\boxed{E_k=E_k'+E_{kC}}$ —克尼希定理

二. 质心系中的功能原理

$$\boxed{W_{外}'+W_{非保内}'=\Delta E'}$$

质心系中功能原理仍成立，和惯性系中形式相同，和质心系是否是惯性系无关。

【证明1】

若质心系是惯性系，则功能原理必然成立。

若质心系是非惯性系，则需考虑惯性力的功：

$$\mathrm{d}W'_{外} + \mathrm{d}W'_{非保内} + \mathrm{d}W'_{惯} = \mathrm{d}E'$$

设质心加速度为 $\vec{a}_C$ ，则：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W'_{惯} &= \sum_i (-m_i \vec{a}_C) \cdot \mathrm{d}\vec{r}'_i \\ &= -\vec{a}_C \cdot (\sum_i m_i \vec{v}'_i)\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

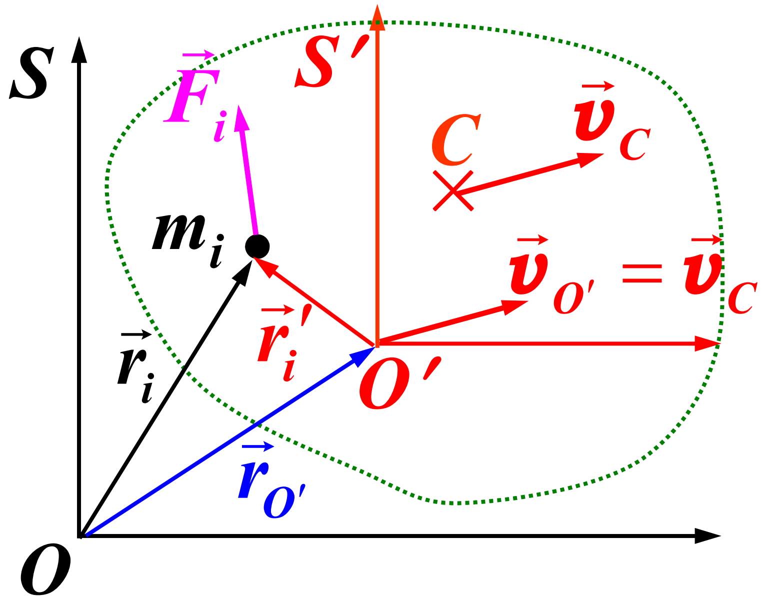
$$\therefore \quad \mathrm{d}W'_{外} + \mathrm{d}W'_{非保内} = \mathrm{d}E'$$

【证明2】

$$\mathrm{d}W_{外} = \sum \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i$$

$$= \sum \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i' + \sum \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{O'}$$

$$= \mathrm{d}W_{外}' + (\sum \vec{F}_i) \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C$$



$\therefore \quad \mathrm{d}W_{外} = \mathrm{d}W_{外}' + \mathrm{d}E_{kC}$ (1)

内力成对出现： $\mathrm{d}W_{非保内} = \mathrm{d}W_{非保内}'$ (2)

科尼希定理： $\mathrm{d}E_k = \mathrm{d}E_k' + \mathrm{d}E_{kC}$ (3)

势能与参考系无关： $\mathrm{d}E_p = \mathrm{d}E_p'$ (4)

(1) + (2) 得：

$$\mathbf{d}W_{外} + \mathbf{d}W_{非保内} = \mathbf{d}W'_{外} + \mathbf{d}E_{kC} + \mathbf{d}W'_{非保内} \quad (5)$$

(3) + (4) 得：

$$\mathbf{d}E_k + \mathbf{d}E_p = \mathbf{d}E'_k + \mathbf{d}E_{kC} + \mathbf{d}E'_p \quad (6)$$

S 系中功能原理：

$$\mathbf{d}W_{外} + \mathbf{d}W_{非保内} = \mathbf{d}E_k + \mathbf{d}E_p = \mathbf{d}E \quad (7)$$

由 (5)(6)(7) 得：

$$\mathbf{d}W'_{外} + \mathbf{d}W'_{非保内} = \mathbf{d}E'_k + \mathbf{d}E'_p = \mathbf{d}E'$$

∴ 质心系中功能原理仍然成立，形式不变。

质心系中机械能守恒定律：

$$\boxed{\text{若} W'_{\text{外}} = 0 \text{ 且 } W'_{\text{非保内}} = 0\text{，则 } E' = \text{常量}}$$

不管质心系是否为惯性系，功能原理和机械能守恒定律都与惯性系中形式相同。

三. 两质点系统的内动能

惯性系 S：设 m_1 速度为 $\vec{v}_1$，m_2 速度为 $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_C = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$E_{kC} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_C^2$$

质心系 S'：　$E'_k = E_k - E_{kC}$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2$$

令　$\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$　—— 相对速度

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$ —— 约化质量

则　$$\boxed{E'_k = \frac{1}{2}\mu v_r^2}$$ —— 两质点系统的内动能

若 $m_2 >> m_1$，则 $\mu \approx m_1$， $E'_k = \frac{1}{2} m_1 v_r^2$

【例】对飞船 – 地球系统：

$m_{船} << m_{地}$， $\mu \approx m_{船}$， $v_r = v_{船对地}$，

在质心系，飞船和地球总动能：

$$E'_k = \frac{1}{2}\mu v_r^2 \approx \frac{1}{2} m_{船} v_{船对地}^2$$

地心系中飞船动能

在质心系，可不考虑地球动能。

【例】第三宇宙速度

第三宇宙速度：从地面发射宇宙飞船，使它能相继脱离地球和太阳的引力束缚而需的最小发射速度。

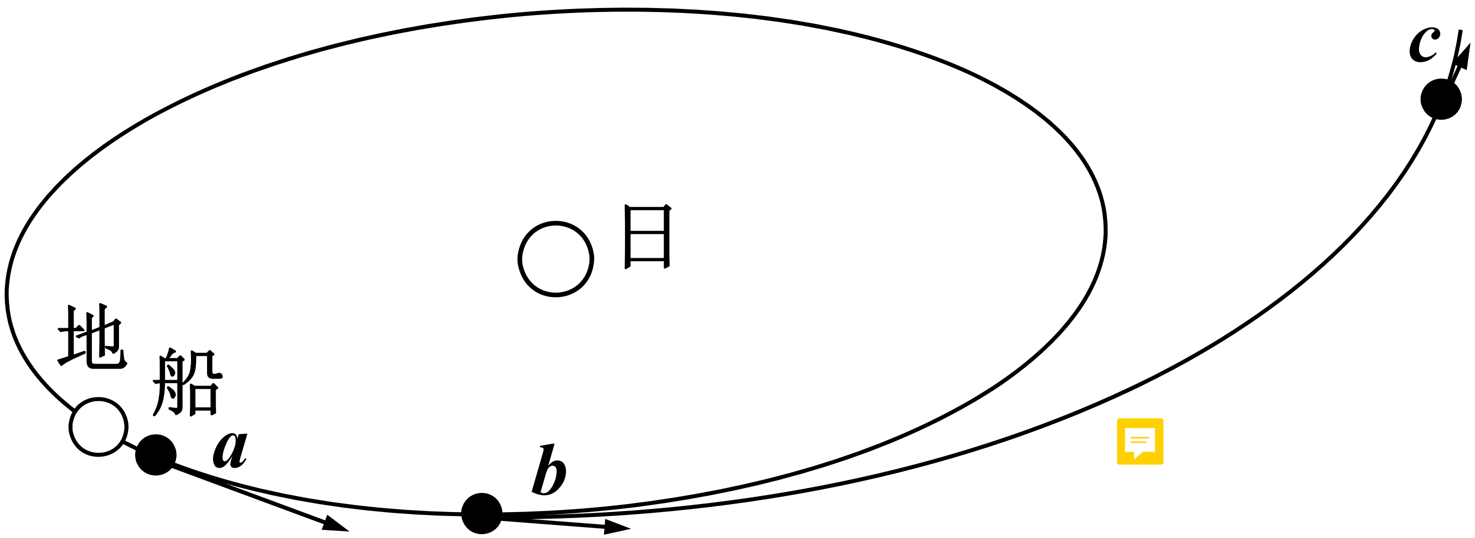
注意：第三宇宙速度是相对地球的。

过程分 2 步：

1. 发射会利用地球在太阳系的公转速度：沿地球轨道运动方向发射。让飞船脱离地球引力场作用，进入地球绕太阳的公转轨道运动，而且保持一定的动能。此时在太阳系观察，地球、飞船都在地球公转轨道上运动，地球—飞船的距离足够大，以至于地球—飞船的引力势能几乎为零。

2. 在太阳系，飞船在地球公转轨道上运动，有足够的动能，以逃离太阳的引力场作用而进入太空。

太阳系的观察结果



a：发射， *b*：逃离地球束缚， *c*：逃离太阳束缚

由于地球质量 >> 飞船质量，故地球 —飞船质心系和地心系等价。飞船脱离地球引力场束缚的过程中，太阳对地球 — 飞船系统近似不做功，地球 — 飞船系统机械能守恒。

在地球 —飞船质心系或地心系，设第三宇宙速度为 $\boldsymbol{v}_3$，脱离地球引力束缚后的速度为 $\boldsymbol{v}'_3$：

$$\frac{1}{2}m_{船}\boldsymbol{v}_3^2 - G\frac{m_{地}m_{船}}{R_{地}} = \frac{1}{2}m_{船}\boldsymbol{v}_3'^2$$

在太阳系，地球绕太阳的公转速度：

$$u_{地} = \sqrt{\frac{Gm_{日}}{r_{地-日}}}$$

在太阳系，飞船脱离地球引力束缚后的速度为：

$$u = v_3' + u_{地}$$

在太阳系，飞船恰好能脱离太阳的引力束缚要求：

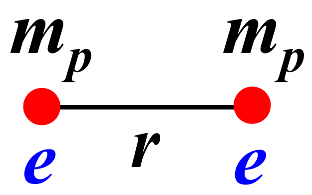
$$\frac{1}{2} m_{船} u^2 - G \frac{m_{日} m_{船}}{r_{地-日}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_3 = \sqrt{2gR_{地} + (3 - 2\sqrt{2}) G \frac{m_{日}}{r_{地-日}}} = 16.6 \times 10^3 \ \mathrm{m/s}$$

（$R_{地} = 6.37 \times 10^6 \mathrm{m}$，$r_{地-日} = 1.50 \times 10^{11} \mathrm{m}$，$m_{日} = 1.99 \times 10^{30} \mathrm{kg}$）

【思考】为何不在太阳系直接计算第三宇宙速度？

【例】质子间相互作用电势能 ke^2/r，k 为常量。两质子从相距很远处分别以速率 v_0 和 $2v_0$ 相向运动。



求：能达到的最近距离，忽略万有引力。

解：只有保守内力作用，动能＋静电势能守恒

质心系：两质子达到最近距离时，动能全部转化为静电势能：（地面系如何？）

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_p}{2}\right)(3v_0)^2 = k\frac{e^2}{r_{\min}} \Rightarrow r_{\min} = \frac{4ke^2}{9m_p v_0^2}$$

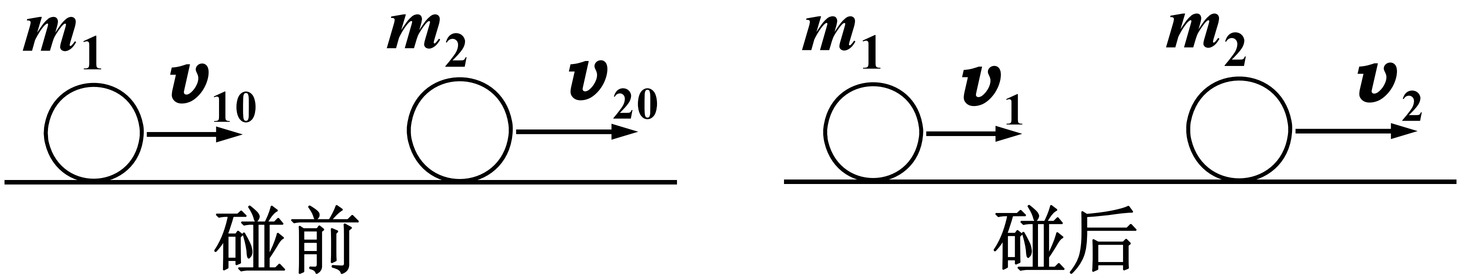
§ 4.10 碰撞

- ▲ 强调碰撞前后运动状态的变化，忽略过程细节
- ▲ 强调内力、忽略外力

$$\begin{cases}\text{动量守恒}\\ \text{角动量守恒}\\ \text{动能守恒（弹性碰撞）}\end{cases}$$

一. 一维正碰

设碰撞前后参数如下，速度为代数量：



设碰撞前后动量守恒： $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{10} + m_2 v_{20}$

1. 弹性碰撞

碰撞时小球在弹性限度内发生形变和形变恢复，

碰后系统动能守恒：

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2$$

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \quad v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1 v_{10}}{m_1 + m_2}$$

- 碰撞前后相对速度大小不变，方向相反：

$$v_2 - v_1 = v_{10} - v_{20}$$

- $m_1 = m_2$，碰撞后速度互换： $v_1 = v_{20}$， $v_2 = v_{10}$
- $m_1 << m_2$ 且 $v_{20} = 0$，碰撞后 m_1 反弹，m_2 不动：

$$v_1 = -v_{10}$$

- $m_1 >> m_2$ 且 $v_{20} = 0$，碰撞后 m_1 原样前进，m_2 以 2 倍速前进：

$$v_1 = v_{10}, \quad v_2 = 2v_{10}$$

2. 完全非弹性碰撞

碰撞时小球发生范性形变 — 只有形变，没有形变恢复，碰后系统动能不守恒，m_1、m_2以相同速度运动：

$$v_1 = v_2 = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

碰后动能损失：

$$E_{k损} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{10} - v_{20})^2 = E_k'$$

两球的内动能全部损失，转化为其它形式能量：热能或小球内能。

3. 非弹性碰撞

介于弹性与完全非弹性之间的碰撞

引入恢复系数： $e = \dfrac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$， $0 < e < 1$

$$v_1 = v_{10} - \frac{(1+e)m_2(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2}$$

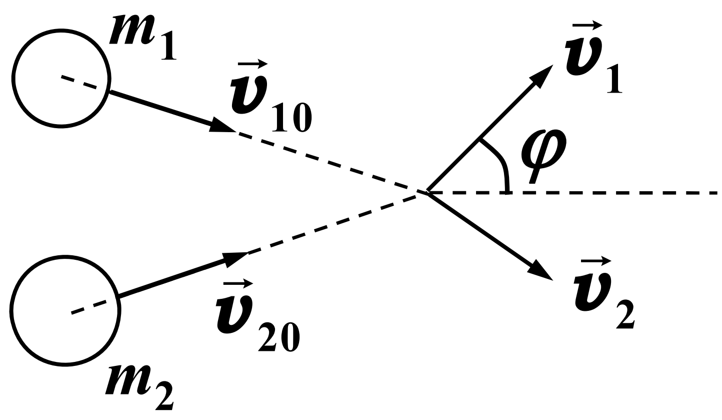
$$v_2 = v_{20} - \frac{(1+e)m_1(v_{20} - v_{10})}{m_1 + m_2}$$

碰后动能损失：

$$E_{k损} = (1-e^2)\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{10} - v_{20})^2 = (1-e^2)E_k'$$

二. 二维斜碰

设系统动量守恒：



$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20}$$

- 完全非弹性碰撞有唯一解
- 弹性碰撞

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2$$

解不确定：源于小球的质点化、刚化模型

补充一个角度关系有唯一解