第三章 动量

§3.1 质点动量定理

§3.2 质点系动量定理

§3.3 质点系动量守恒定律

§3.4 变质量问题

§3.5 质心

§3.6 质心运动定理

§3.7 质心参考系

牛顿定律是瞬时的规律。

在有些问题如宏观的碰撞、微观的散射中，往往关心过程中力的效果：

力对时间和空间的积累效应。

力在时间上的积累效应：

平动 $\Rightarrow$ 冲量 $\Rightarrow$ 动量改变

转动 $\Rightarrow$ 冲量矩 $\Rightarrow$ 角动量改变

力在空间上的积累效应

功 $\Rightarrow$ 能量改变

§ 3.1 质点动量定理

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{\vec{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}}$$ （微分形式）

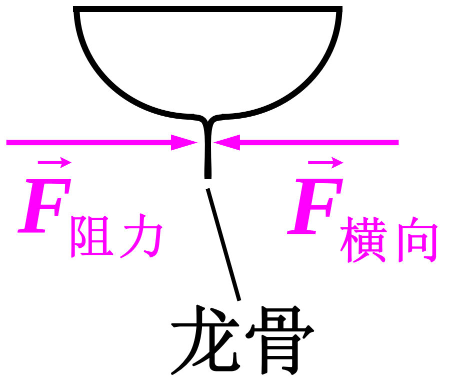
$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1}$$ （积分形式）

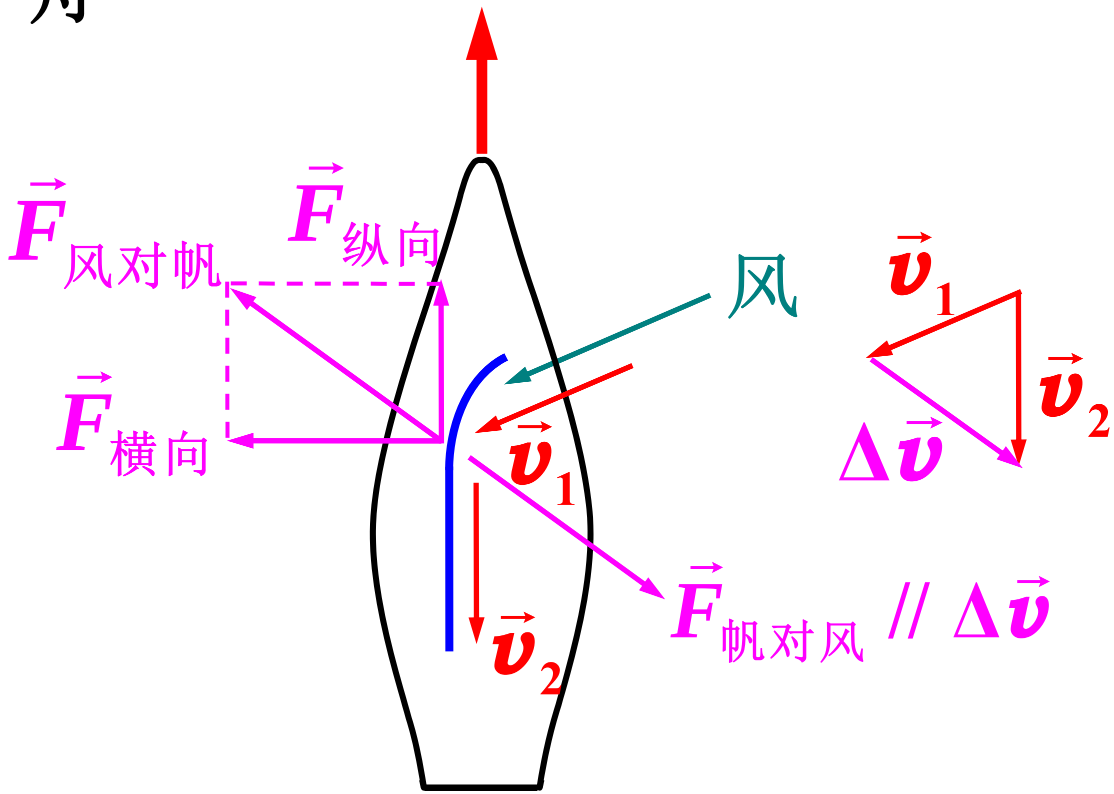
$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t$ 称为冲量

— 力对时间的积累作用

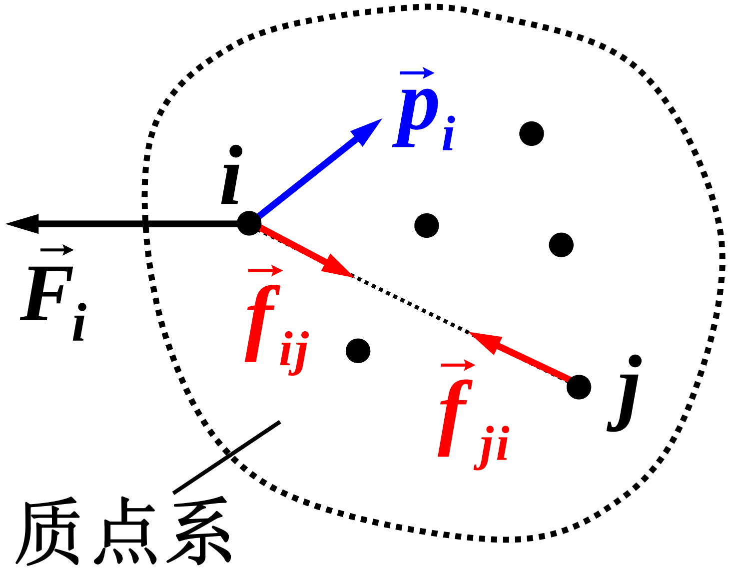
平均冲力 $\overline{\vec{F}}=\dfrac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t}{t_2-t_1}=\dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ 【TV】冲力演示

【讨论】逆风行舟





§ 3.2 质点系动量定理



$\vec{F}_i$ ：质点 i 受的合外力

$\vec{f}_{ij}$ ：质点 j 对 i 的内力

$\vec{p}_i$ ：质点 i 的动量

对质点 i ： $$(\vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij})\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_i$$

对质点系： $$\sum_i (\vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij})\mathrm{d}t = \sum_i \mathrm{d}\vec{p}_i$$

由牛顿III定律有： $$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} = 0$$

所以：　$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right)\mathrm{d}t = \sum_i \mathrm{d}\,\vec{p}_i$$

令　$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{外}\,,\quad \sum_i \vec{p}_i = \vec{P}$$

质点系动量定理

$$\boxed{\vec{F}_{外}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}} \qquad \boxed{\vec{F}_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}}$$ （微分形式）

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{外}\cdot\mathrm{d}t = \vec{P}_2 - \vec{P}_1}$$ （积分形式）

系统总动量变化和外力有关，和内力无关。

用质点系动量定理处理问题可避开内力。

§3.3 质点系动量守恒定律

质点系的合外力为零时，质点系总动量不变。

$$\boxed{\vec{F}_{外}=0，\vec{P}=常矢量}$$

几点说明：

1. 动量守恒定律是牛顿第三定律的必然推论。
2. 动量定理及动量守恒定律只适用于惯性系。
3. 动量若在某一惯性系中守恒，则在其它一切惯性系中均守恒。

4. 若某个方向上合外力为零，则该方向上动量守恒，尽管总动量可能并不守恒。

5. 当外力 << 内力且作用时间极短时（如碰撞），可认为动量近似守恒。

6. 动量守恒定律是比牛顿定律更普遍、更基本的定律，它在宏观和微观领域均适用。

§ 3.4 变质量问题

牛顿力学中的 2 类变质量问题：

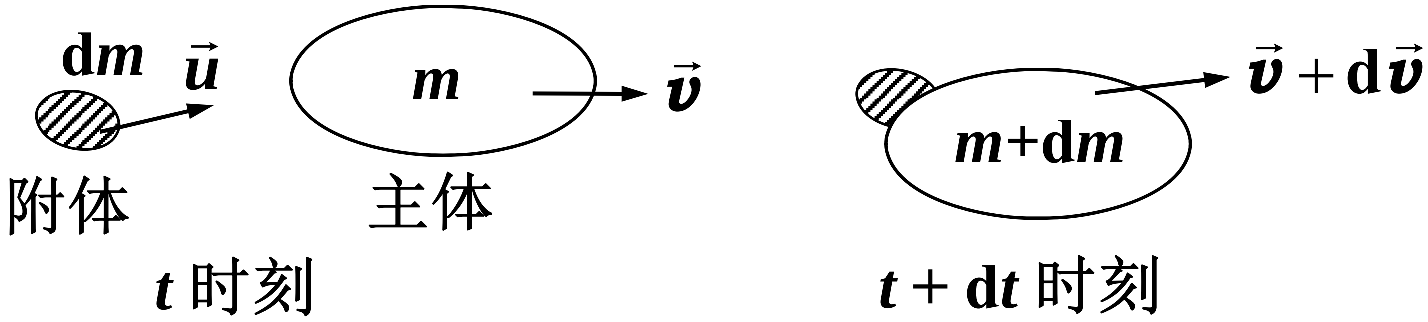
- 粘附 — 质量增加，如滚雪球、雨滴下落等
- 抛射 — 质量减少，如火箭发射

注意：质点动量定理（牛顿定律）或质点系动量定理处理的对象分别是质量确定的质点或质点系。

处理变质量问题思路：

- 选质量确定的对象：主体和附体。附体是一质量微元，经 dt 时间从主体脱离或粘附到主体上。
- 分析 $t - t + \mathrm{d}t$ 时间内，主体和附体的动量变化，列有关动量定理的方程，得到主体运动方程。

变质量运动方程 — 主体运动方程



- 设 $t - t+\mathrm{d}t$ 时间内，主体和附体的质量分别是 m 和 dm，主体和附体之间力为 $\vec{f}_{主对附}$ 和 $\vec{f}_{附对主}$，主体和附体受其它力分别为 $\vec{F}_{主}$ 和 $\vec{F}_{附}$ 。
- 设 t 时刻，主体和附体速度分别为 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ ，动量分别为 $\mathrm{d}m\vec{u}$ 和 $m\vec{v}$ 。
- $t+\mathrm{d}t$ 时刻，主体和附体速度为 $\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}$，动量分别为 $m(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})$ 和 $\mathrm{d}m(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})$ 。

对主体 + 附体构成的系统，列动量定理方程：

$$m(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})+\mathrm{d}m(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-(m\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{u})=(\vec{F}_{主}+\vec{F}_{附})\mathrm{d}t$$

略去 2 阶小量，设 $\vec{F}=\vec{F}_{主}+\vec{F}_{附}$ ，$\vec{v}_{相对}=\vec{u}-\vec{v}$ 得：

主体运动方程 $$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}_{相对}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\vec{F}}$$

$\vec{F}$ — 主体 + 附体构成的系统所受合外力

$\vec{v}_{相对}$ — 附体相对主体的速度

$\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ — 主体质量的变化率

单独对主体列动量定理方程：$m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_{主}+\vec{f}_{附对主}$

和主体方程联立得主体和附体之间的作用力：

$$\boxed{\vec{f}_{附对主}=\vec{v}_{相对}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\vec{F}_{附}}$$

说明：

- 以上关于主体运动方程、主附体间作用力的公式既适用于粘附 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}>0$，也适用于抛射 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}<0$。

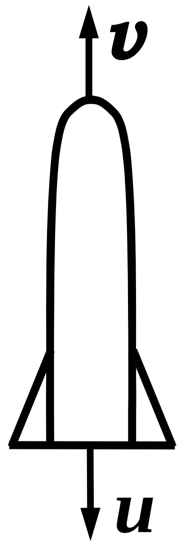
- 对主体和外界同时有若干个质量交换过程，主体方程推广为：

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \vec{v}_{i\text{相对}}\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}+\vec{F}}$$

主体质量变化率： $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\sum_i \dfrac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}$

其中粘附 $\dfrac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}>0$，抛射 $\dfrac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}<0$。

【例】设火箭不受外力自由飞行，燃料相对箭体以恒定速度 u 喷出，求火箭速度和所受反推力。



解：$\vec{F} = 0$，$\vec{F}_{附} = 0$，$\vec{v}_{相对} = \vec{u}$

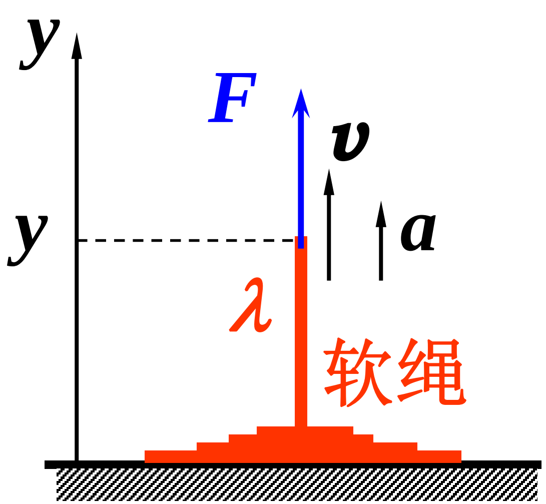
$$\Rightarrow \quad d\vec{v} = \vec{u}\frac{dm}{m} \quad \Rightarrow \quad \int_i^f d\vec{v} = \vec{u}\int_{m_i}^{m_f}\frac{dm}{m}$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i - \vec{u}\ln\frac{m_i}{m_f} = \vec{v}_i - \vec{u}\ln N$$

$N = m_i / m_f$ — 火箭质量比

多级火箭速度：$\vec{v} = -\sum_i \vec{u}_i \ln N_i$

火箭所受反推力：$\vec{f}_{气对箭} = \vec{u}\, dm/dt$



【例】绳线密度 λ，分别用变质量、隔离体、质点系动量定理求解：

（1）$\boldsymbol{v}$ 恒定，$F = ?$

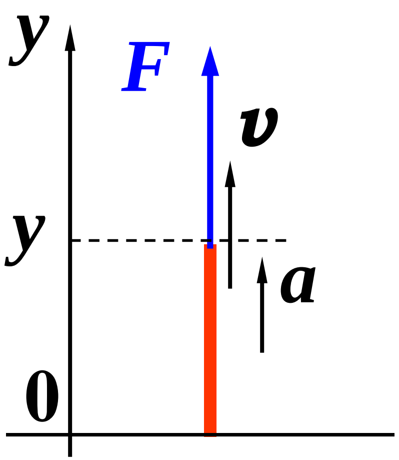
（2）$\boldsymbol{a}$ 恒定，$F = ?$

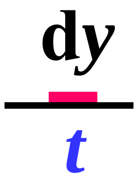
解：方法一　变质量法

主体：　被拉起的绳，质量在不断增加。

设 t 时刻绳长 y 已被拉起，$\mathrm{d}t$ 内 $\mathrm{d}y$ 又被拉起。

以 $y+\mathrm{d}y$ 为研究系统





$u = 0$

设向上为正： $\boldsymbol{v}_{相对} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$

$$m = \lambda y \qquad \mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}y$$

$y + \mathrm{d}y$ 所受合力： $F - \lambda\, y \cdot g$

主体运动方程：

$$\lambda y \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{v}\frac{\lambda \mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + F - \lambda\, y \cdot g$$

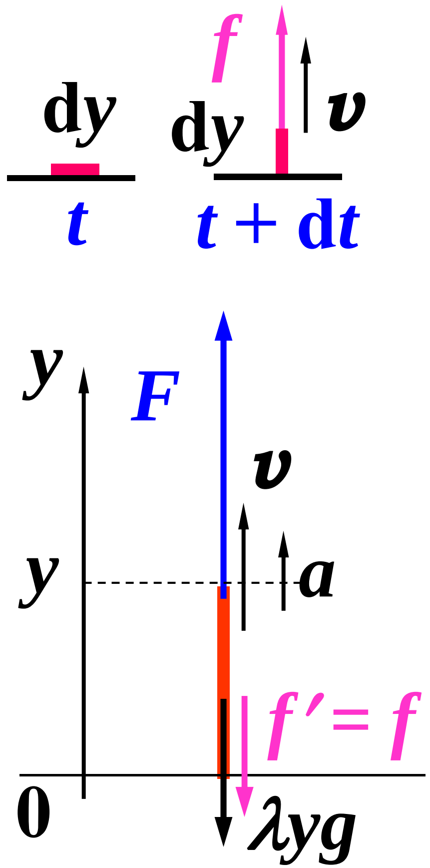
利用： $\mathrm{d}\,y/\mathrm{d}\,t = \boldsymbol{v}$ ， $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = a$

$$\Rightarrow \quad F = \lambda y a + \lambda \boldsymbol{v}^2 + \lambda y g$$

（1） $\boldsymbol{v}$ 恒定， $a = 0$， $F = \lambda y g + \lambda \boldsymbol{v}^2$

（2） a 恒定， $\boldsymbol{v}^2 = 2ay$， $F = \lambda y g + 3\lambda y a$

方法二　隔离体分别研究 y 和 dy 段



dy 段：设所受拉力 f，由动量定理有：

$$f\,\mathrm{d}t=(\lambda\,\mathrm{d}y)v$$

$$f=\lambda v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\lambda v^2$$

y 段：

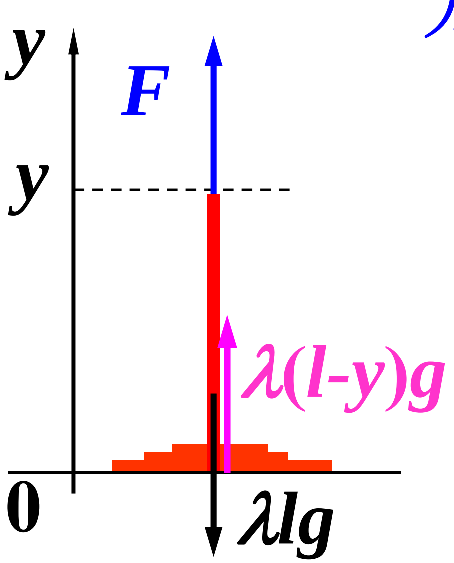
$$F-\lambda yg-f=\lambda ya$$

$$F=\lambda yg+\lambda v^2+\lambda ya$$

（1）v 恒定，$a=0$，　$F=\lambda yg+\lambda v^2$

（2）a 恒定，$v^2=2ay$，　$F=\lambda yg+3\lambda ya$

方法三　质点系动量定理



将绳看成质点系，设绳长 l，

所受外力：

拉力 F，重力 λlg，

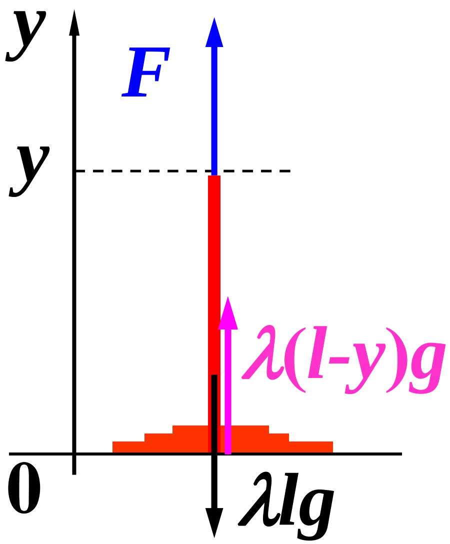
支持力 $\lambda(l-y)g$

总动量：

被拉起的 y 段动量 ＋ 桌面上 $(l-y)$ 段的动量

被拉起的 y 段动量 $= \lambda y v$

桌面上 $(l-y)$ 段的动量 $= 0$



根据质点系动量定理得：

$$F+\lambda(l-y)g-\lambda lg=\frac{\mathrm{d}(\lambda y\boldsymbol{v}+0)}{\mathrm{d}t}$$

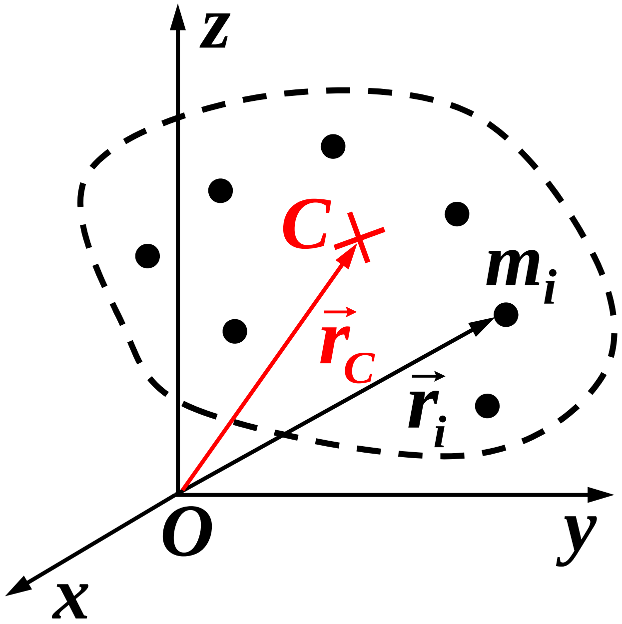
$$F=\lambda yg+\lambda y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\lambda\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

（1）$\boldsymbol{v}$ 恒定， $\dot{y}=\boldsymbol{v},\ \dot{\boldsymbol{v}}=0,\ F=\lambda yg+\lambda\boldsymbol{v}^2$

（2）a 恒定， $\dot{y}^2=2ay,\ \dot{\boldsymbol{v}}=a,\ F=\lambda yg+3\lambda ya$

§ 3.5 质心

定义质点系质心的位矢：

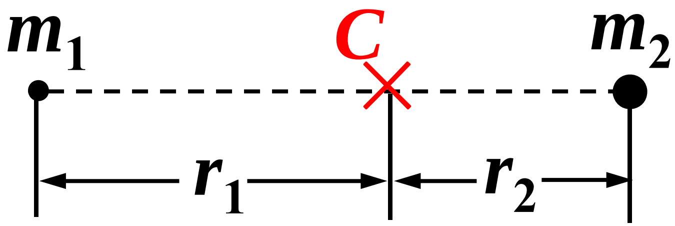


$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \quad \left(m = \sum m_i\right)}$$

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m} \qquad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m} \qquad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

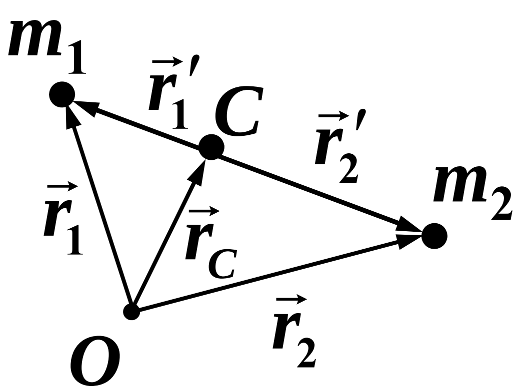
质心位置是质点位置的质量加权平均值。

▲ 两质点系统（杠杆定理）



$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

证明：



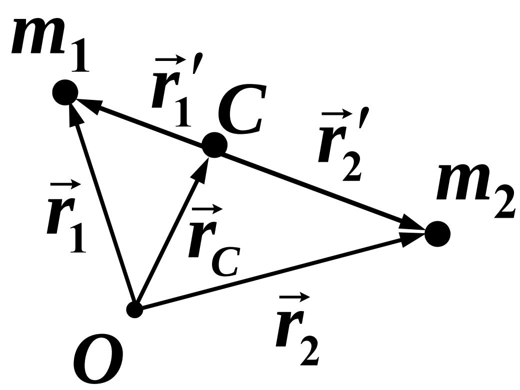
$$\vec{r}_C = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}_2$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_C = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{r}_C = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

所以质心在连线上，且

$$m_1 r_1' = m_2 r_2'$$



▲ 几个物体的质心满足质心组合关系

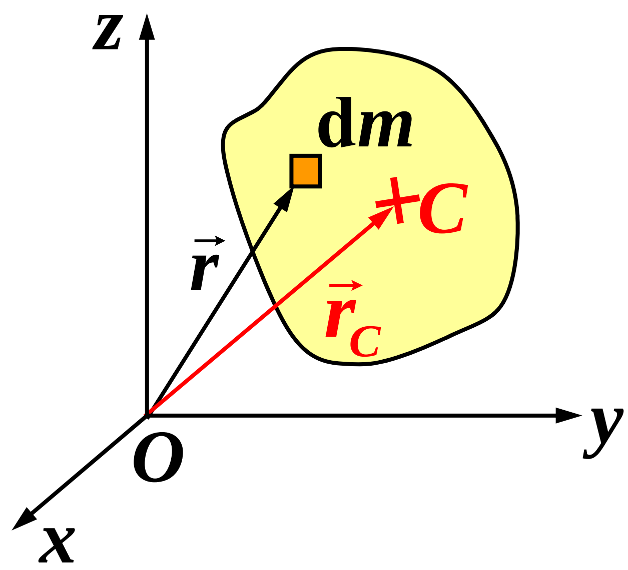
$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_{iC}}{m} = \frac{m_1 \vec{r}_{1C} + m_2 \vec{r}_{2C} + \cdots}{m}$$

▲ 质量分布对称的物体的对称中心是质心

▲“小线度” 物体的质心和重心重合

▲ 连续体质心

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m}$$



体质元 $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}v$

ρ — 质量体密度

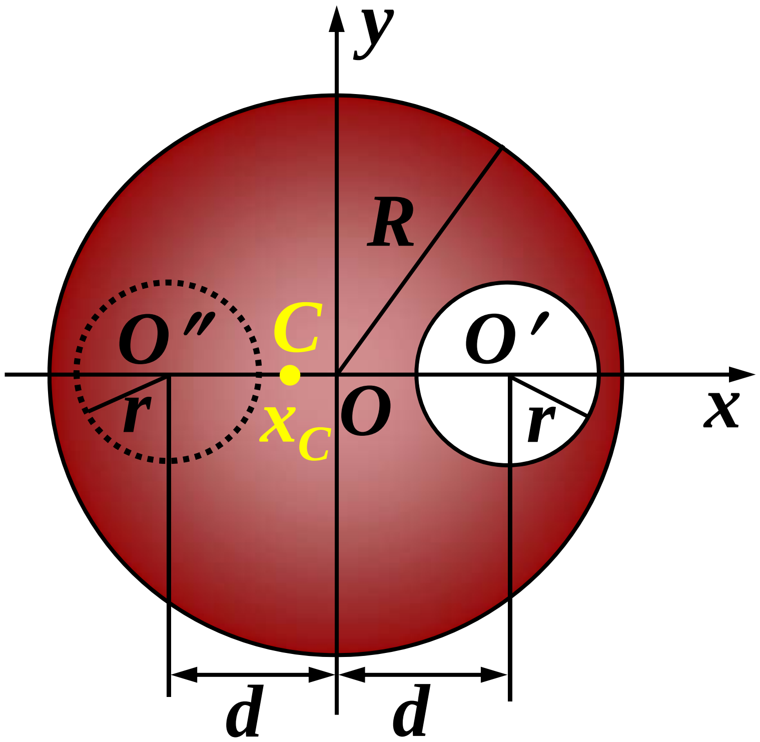
面质元 $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}s$，　σ — 质量面密度

线质元 $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l$，　λ — 质量线密度

注意可利用对称性将积分降维。

【例】如图，求挖掉小圆盘后系统质心坐标。

解：由对称性分析，质心 C 应在 x 轴上。



令 σ 为质量面密度

$$x_C = \frac{0 + (-d \cdot \sigma \cdot \pi r^2)}{\sigma \cdot \pi R^2 - \sigma \cdot \pi r^2}$$

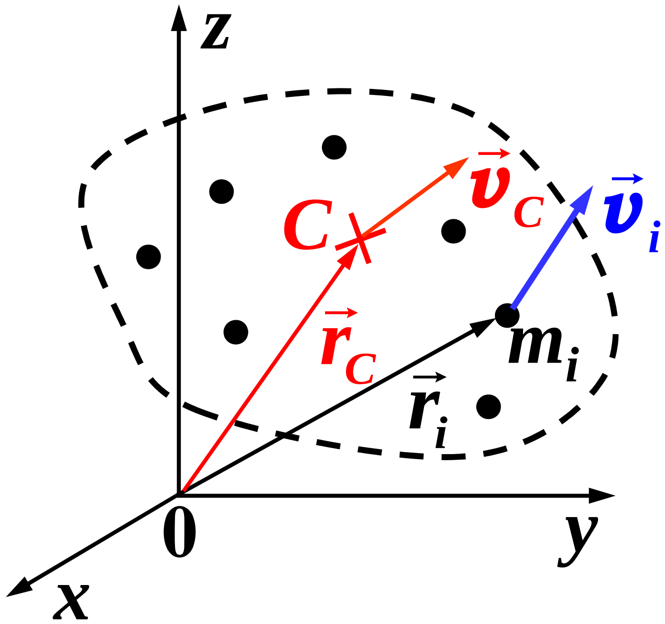
$$= -\frac{d}{(R/r)^2 - 1}$$

§ 3.6 质心运动定理

一. 质心运动定理

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\sum m_i \vec{r}_i / m)}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}$$



质心动量 $m\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i =$ 质点系总动量 $\vec{P}$

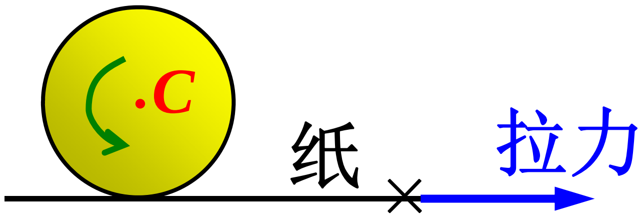
由 $$\vec{F}_{外}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}_C)$$

得 $$\boxed{\vec{F}_{外}=m\vec{a}_C}$$ —— 质心运动定理

质心运动：像一个质点的运动，该质点位于质心处，且集中了整个质点系的质量和所受外力。

通常所谓物体的运动，就是物体质心的运动。

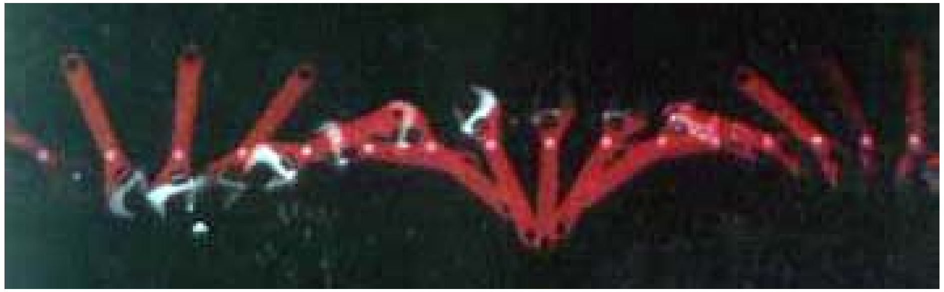
【思考】



球向哪边移动？

系统内力不影响质心的运动

- 光滑水平面上滑动的扳手，质心做匀速直线运动



- 空翻运动员的质心做抛体运动

【演示】质心运动　【TV】质心运动

二. 动量守恒与质心的运动

$$\text{合外力为零}\begin{cases}\text{质点系动量守恒}\\ \text{质心速度不变}\end{cases}$$

$$\text{合外力分量为零}\begin{cases}\text{质点系分动量守恒}\\ \text{质心分速度不变}\end{cases}$$

质点系动量守恒和质心匀速运动等价！

§3.7 质心参考系

质心系：与质点系质心相固连的平动参考系；

只能是惯性系或平动非惯性系。

质点系的复杂运动可看成下列运动的组合：

1. 质点系整体随质心的平动

— 由质心运动定理决定

2. 各质点相对于质心的运动

— 在质心系中考察质点系的运动

质心系的重要特征：零动量参考系

$$\boxed{\sum m_i \vec{v}_i' = \left(\sum m_i\right)\vec{v}_C' = 0}$$

$\vec{v}_i'$ 是质点相对质心系的速度，

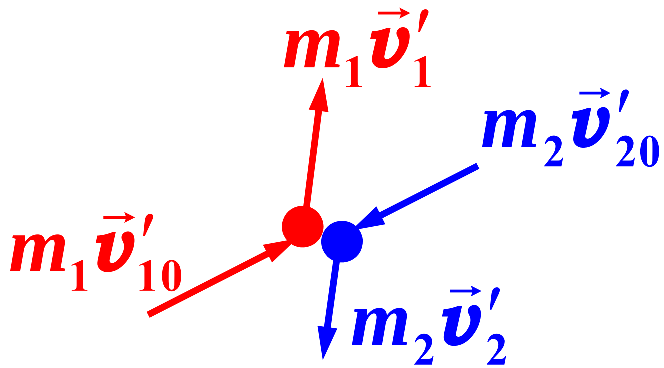
$\vec{v}_C'$ 是质心系中质心的速度，等于零。

即在质心系中，质点系的总动量为零。

证：$\sum m_i \vec{v}_i' = \sum m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_C) = \sum m_i \vec{v}_i - \sum m_i \vec{v}_C = 0$

两质点系统在其质心系中，

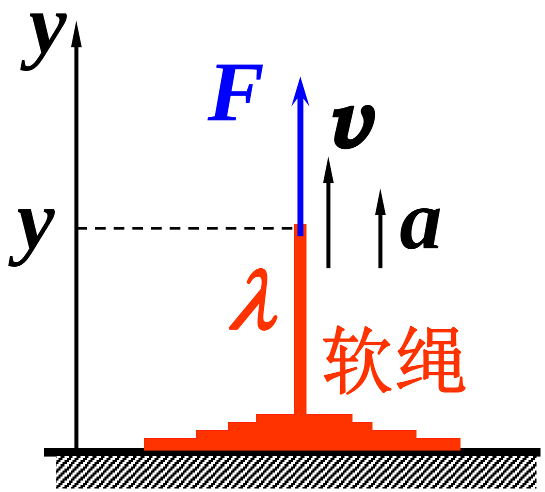
总具有等值、反向的动量。



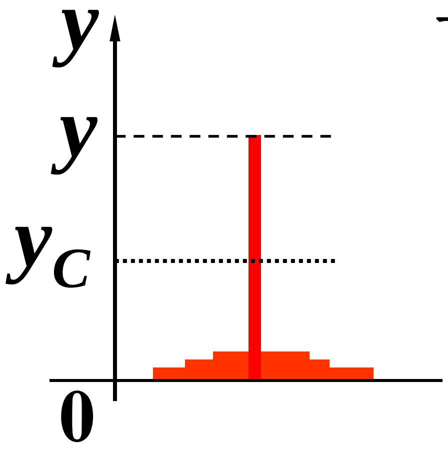
【例】如图绳的线密度为 λ，

求：（1）v 恒定，$F = ?$

（2）a 恒定，$F = ?$

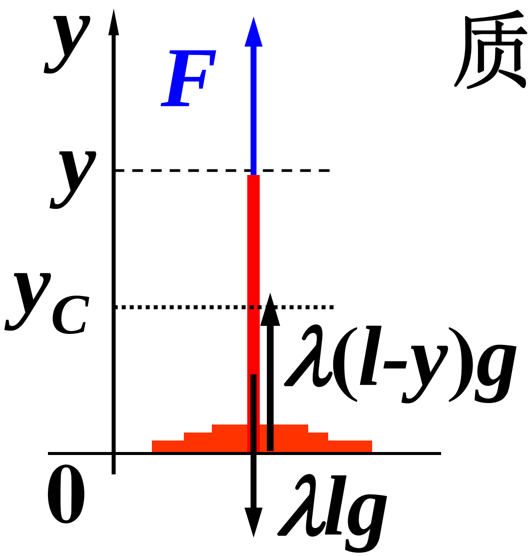


解：用质心运动定理求解



设绳长 l，质心坐标：

$$y_C = \frac{\lambda \cdot y \cdot \frac{y}{2} + 0}{\lambda l} = \frac{y^2}{2l}$$



质心受力： 拉力F， 重力λlg，

支持力 $\lambda(l\text{-}y)g$

$$y_C = \frac{y^2}{2l}$$

根据质心运动定理有：

$$\lambda l \cdot \ddot{y}_C = F + \lambda(l - y)g - \lambda lg = F - \lambda yg$$

$$\longrightarrow \quad F = \lambda yg + \lambda l \cdot \ddot{y}_C = \lambda yg + \lambda(\dot{y}^2 + y\ddot{y})$$

（1）v 恒定，$\dot{y} = v, \ddot{y} = 0$， $F = \lambda yg + \lambda v^2$

（2）a 恒定，$\dot{y}^2 = 2ay, \ddot{y} = a$， $F = \lambda yg + 3\lambda ya$