第二章 运动与力

§ 2.1 牛顿运动定律

§ 2.2 SI单位和量纲

§ 2.3 常见的几种力

§ 2.4 牛顿定律应用举例

§ 2.5 非惯性系中的动力学问题

§ 2.1 牛顿运动定律

一. 第一定律（惯性定律）

任何物体都保持静止或匀速直线运动的状态，除非作用在它上面的力迫使它改变这种状态。

- 提出力和惯性这两个重要概念。

力：外因，改变物体运动状态的原因，
而非维持物体运动状态的原因。

惯性：内在属性，保持静止或匀速直线
运动状态的属性。

- 定义了惯性系，并断言惯性系存在。

惯性系：牛顿第一定律成立的参考系。

物体或物体系只要和周围其它物体足够远，就可当作惯性系：

地面系：地球自转赤道处 $a \sim 3.4\times10^{-2}\ \mathrm{ms^{-2}}$

地心系：地球绕太阳公转 $a \sim 6\times10^{-3}\ \mathrm{ms^{-2}}$

太阳系：太阳绕银河系公转 $a \sim 1.8\times10^{-10}\ \mathrm{ms^{-2}}$

马赫观点：惯性系是相对整个宇宙或整个物质分布的平均加速度为零的参考系。

二. 第二定律

运动的变化与所加的力成正比，并且沿着力作用的直线方向。

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})}$$

- 第二定律既是定义，又是定律。

定义 $\vec{F}$ 来表征物体所受的力。

定义 m 来表征物体的惯性，称为惯性质量。

第二定律结合力的具体形式就成为定律。

- 惯性质量 m 是标量、广延量（可加性）。

  在经典力学范畴， m 是绝对量，与物体的运动状态无关：

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

- 第二定律只在惯性系成立。
- 第二定律是矢量式，是 $\vec{F}$, $\vec{a}$ 的瞬时关系式。

三. 第三定律

每一种作用总有一个相等的反作用与它对抗，或者说两物体之间的彼此相互作用永远相等，并且各自指向其对方。

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

- 物体间相互作用力是真实力，其度量要在惯性系中通过第二定律实现，即第三定律仍以第二定律为基础，但度量结果可以用到非惯性系，即上式在非惯性系也成立。

- 第三定律对接触力总是成立，对非接触力不一定成立。

第三定律给出的是牛顿的超距作用观点。

有些相互作用如较强的电磁相互作用传播需要时间，不符合超距作用。

更一般的观点：用场的观点来替代力，

用动量守恒定律替代第三定律。

- 作用力和反作用力性质相同。

四. 补充说明

- 第 I 定律和第 II 定律是动力学定律，第III定律不是，它是关于力的性质的定律。
- 牛顿定律使用对象是质点，定律中的物体是质点。实际物体可看成是质点的集合，故牛顿定律具有普遍意义。

§2.2 SI 单位和量纲

物理量分为基本量和导出量

力学基本量：3个

时间、长度、质量，分别用 T、L、M 表示。在国际单位制（SI）下其单位分别是秒、米、千克，单位符号分别是 **s**、**m**、**kg**。

力学导出量：

速度、加速度、角速度、力等

任何力学量 Q 的单位都可用力学基本量的单位表示：

$$[Q] = \mathrm{M}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta}\mathrm{T}^{\gamma} \quad \text{——} \ Q \text{ 的量纲}$$

α，β，γ —— 量纲指数

如：$[\boldsymbol{v}] = \mathrm{LT}^{-1}$，$[a] = \mathrm{LT}^{-2}$，$[F] = \mathrm{MLT}^{-2}$

只有量纲相同的项才能加减或用等式联接。

§2.3 常见的几种力

课下自学，强调几点：

- 实验表明，惯性质量和引力质量之比是常量，适当选择引力常量可使比值为 **1** 。
- 粘滞力：流体运动时，不同层之间的相对滑动造成的阻力 — 湿摩擦力。与速度横向变化率、接触面积、粘度成正比。粘滞力消耗能量。

  固体在流体中运动时也受粘滞力作用，在相对速度不太大时，满足：

$$\boxed{\vec{f}_{\text{粘滞}} = \gamma \cdot \vec{v}_{\text{固体相对流体}}}$$

- 关于约束、约束力

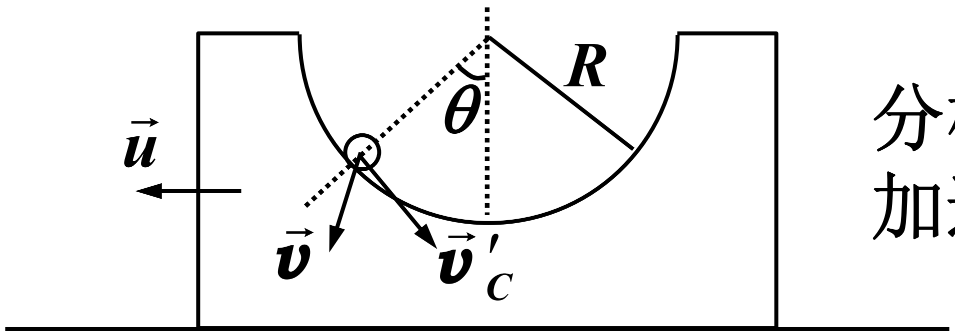
课程主要涉及最常见的约束 — 几何约束：

物体被约束在曲线、曲面上运动。

在几何约束下，物体相对约束物体的运动轨迹是已知的，使得物体的运动、约束物体的运动以及物体相对约束物体的运动之间存在特定关系：

速度、加速度等矢量有特定的方向、大小关系。

要注意分析利用这种关系。

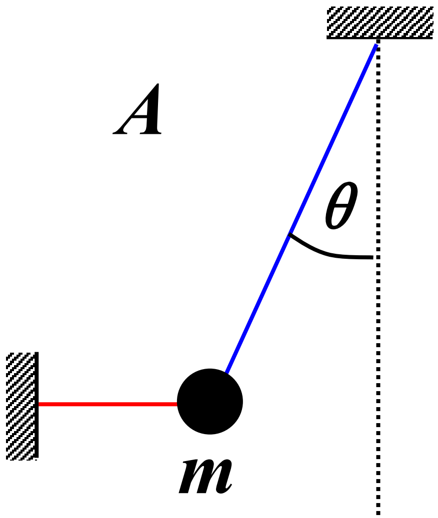


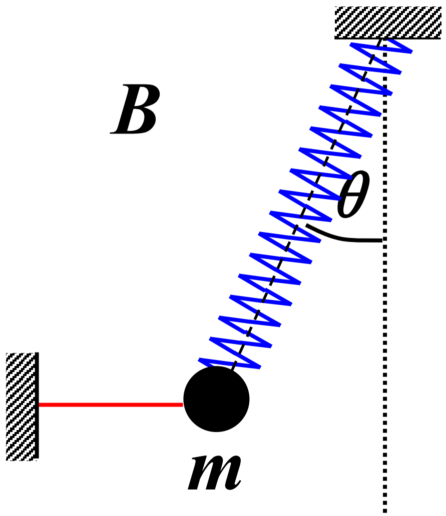
分析图中的速度、加速度关系

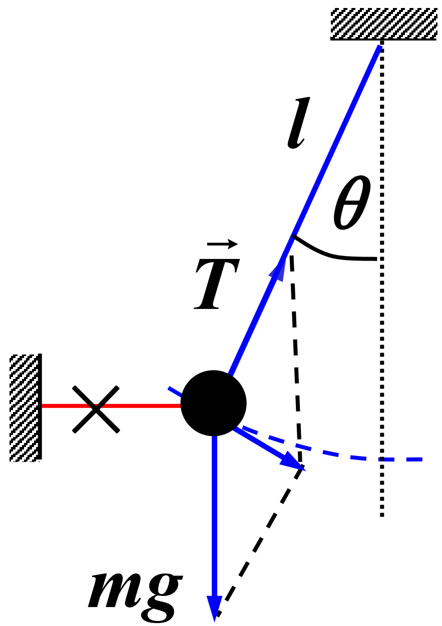
几何约束一般属于理想约束：约束力中的压力、张力、拉力、静摩擦力等是非耗散力，其方向和相对运动方向垂直（物体相对约束物体的运动）。以约束物体为参考系，约束力不做功。

还应注意：约束力是被动力，是未知的，是变力，通常随着物体的运动而改变。

【例】*A*是刚性绳，*B* 是弹簧。剪断水平绳瞬间，两种情况下小球所受拉力多大？

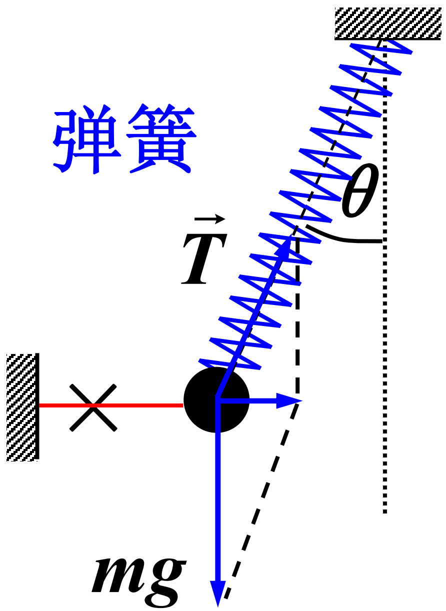






刚性绳 $k \to \infty$，剪断瞬间形变 Δl 无限小，可使 $k\Delta l$ 有限，使法向受为零，保证小球沿圆周切线方向运动（小球速度为零），合力突变成切线方向：

$$T = mg\cos\theta$$



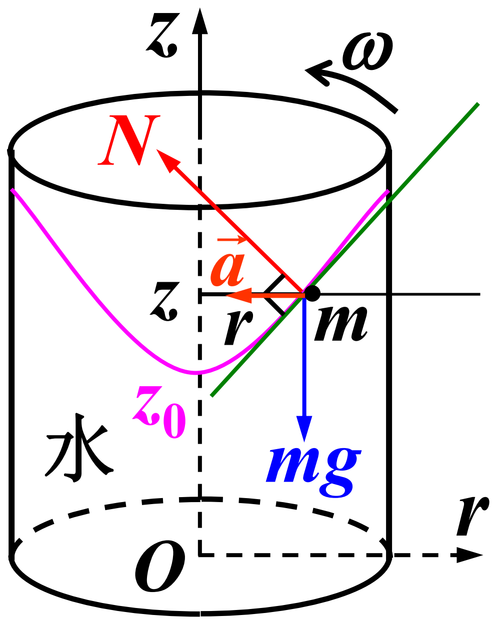
弹簧 k 值有限，剪断瞬间形变 Δl 无限小，则 $k\Delta l$ 无限小，合力几乎与剪断前相同：

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

§ 2.4 牛顿定律应用举例

【例】桶绕 z 轴转动，ω 恒定，水相对静止，最低点 z_0

求：水面形状（$z-r$ 关系）



解：▲ 选对象（隔离体）：

选表面上一小块水 m

▲ 看运动：m 作匀速圆周运动，$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$

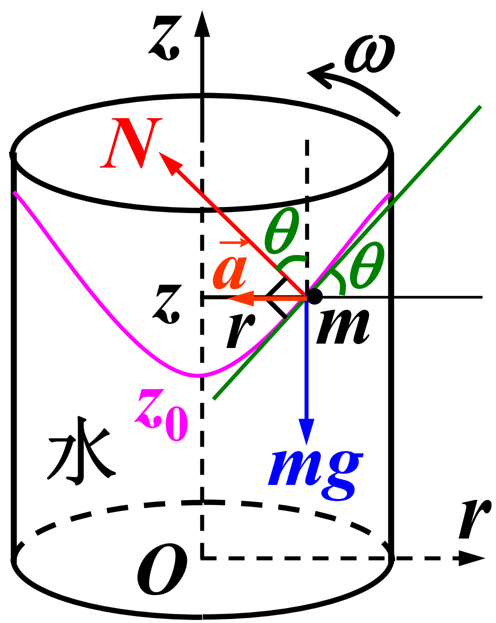
▲ 查受力：受重力 $m\vec{g}$ 及其余水的压力 $\vec{N}$，

$\vec{N} \perp$ 水面

▲ 列方程： $\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a}=-m\omega^2\vec{r}$

z 方向： $N\cos\theta-mg=0$ (1)

r 方向： $-N\sin\theta=-m\omega^2 r$ (2)



▲ 几何关系： $\mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$ (3)

(1)(2)(3)得： $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}=\dfrac{\omega^2}{g}r$

分离变量： $\mathrm{d}z=\dfrac{\omega^2}{g}r\,\mathrm{d}r$

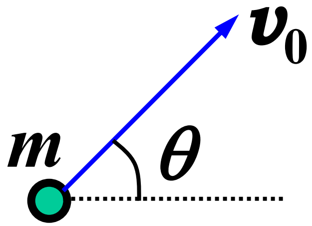
两边积分： $\int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z = \int_0^r \dfrac{\omega^2}{g} r \,\mathrm{d}r$

解得： $z = \dfrac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0$ （旋转抛物面）

▲ 验结果：

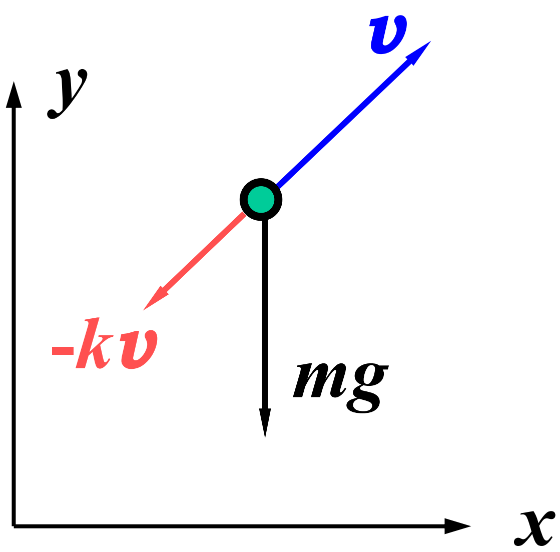
- 量纲分析： $[\dfrac{\omega^2}{2g} r^2] = \dfrac{\mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{L}^2}{\mathrm{L}\mathrm{T}^{-2}} = \mathrm{L} = [z]$ 正确
- 特殊情形： $\omega = 0$， $z = z_0$ 正确
- 变化趋势： r 一定， $\omega\uparrow \rightarrow (z\text{-}z_0)\uparrow$ 合理

【例】以初速 $\boldsymbol{v}_0$、仰角 θ 斜抛质量为 m 的小球，设空气阻力 $\vec{f}=-k\vec{v}$ ，



求：t 时刻小球速度

解：采用直角坐标系：



x方向：$-kv_x=m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$

y方向：$-mg-kv_y=m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$

对 $\boldsymbol{v}_x$ 方程分离变量、两边积分得：

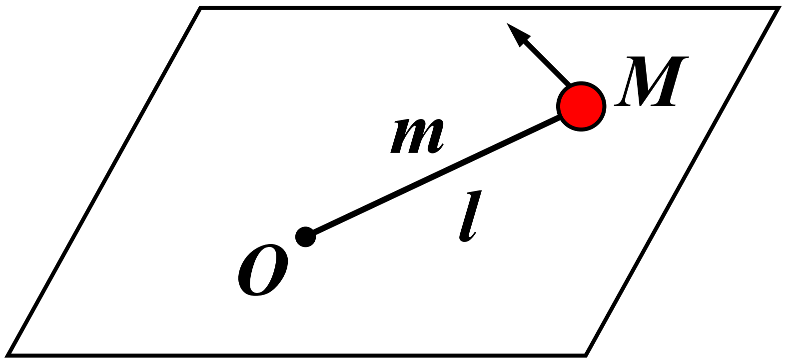
$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -\frac{k}{m}\int_0^t \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad v_x = v_{0x} e^{-\frac{k}{m}t}$$

对 $\boldsymbol{v}_y$ 方程分离变量、两边积分得：

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{-\mathrm{d}v_y}{mg + k v_y} = \frac{1}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$

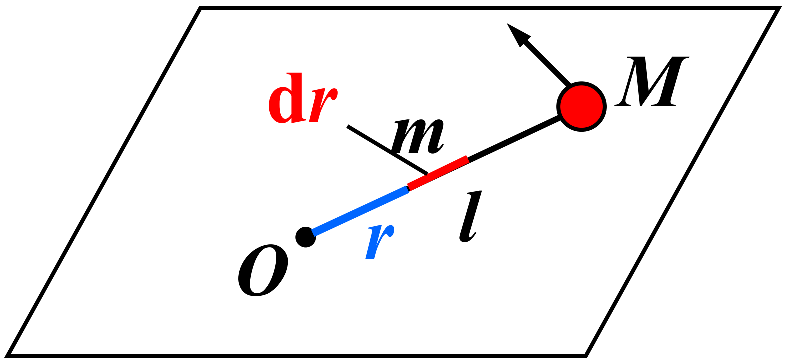
$$v_y = \left(\frac{mg}{k} + v_{0y}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

【例】长度 l、质量 m 的绳，一端系在轴 O 上，另一端固结质量 M 的物体，它们在光滑水平面上以角速度 ω 匀速转动，求距轴心 r 处的张力 T 。



有人认为 $T = M\omega^2 l$ ，对否？

绳质量不忽略，绳中各点速度加速度不相同，
绳的不同位置处张力不相同。

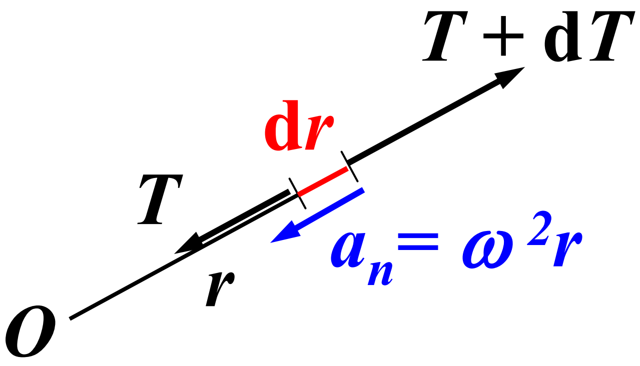


做微元分析：

取距轴心 r 处，长度 $\mathrm{d}r$ 的一段质元，

质元质量 $\mathrm{d}m = m\dfrac{\mathrm{d}r}{l}$

它作半径为 r、速率为 ωr 的匀速圆周运动。



由牛顿定律有：

$$(T+\mathrm{d}T)-T=\mathrm{d}m\cdot(-\omega^2 r)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}T=\frac{m}{l}\mathrm{d}r(-\omega^2 r)$$

$$\Rightarrow \quad \int_T^{T_l}\mathrm{d}T=-\int_r^l m\omega^2 r\frac{\mathrm{d}r}{l} \qquad (T_l=M\omega^2 l)$$

$$\Rightarrow \quad T=M\omega^2 l+m\omega^2\frac{l^2-r^2}{2l}$$

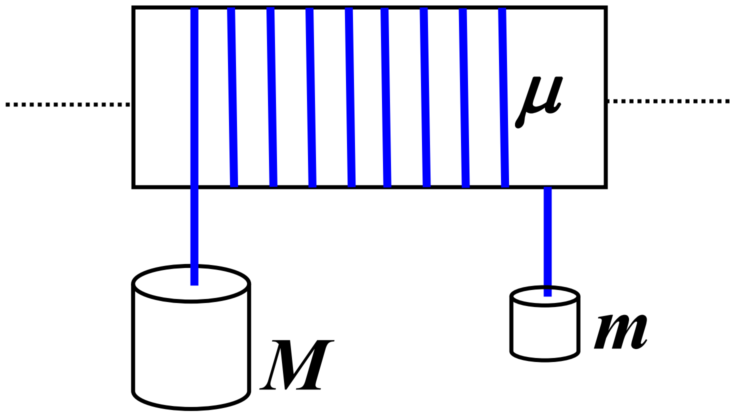
质元受力同向，故矢量和变为标量和

讨论：（1）量纲正确

（2）$r=l$ 时，$T=M\omega^2 l$，　正确

（3）$m=0$ 时，$T=M\omega^2 l$，　正确

【例】静止的圆柱体绕有绳索，两端挂质量 M 和 m 的物体。绳与圆柱间静摩擦系数为 μ，忽略绳质量。要使物体静止不动，绳至少绕多少圈？

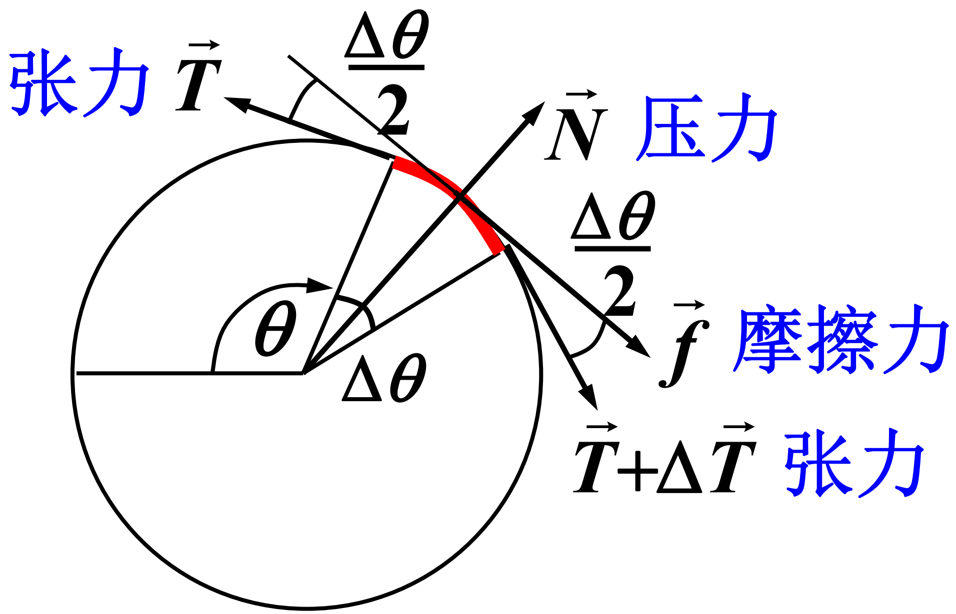


分析： 平衡是因为绳和圆柱之间的静摩檫力

绳柱之间静摩擦力 $= Mg - mg$

思路： 分析绳质元的平衡条件，得到微分关系求解

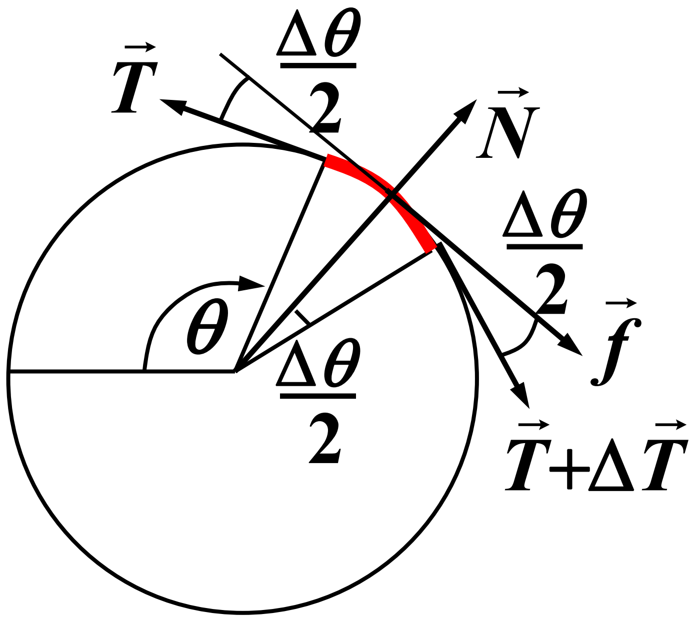
$\theta - \Delta\theta$ 质元受力情况：



法向：

$$N = \left(2T + \Delta T\right)\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

$$f = \mu N$$



切向：

$$\left(T + \Delta T\right)\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) + f = T\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

近似关系：

$$\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \approx \frac{\Delta\theta}{2} \qquad \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \approx 1 \qquad \Delta T \cdot \Delta\theta \approx 0$$

利用近似关系化简3个方程可得：

$$N = T\Delta\theta \qquad \Delta T + f = 0 \qquad f = \mu N$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta T}{T} = -\mu\Delta\theta$$

两边积分得：

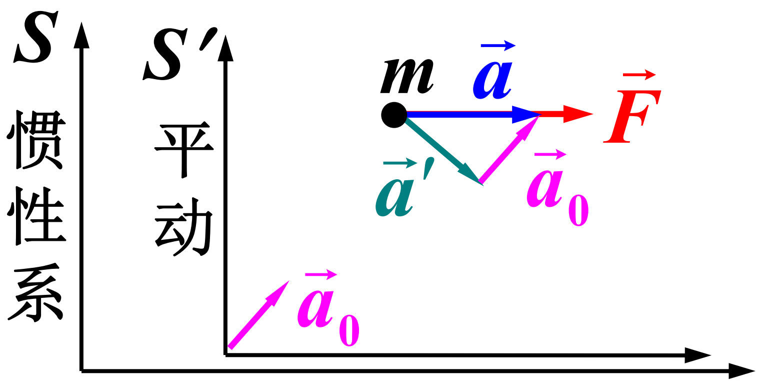
$$\int_{Mg}^{mg}\frac{\mathrm{d}T}{T} = \int_0^{\Theta} -\mu\mathrm{d}\theta, \qquad \ln(\frac{m}{M}) = -\mu\Theta = -\mu n 2\pi$$

$$n = \frac{1}{2\pi\mu}\ln(\frac{M}{m})$$

§ 2.5 非惯性系中的动力学问题

一. 平动非惯性系中的牛顿第二定律

惯性系 S：



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

平动非惯性系 S'：

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0 \neq \vec{a}, \quad \vec{F}' = \vec{F}, \quad m' = m$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}' \neq m'\vec{a}' \quad \Rightarrow$$ S'系中牛 II 律不成立

由 $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} - m\vec{a}_0 = m\vec{a}'$

引入虚拟力： $\boxed{\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0}$ — 平移惯性力

$\vec{a}_0$ — 平动非惯性系的加速度

平动非惯性系中的牛II定律

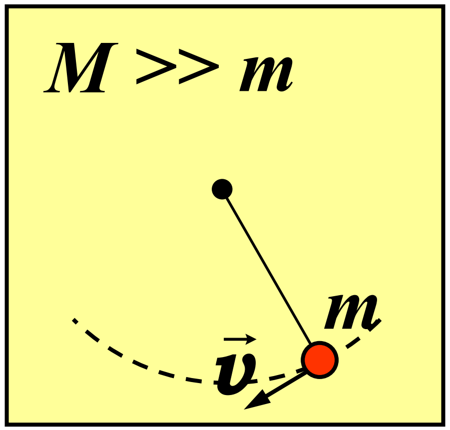
$$\boxed{\vec{F} + \vec{F}_0 = m\vec{a}'}$$

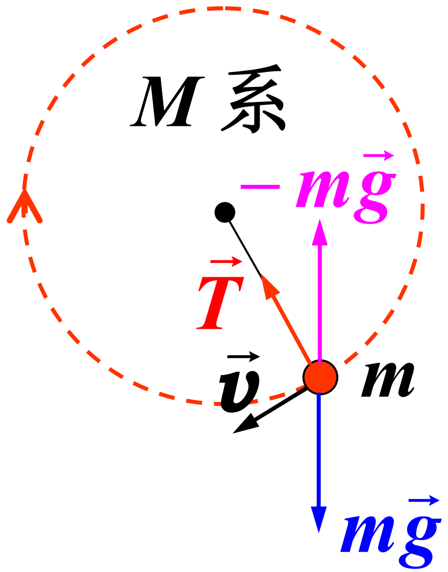
对平动非惯性系中的动力学问题，考虑平移惯性力后即可应用牛顿定律。

注意：平移惯性力对质点系的作用类似重力。

惯性力由参考系的加速运动引起，本质上是物体惯性的体现，不是物体间的相互作用力，没有反作用力，但有真实效果。

【讨论】M 自由下滑后 m 对地面的运动情况





（1）m 对 M 系：

匀速圆周运动

（2）M 对地：

自由落体运动

m 对地：（1）、（2）运动的叠加

【例】二战时期美国 Tinosa 号潜艇曾携带 16 枚鱼雷在太平洋海域作战：

距离 4000 码斜向攻击发射 4 枚使敌舰停航

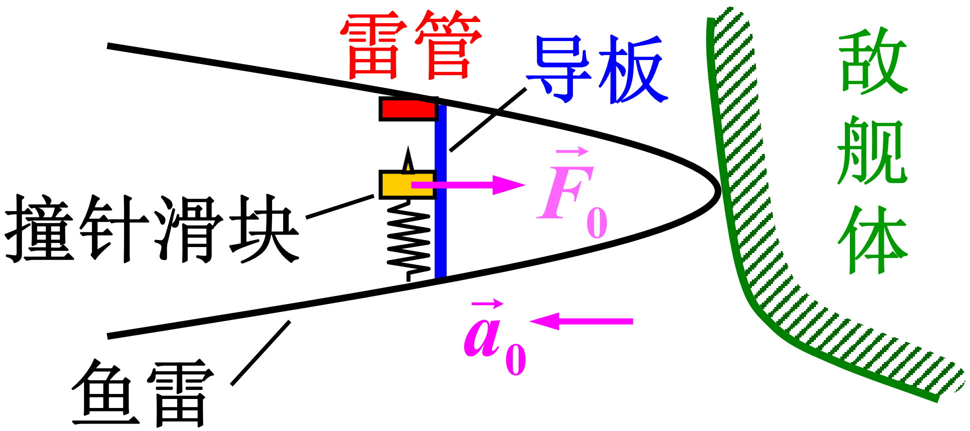
距离 875 码垂直攻击发射 11 枚均未爆炸！

鱼雷系：

近距、垂直

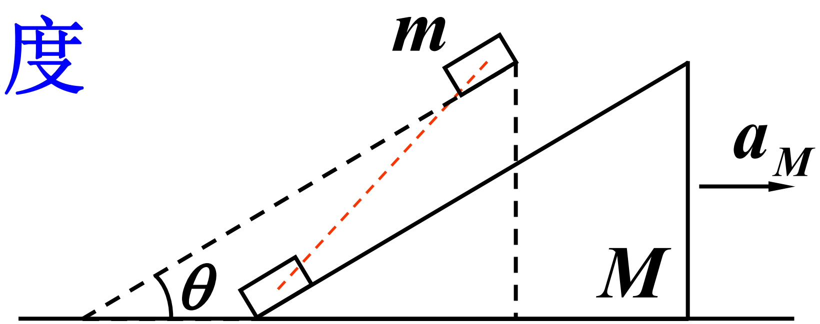
$\rightarrow a_0$ 大

$\rightarrow F_0$ 大

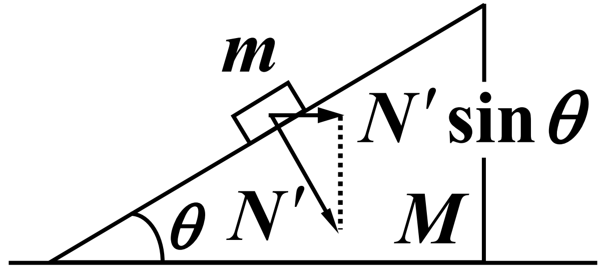


$\rightarrow$ 滑块受摩擦力大 $\rightarrow$ 雷管不能被触发

【例】如图，求楔块加速度



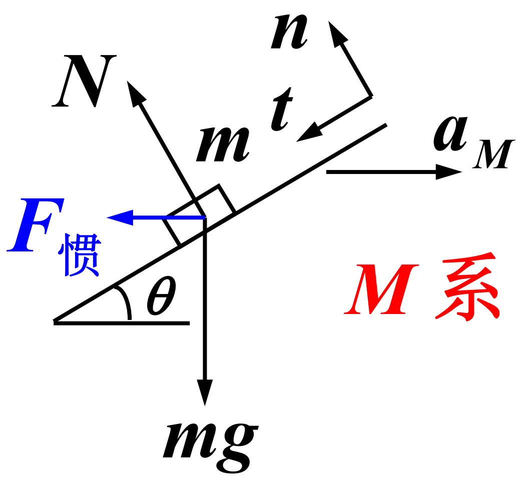
解：$Ma_M = N'\sin\theta$



M 系：$F_{惯} = ma_M$

法向方程：

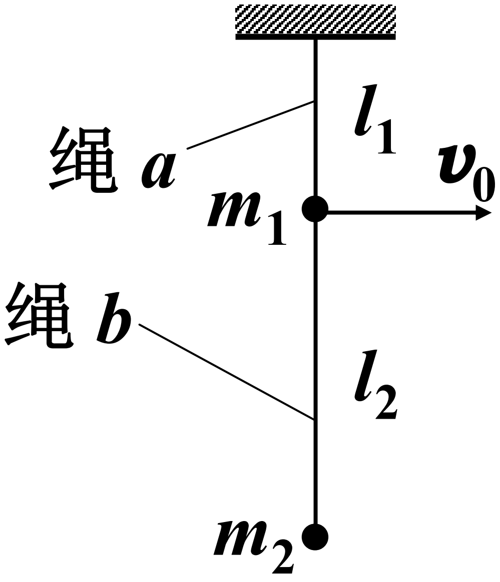
$$N + F_{惯}\sin\theta = mg\cos\theta$$



利用 $N = N'$ 解出：

$$a_M = \frac{g\cos\theta\sin\theta}{M/m + \sin^2\theta}$$

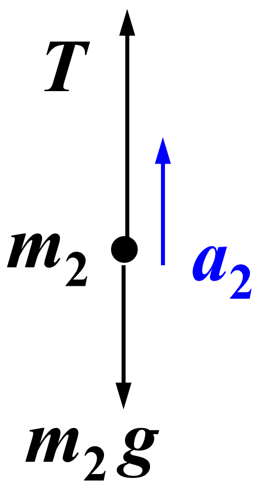
【例】打击 m_1 使之有水平速度 v_0，绳 b 中张力 T？



解：方法一　地面参考系

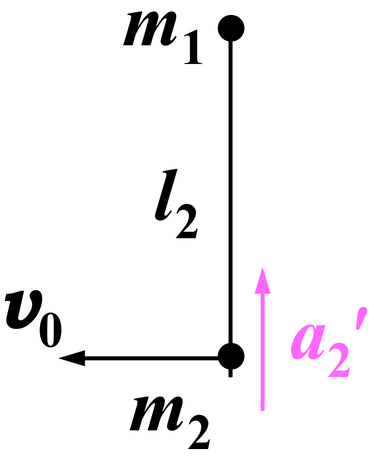
打击瞬间 m_2 仍静止，设加速度 a_2 竖直向上：

$$T - m_2 g = m_2 a_2 \qquad (1)$$



m_1 的加速度 a_1 必竖直向上：

$$a_1 = \frac{v_0^2}{l_1} \qquad (2)$$



m_2 相对 m_1 的加速度a'_2 必竖直向上：

$$a_2' = \frac{v_0^2}{l_2} \qquad （3）$$

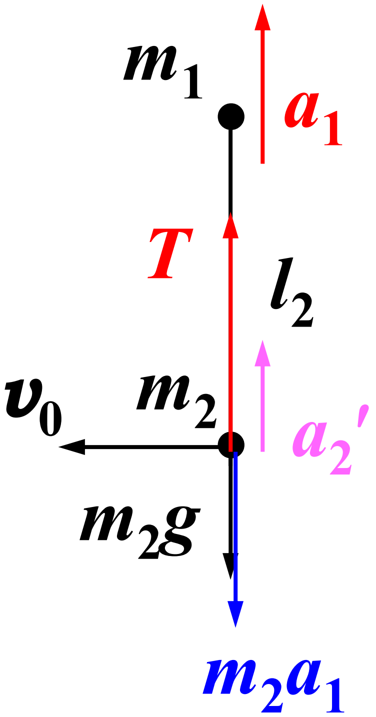
相对运动关系：

$$a_2 = a_2' + a_1 \qquad （4）$$

（1）—（4）解得：

$$T = m_2\left(\frac{v_0^2}{l_1} + \frac{v_0^2}{l_2} + g\right)$$

方法二　m_1 参考系 — 平动非惯性系



动力学关系：

$$T - m_2 g - m_2 a_1 = m_2 a_2' \qquad (1)$$

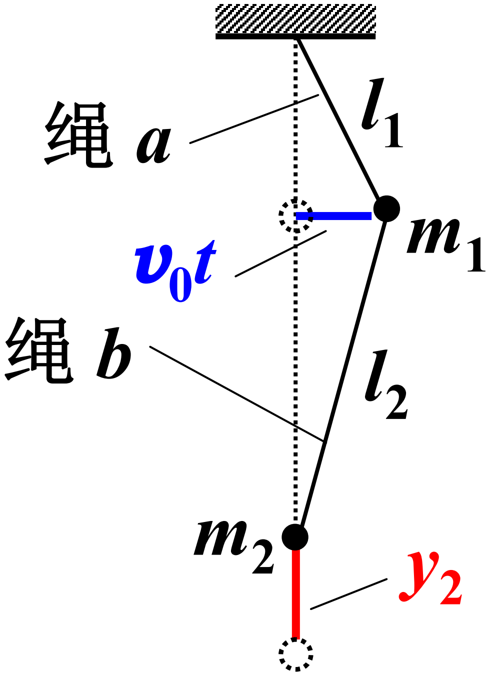
运动学关系：　$$a_1 = \frac{v_0^2}{l_1} \qquad (2)$$

$$a_2' = \frac{v_0^2}{l_2} \qquad (3)$$

（1）—（3）解得：　$$T = m_2\left(\frac{v_0^2}{l_1} + \frac{v_0^2}{l_2} + g\right)$$

方法三　从几何约束关系求解

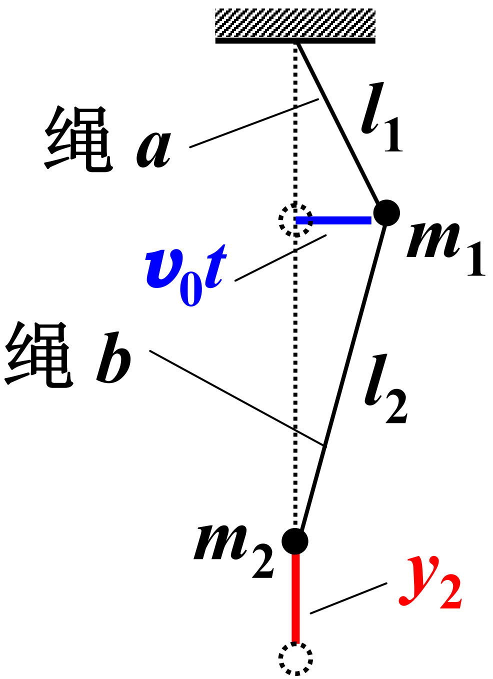
如前面对 m_2 有：　$T - m_2 g = m_2 a_2$　　　（1）



设想在极短时间 t 内，m_1水平位移 $v_0 t$，m_2竖直位移y_2，

几何约束关系：

$$y_2 = l_1 - \sqrt{l_1^2 - (v_0 t)^2} + l_2 - \sqrt{l_2^2 - (v_0 t)^2} \qquad (2)$$



$v_0t << l_1, l_2$，对（2）作泰勒展开有：

$$y_2 = \frac{(v_0t)^2}{2}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)$$

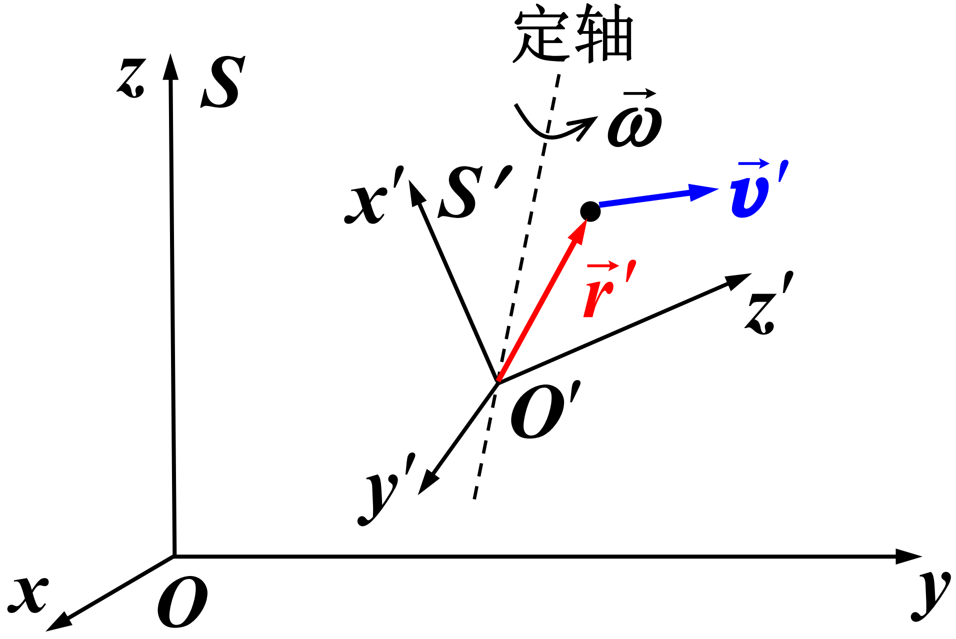
m_2 瞬间从静止开始运动有：

$$a_2 = \frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^2} = v_0^2\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) \qquad (3)$$

（3）代入（1）得：

$$T = m_2\left(\frac{v_0^2}{l_1}+\frac{v_0^2}{l_2}+g\right)$$

二. 匀速转动参考系中的牛顿第二定律



设：S'系相对惯性系 S 以角速度 $\vec{\omega}$ 匀速转动

S'系中物体相对转轴上原点 O' 的位矢 $\vec{r}'$

S'系中物体的速度为 $\vec{v}'$

利用转动参考系中的加速度变换关系可证明在 S' 系中，物体受到两个虚拟力：

惯性离心力 $\boxed{\vec{F}_{\mathrm{c}} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')}$

科里奥利力 $\boxed{\vec{F}_{\mathrm{cor}} = 2m\vec{v}\,'\times\vec{\omega}}$

科氏力只改变运动方向，不作功。

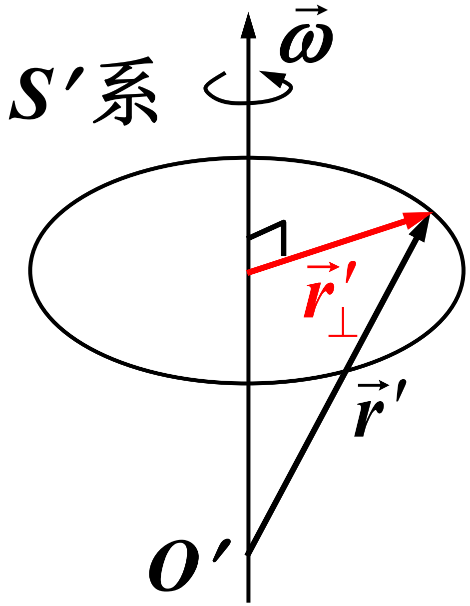
匀速转动参考系中的牛II定律：

$$\boxed{\vec{F} + \vec{F}_{\mathrm{c}} + \vec{F}_{\mathrm{cor}} = m\vec{a}\,'}$$

对惯性离心力的化简

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{c}} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') = m\omega^2\vec{r}\,'_{\perp}}$$

（自己证）

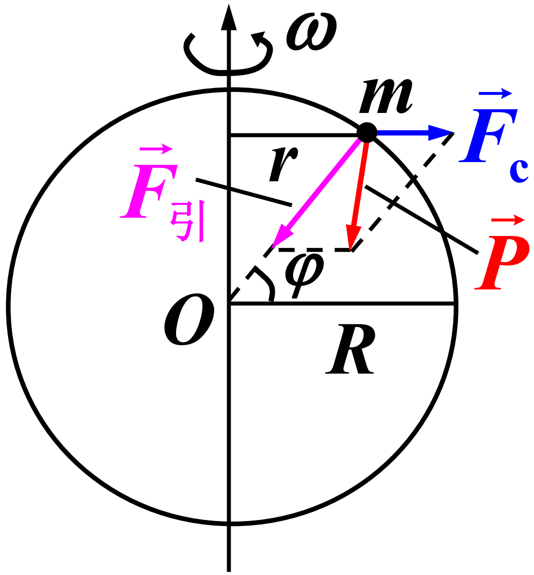


惯性离心力垂直于转轴，指向离开转轴方向。

1. 重力和纬度的关系

考虑地球自转，地面物体受惯性离心力作用。

重力是引力和惯性离心力的合力。



$$\boxed{g \approx g_0\left(1 - \frac{a_0}{g_0}\cos^2\varphi\right)}$$

$$g_0 = \frac{GM_e}{R^2} \approx 9.83\,\mathrm{ms^{-2}} \qquad a_0 = R\omega^2 \approx 0.034\,\mathrm{ms^{-2}}$$

G — 万有引力常量　　M_e — 地球质量

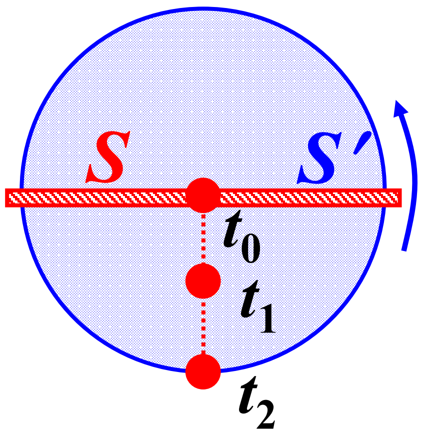
R — 地球半径　　ω — 地球自转角速度

2. 转盘说明科里奥利力

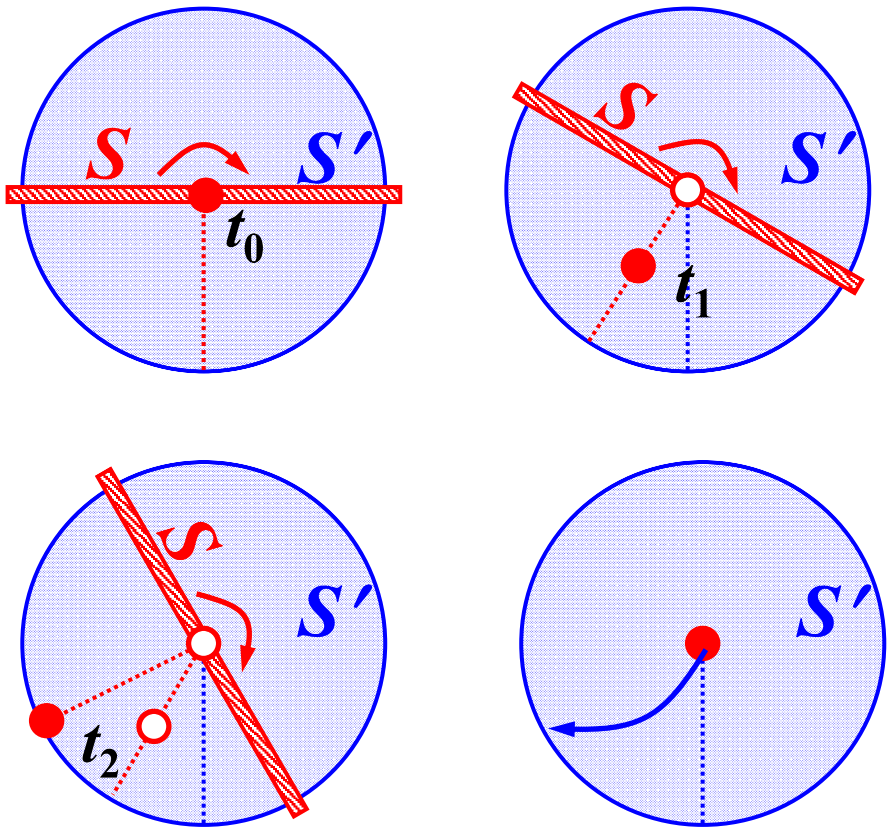
设：S 是惯性系

S'是匀速转动参考系

设 S 系中小球作匀速直线运动

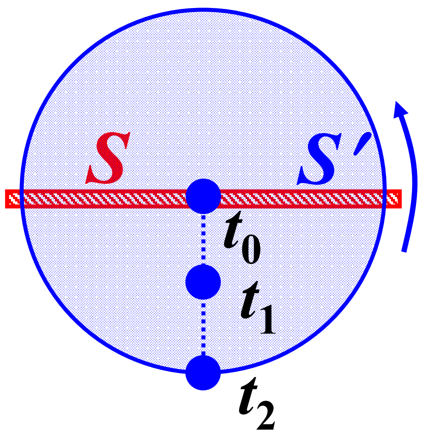


S'系中小球作曲线运动



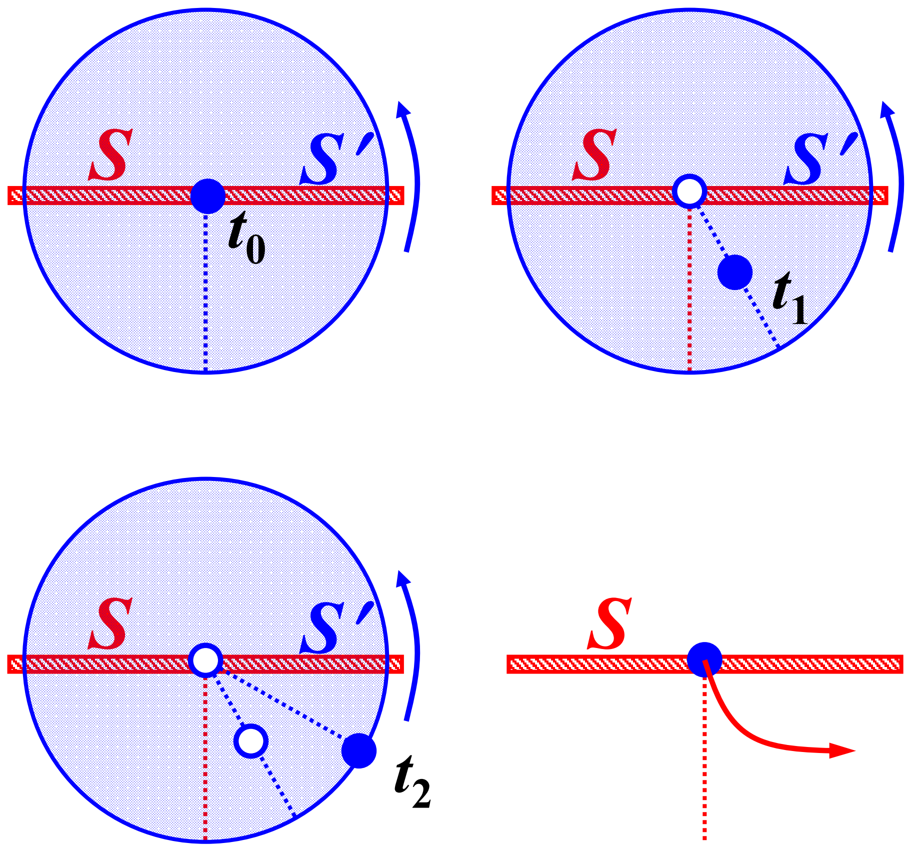
结论：S'系中要附加虚拟力才能解释小球所作的曲线运动。

设 S' 系中小球作匀速直线运动

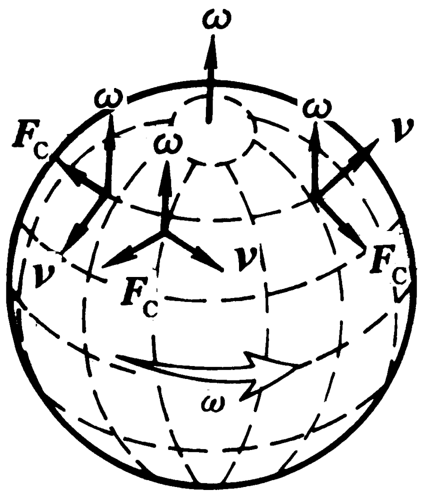


结论：S' 系中要附加虚拟力才能抵消 S 系中的真实力。

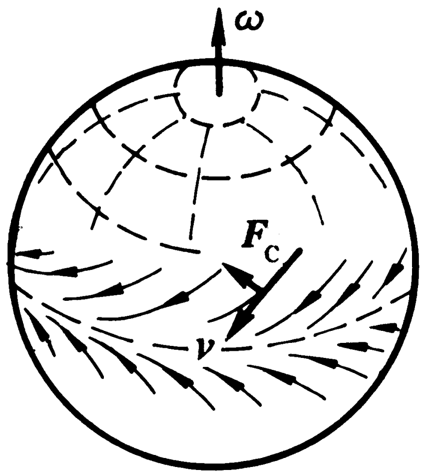
S 系中小球作曲线运动



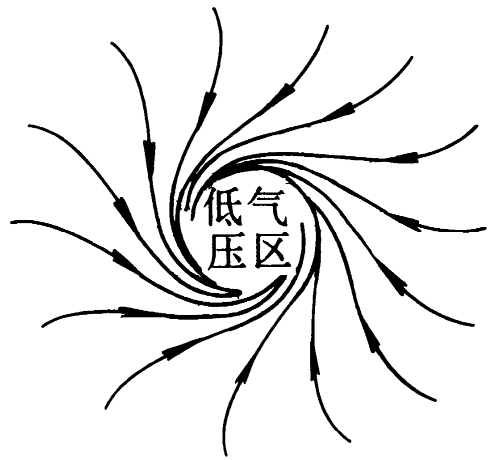
3. 与科氏力有关的现象



北半球的科氏力



信风的形成



风暴漩涡的形成

- 河岸冲刷，双轨磨损（北半球右，南半球左）
- 赤道附近的信风（北半球东北，南半球东南）
- 强热带风暴漩涡的形成
- 落体偏东

落体偏东

地面系，$\boldsymbol{v}_x \ll \boldsymbol{v}_y$， F_{cor} 近似沿 x 方向

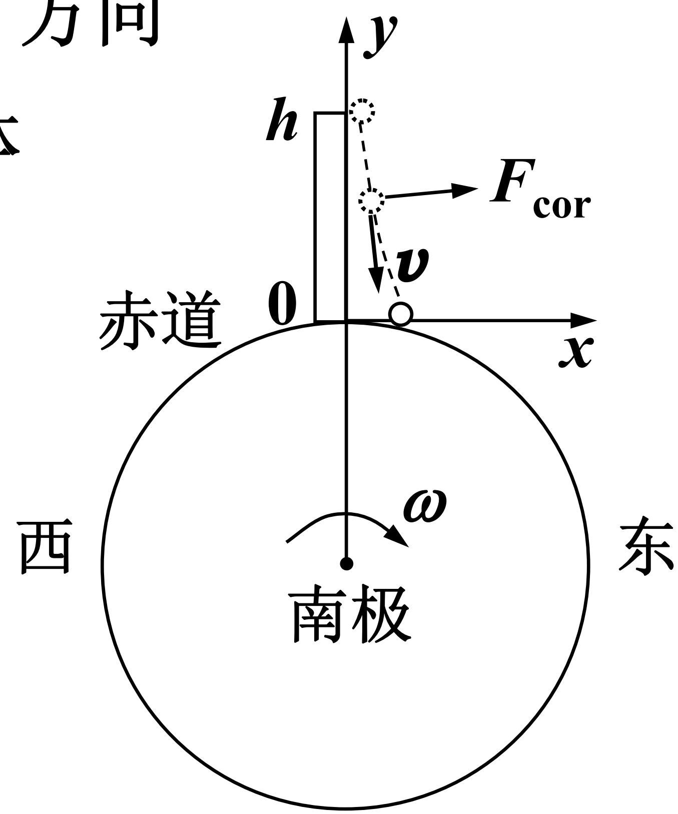
y 方向：近似受重力，自由落体

x 方向：近似受科氏力 F_{cor}

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_x}{\mathrm{d}t} = F_{\text{cor}} \approx 2m\boldsymbol{v}_y\omega$$

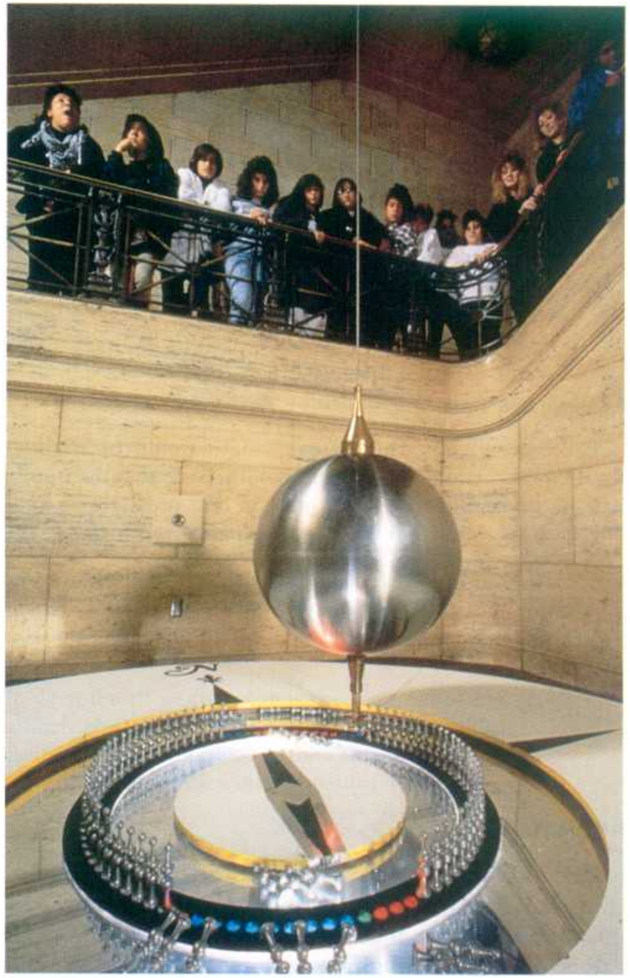
$$\boldsymbol{v}_y \approx gt$$

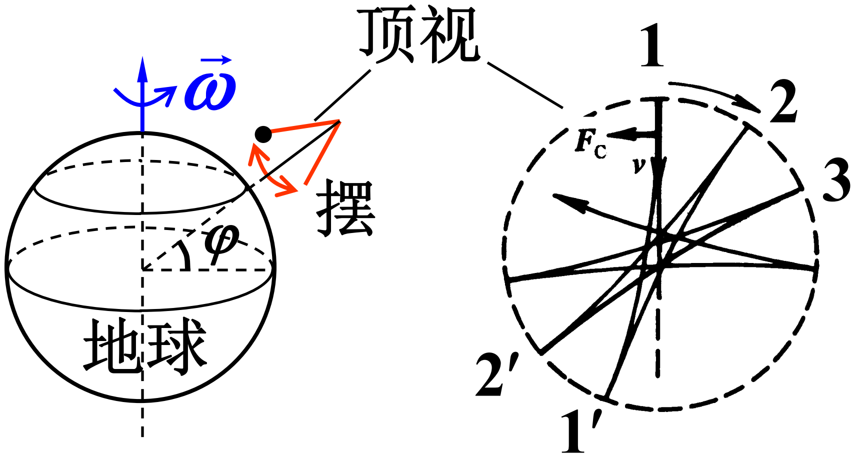
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_x = 2\omega g\int_0^t t\mathrm{d}t = \omega g t^2$$



偏东距离： $x = \int_0^{\Delta t}\boldsymbol{v}_x\mathrm{d}t = \dfrac{2h\omega}{3}\sqrt{\dfrac{2h}{g}} \qquad (\Delta t = \sqrt{2h/g})$

4. 傅科摆 — 证明地球自转的著名实验



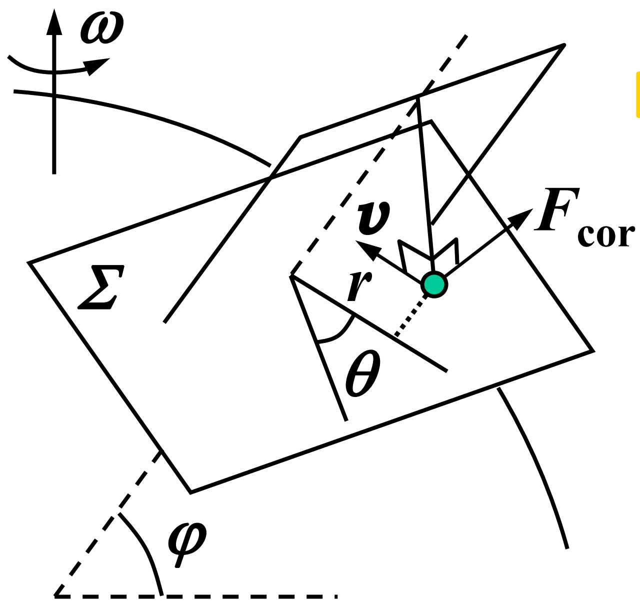


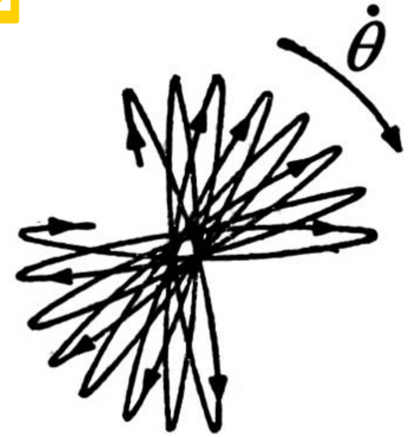
摆平面转动周期 $\boxed{T = \dfrac{24\text{小时}}{\sin\varphi}}$

北京，$\varphi \approx 40^\circ$，$T = 37$小时15分

【TV】傅科摆

傅科摆周期





$\boldsymbol{\Sigma}$面是地面，用极坐标系，地面单摆径向运动：

$$r = r_0 \cos(2\pi t/\tau) \quad (r_0\text{是振幅，}\tau\text{是周期，初相为}0)$$

横向运动： $ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = F_{cor} = 2m\upsilon\omega\sin\varphi$

利用 $\dot{r} \approx \upsilon$, $\ddot{\theta} \approx 0$ 可得傅科摆周期：

$$T = 2\pi/\dot{\theta} = 2\pi/(\omega\sin\varphi)$$

三. 物体在引力场中的运动

假设宇宙存在惯性系，在此惯性系，物体 M 的运动（质心的运动）：

$$M\vec{a}_M = \sum_{i(i\neq M)} GM'm_i' \frac{\vec{r}_{iM}}{r_{iM}^3} + \sum_{i(i\neq M)} \vec{f}_{iM}$$

$\vec{r}_{iM}$：物体 i 相对 M 的位矢

$\vec{f}_{iM}$：物体 i 对 M 的满足牛III律的其它类型真实力

M' 和 m' 是引力质量

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_M = \sum_{i(i\neq M)} Gm_i' \frac{M'}{M} \frac{\vec{r}_{iM}}{r_{iM}^3} + \sum_{i(i\neq M)} \frac{\vec{f}_{iM}}{M}$$

设物体 M 绕通过自身质心的轴作匀角速度转动，选 M 作参考系，是非惯性系。在 M 系中分析物体 m 的运动（质心运动）：

$$m\vec{a}_m = \sum_{i(i\neq m)} Gm'm_i' \frac{\vec{r}_{im}}{r_{im}^3} + \sum_{i(i\neq m)} \vec{f}_{im} - m\vec{a}_M + \vec{F}_{\mathrm{c}} + \vec{F}_{\mathrm{cor}}$$

$$= \sum_{i(i\neq m,M)} \left(Gm'm_i' \frac{\vec{r}_{im}}{r_{im}^3} - Gmm_i' \frac{M'}{M} \frac{\vec{r}_{iM}}{r_{iM}^3}\right)$$

$$+ Gm'M' \frac{\vec{r}_{Mm}}{r_{Mm}^3} + Gmm' \frac{M'}{M} \frac{\vec{r}_{Mm}}{r_{Mm}^3} + \vec{F}_{\mathrm{c}}$$

$$+ \sum_{i(i\neq m,M)} \left(\vec{f}_{im} - \frac{m}{M} \vec{f}_{iM}\right) + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \vec{f}_{Mm} + \vec{F}_{\mathrm{cor}}$$

假设物体的惯性质量和引力质量相等，在 M 系中，物体 m 的运动（质心运动）方程简化为：

$$m\vec{a}_m = \sum_{i(i\neq m,M)} Gmm_i\left(\frac{\vec{r}_{im}}{r_{im}^3} - \frac{\vec{r}_{iM}}{r_{iM}^3}\right) \qquad \text{（第1项）}$$

$$+ G\frac{m(M+m)}{r_{Mm}^3}\vec{r}_{Mm} + \vec{F}_{\mathrm{c}} \qquad \text{（第2项）}$$

$$+ \sum_{i(i\neq m,M)} \left(\vec{f}_{im} - \frac{m}{M}\vec{f}_{iM}\right) + \left(1+\frac{m}{M}\right)\vec{f}_{Mm} \qquad \text{（第3项）}$$

$$+ \vec{F}_{\mathrm{cor}} \qquad \text{（第4项）}$$

下面讨论在 M 系中，m 所受的各种力，设物体 m 的质量相比天体是无穷小。

- 第 1 项称为引潮力：万有引力和惯性力的合力

$$\sum_{i(i\neq m,M)} Gmm_i\left(\frac{\vec{r}_{im}}{r_{im}^3}-\frac{\vec{r}_{iM}}{r_{iM}^3}\right)$$

m 受到的除 M 以外的其他物体的万有引力

m 受到的源自引力的惯性力

引潮力主要来自大质量天体的贡献。

- 第 2 项 $G\dfrac{m(M+m)}{r_{Mm}^{3}}\vec{r}_{Mm}+\vec{F}_{\mathrm{c}}$

  M 是地面系，它就是物体 m 所受重力，

  M 是飞船系， 则可忽略。

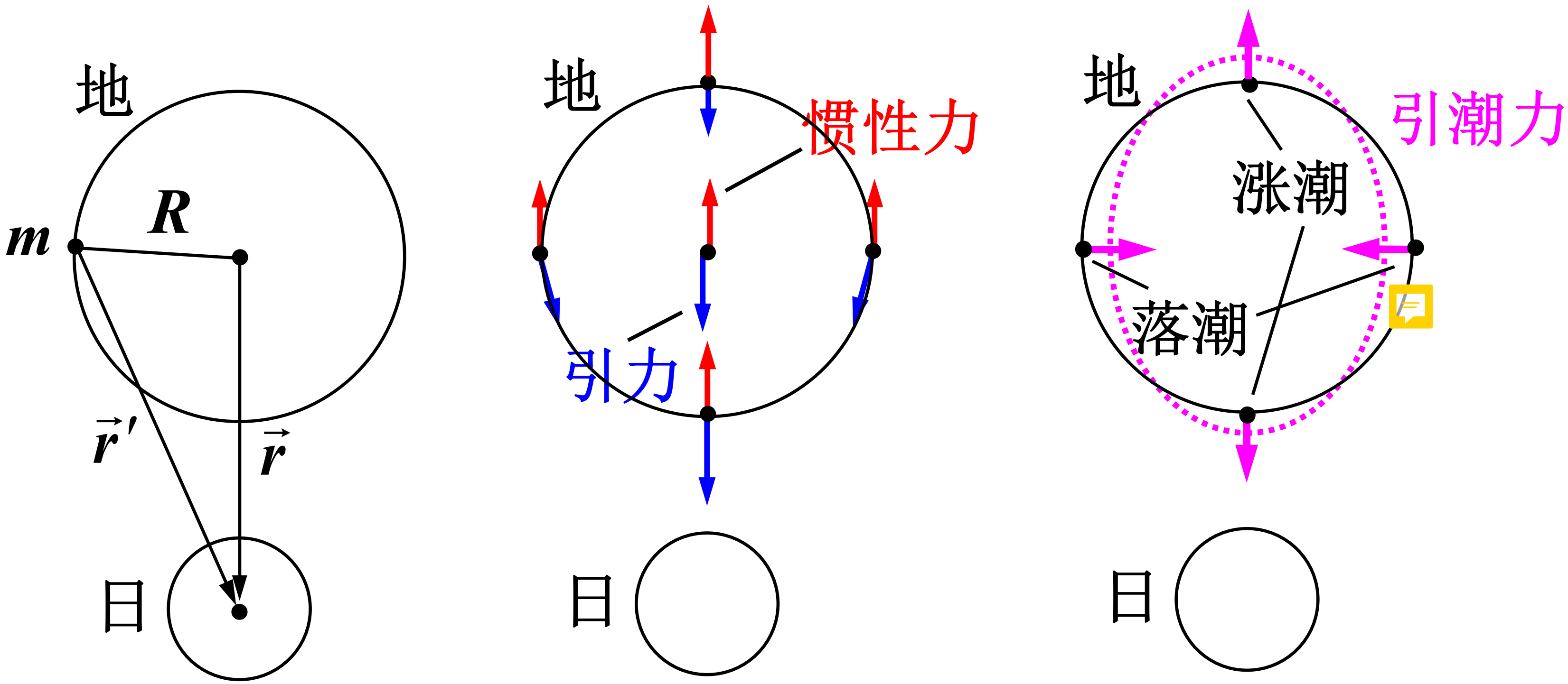
- 第 3 项 $\sum\limits_{i(i\neq m,M)}(\vec{f}_{im}-\dfrac{m}{M}\vec{f}_{iM})+(1+\dfrac{m}{M})\vec{f}_{Mm}$

  M 是地面系，化简为：$\sum\limits_{i(i\neq m,M)}\vec{f}_{im}+\vec{f}_{Mm}$ ，M 是飞船系，若飞船和其它物体只有引力作用，则化简为 $\sum\limits_{i(i\neq m,M)}\vec{f}_{im}$ 。这些都是物体 m 受其它物体的真实力如压力、弹力等。

- 第 4 项是科氏力，对地面系或飞船系，可忽略。

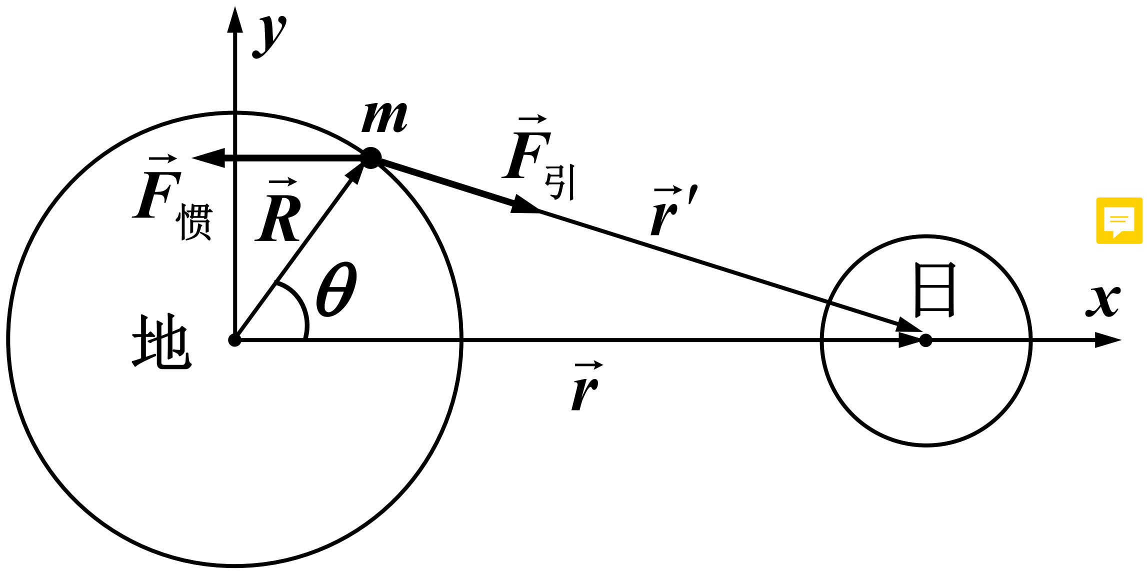
1. 潮汐现象

地表处太阳的引潮力 $GmM_{日}\left(\frac{\vec{r}'}{r'^3}-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$



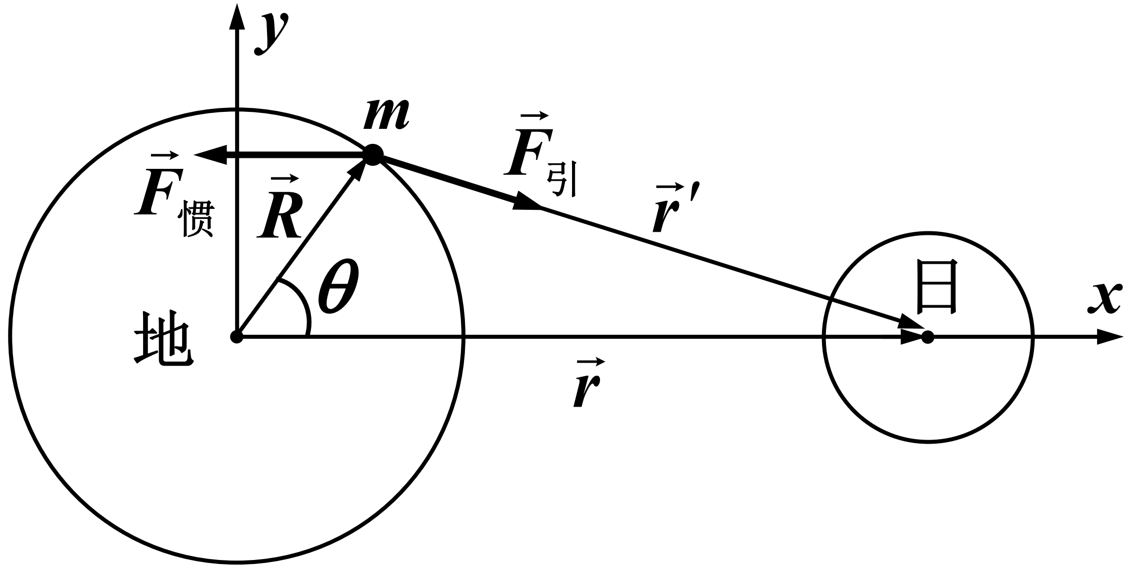
在地球半径 R 这个尺度上，太阳引力分布不均匀，惯性力不能完全抵消引力而产生引潮力。

地表处太阳引潮力计算（适用于月亮）



$$\vec{F}_{引潮} = GmM_{日}\left(\frac{\vec{r}\,'}{r'^3} - \frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$= GmM_{日}\left[\frac{\vec{r} - \vec{R}}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{3/2}} - \frac{\vec{r}}{r^3}\right]$$



$$F_{引潮x} = GmM_{日}\left[\frac{r - R\cos\theta}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{3/2}} - \frac{1}{r^2}\right]$$

$$F_{引潮y} = GmM_{日}\left[\frac{-R\sin\theta}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{3/2}}\right]$$

注意到 $R/r << 1$，按 R/r 展开，取到一次项

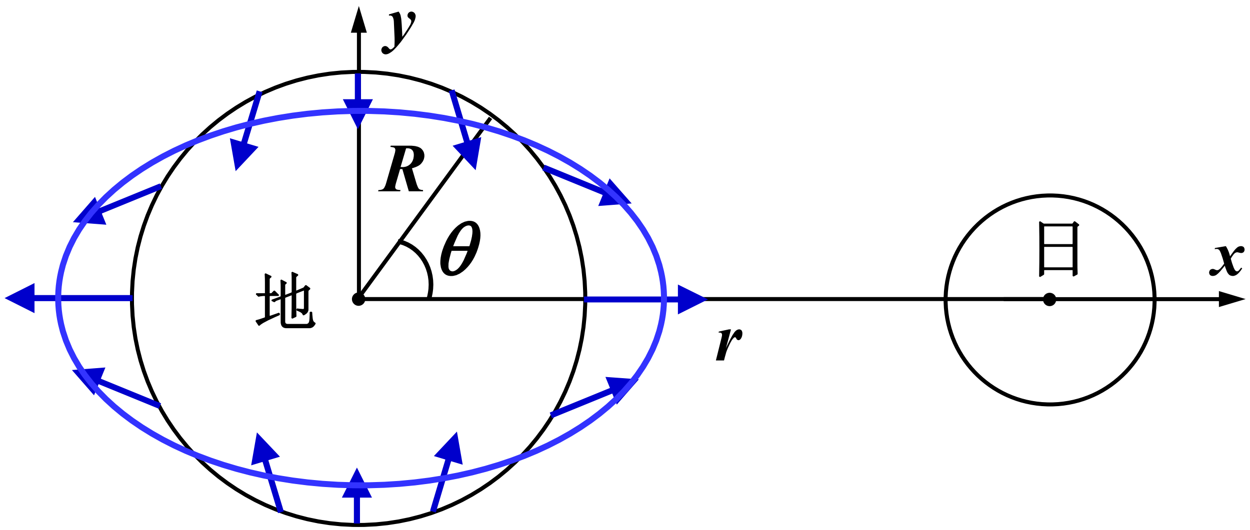
$$F_{引潮x} = GmM_{日}\left[\frac{r - R\cos\theta}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{3/2}} - \frac{1}{r^2}\right]$$

$$= \frac{GmM_{日}}{r^2}\left[\frac{1 - \frac{R}{r}\cos\theta}{(1 - \frac{2R}{r}\cos\theta + \cancel{\frac{R^2}{r^2}})^{3/2}} - 1\right]$$

$$\approx \frac{GmM_{日}}{r^2}\{(1 - \frac{R}{r}\cos\theta)[1 - (-\frac{3}{2})\frac{2R}{r}\cos\theta] - 1\}$$

$$\approx GmM_{日}\frac{2R\cos\theta}{r^3}$$

$$F_{\text{引潮}x} \approx GmM_{\text{日}} \frac{2R\cos\theta}{r^3}, \quad F_{\text{引潮}y} \approx -GmM_{\text{日}} \frac{R\sin\theta}{r^3}$$



θ=0、π — 背离地心，形成海水 2 个高峰

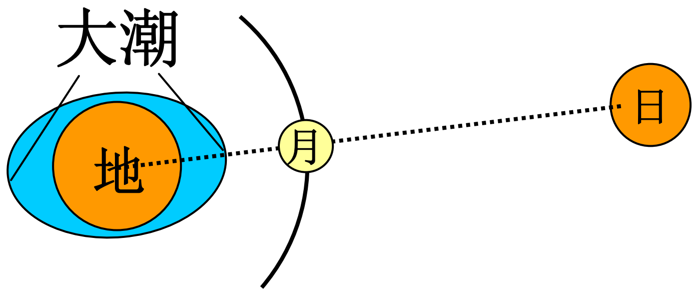
$\theta = \pm\pi/2$ — 指向地心，形成海水 2 个低谷

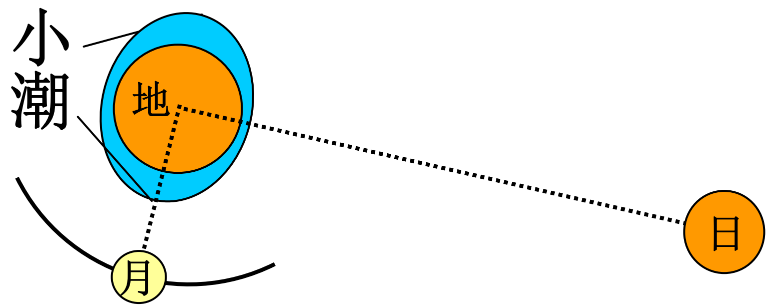
地球自转，一昼夜有 2 个高峰和 2 个低谷扫过每一个地方，形成 2 次高潮和 2 次低潮。

地面上，月球对潮汐影响要比太阳大：

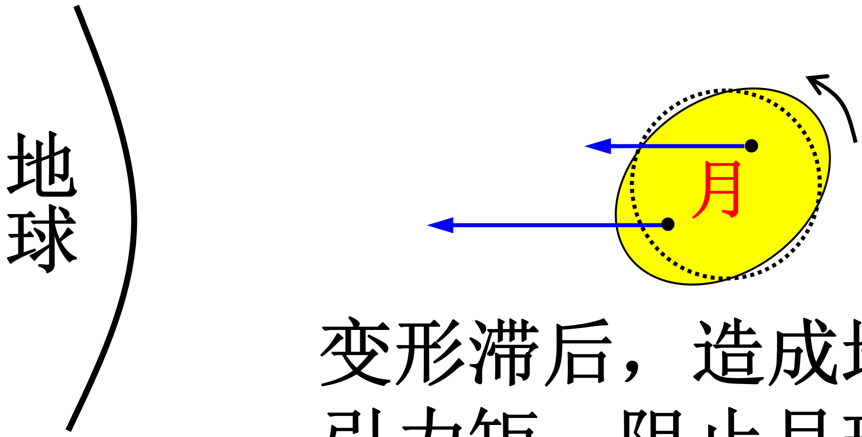
$$\frac{F_{\text{引潮-月}}}{F_{\text{引潮-日}}} \approx \frac{M_{\text{月}}}{M_{\text{日}}}\left(\frac{r_{\text{日-地}}}{r_{\text{月-地}}}\right)^3 \approx 2.18$$

大潮与小潮





固体潮（形变）：



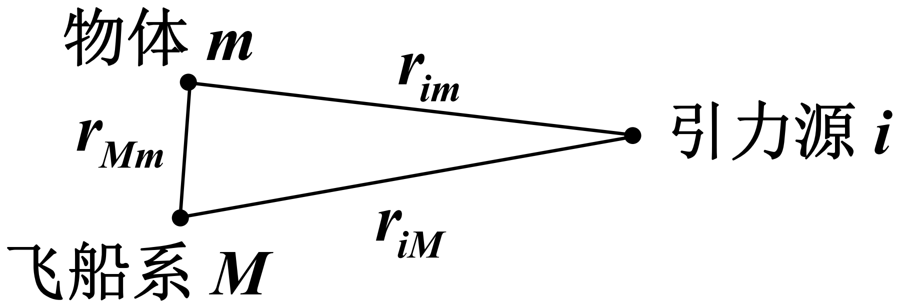
变形滞后，造成地球对月球引力矩，阻止月球自转

- 使月球自转和公转周期最终达到一致。
- 使地球自转变慢。由植物年轮，珊瑚和牡蛎化石生长线判断，**3**亿年前的**1**年约**400**天。
- 使接近大星体的小星体被引潮力撕碎。

2. 失重现象

根据前面讨论，如果飞船和其它物体只有引力作用，在飞船系 M，物体 m 只受引潮力和真实力作用：

$$m\vec{a}_m = \sum_{i(i\neq m,M)} Gmm_i\left(\frac{\vec{r}_{im}}{r_{im}^3} - \frac{\vec{r}_{iM}}{r_{iM}^3}\right) + \sum_{i(i\neq m,M)} \vec{f}_{im}$$

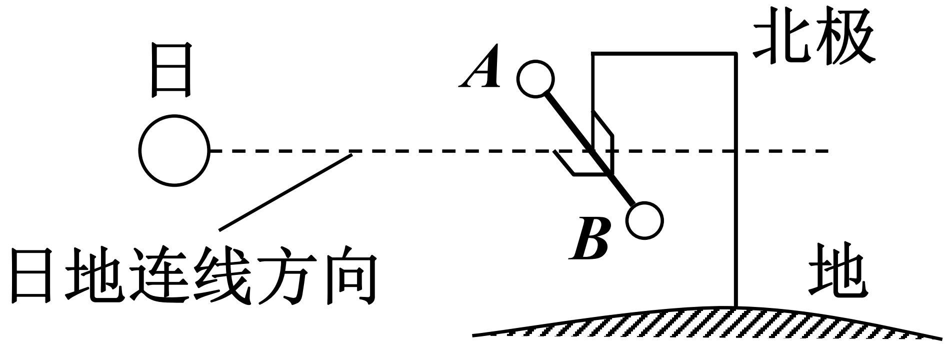


如果 $r_{im} \approx r_{iM}$，$r_{Mm} << r_{im}, r_{iM}$，物体所受引力近似地被惯性力抵消，引潮力可忽略，出现失重现象。此时飞船相当于惯性系。

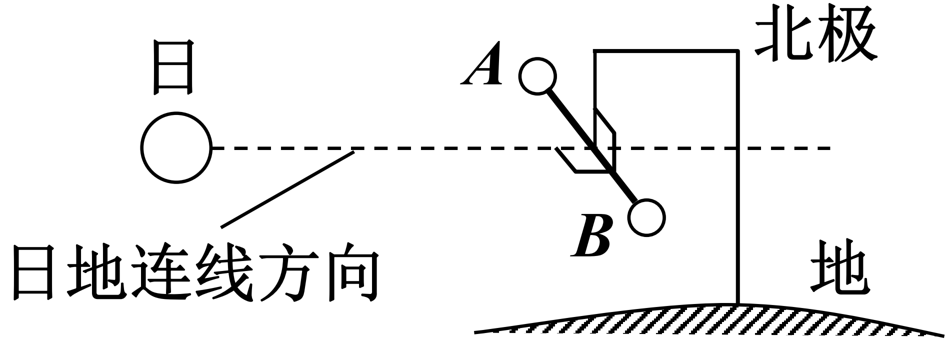
3. 厄特沃什实验

前面的讨论都假设惯性质量和引力质量相等。

牛顿曾用单摆测量惯性质量和引力质量之比，结果不够精确。检验惯性质量和引力质量相等的、令人信服的实验是由厄特沃什设计实施的，后由狄克等人进行了改进。



太阳处于地平线位置。地球北极放置扭秤，秤杆水平，和日地连线垂直，扭秤可绕竖直旋丝转动。



地面系，地球重力不会使扭秤旋转，忽略科氏力。

惯性质量 = 引力质量：引潮力使小球 ***A***、***B*** 的加速度相同，扭秤不会转动。

惯性质量 ≠ 引力质量：扭秤会转动一个角度，且随着地球自转，太阳表观位置变化，扭秤会慢慢转动，周期为 **24** 小时。

狄克实验在 $\mathbf{10^{-11}}$ 的相对精度内未观察到扭秤转动。