第十章 狭义相对论基础

§10.1 牛顿相对性原理和伽利略变换

§10.2 狭义相对性原理和光速不变原理

§10.3 同时性的相对性

§10.4 洛仑兹变换

§10.5 相对论时空观

§10.6 相对论速度和加速度变换

§ 10.7 相对论质量和动量

§ 10.8 相对论动力学方程

§ 10.9 相对论能量

§ 10.10 相对论动量 — 能量变换

§ 10.11 相对论中力的变换

§ 10.12 相对论的四维形式

相对论由爱因斯坦（**Albert Einstein**）创立，包括两部分：

狭义相对论（**1905**）

揭示了时间、空间与运动的关系

广义相对论（**1915-1916**）

揭示了时间、空间与引力的关系

绝对时空观的困难

绝对时空观由伽利略变换体现。牛顿力学规律满足伽利略变换，而麦克斯韦电磁学规律不满足，具体表现在：

▲ 电磁学理论给出真空中的光速 c 是常量。

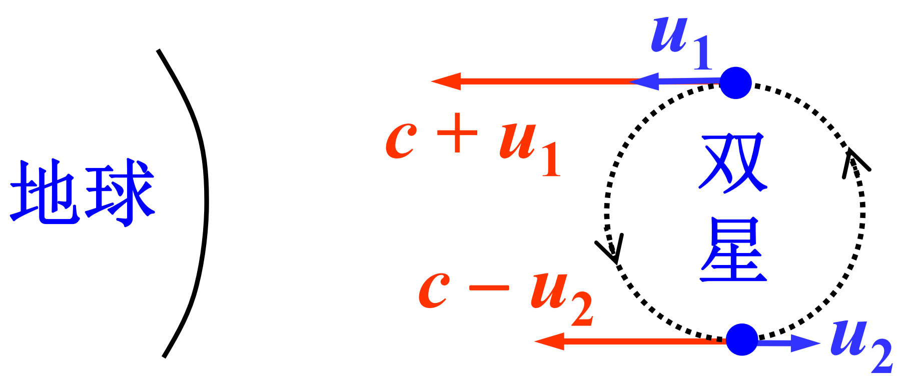
这意味着光速与观察者或光源的运动无关，或跟参考系无关，这与伽利略变换矛盾。

▲ 电磁学方程组在伽利略变换下形式改变。

历史上提出一些折中理论，主要目的仍是维护伽利略变换，但不是理论本身有矛盾，就是遭到实验的否定：

▲ 发射理论：光速要叠加光源的速度。

双星观测否定发射理论：



按照发射理论，双星发的光不会同时到达地球，这样应观察到双星位置扭曲现象。

但实际上并没有观测到双星位置的扭曲。

60 年代的粒子物理实验也否定发射理论：

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma$$

以 **0.99975*c*** 运动的 π^0 产生的 γ 速度（沿 π^0 运动方向测量）和静止的 π^0 辐射源产生的 γ 速度极其一致！

历史上大量的实验结果表明：

光速与光源的运动无关。

▲“以太”理论

历史上曾认为：光在真空中传播需要载体
—“以太”，它在真空中绝对静止。

“以太”论坚持伽利略变换是普适的，电磁学规律是特殊的：只在以太或相对以太静止的“绝对静止”参考系中成立。

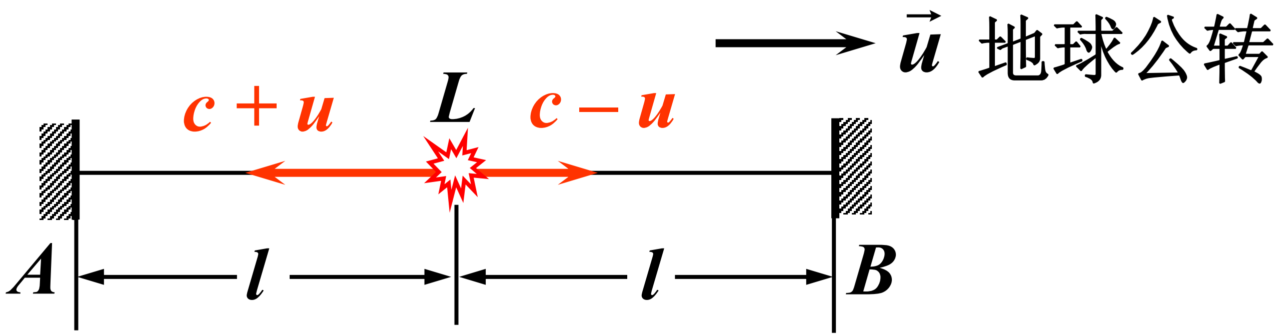
光速不变只对以太或“绝对静止”参考系成立

寻找以太和“绝对静止”参考系是当务之急。

寻找以太和“绝对静止”参考系的实验原理：

以太静止，地球运动，则在地球上可观察到以太相对地球的运动 —— “以太风”。

地球上顺着和逆着“以太风”方向光速不同：



$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{l}{c-u} - \frac{l}{c+u} \approx 2l\frac{u}{c^2} \quad (u << c)$$

若测得 $\Delta t \neq 0$，则表明有“以太风”刮过地球。

然而当时最精确的实验 — 迈克耳孙－莫雷实验（1887）的“零”结果说明：

没刮“以太风”，

地球是“绝对静止”参考系！

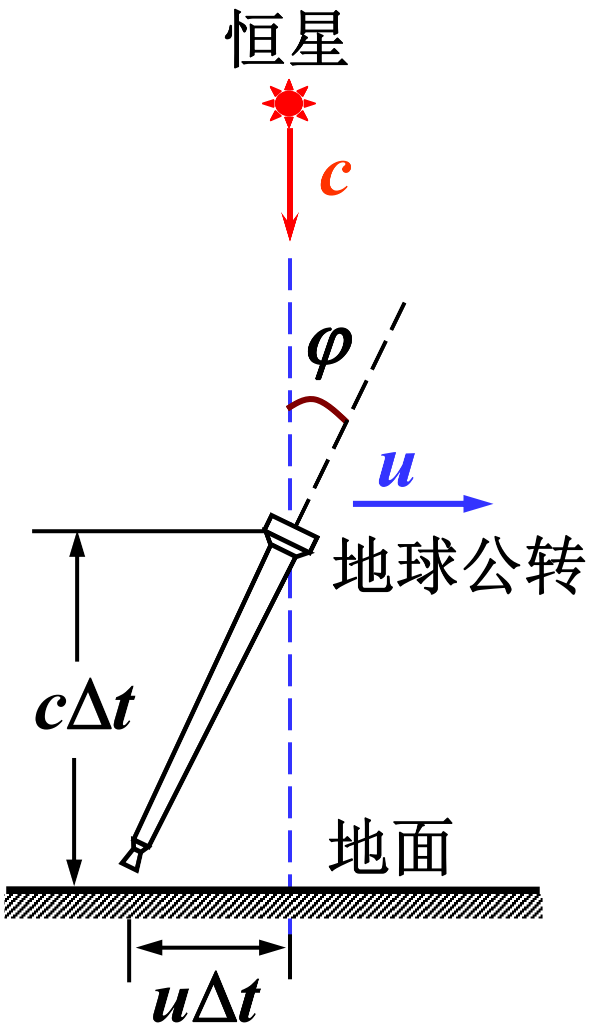
迈克耳孙－莫雷实验否定了“绝对静止”参考系的存在，对以太的存在也提出质疑。

▲“以太”拖曳说

靠近物质的以太可部分地被物质拖着走。

遭到“光行差”现象的否定。

“光行差”现象：



观测地球正上方的恒星时，望远镜须向地球公转方向倾斜一个小角度 φ ：

$$\varphi \approx \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{u\Delta t}{c\Delta t} = \frac{u}{c} \approx 20.47''$$

按“以太”拖曳说，光到地球附近要附加速度 u ，望远镜不用倾斜，显然与“光行差”现象矛盾。

历史上大量实验事实说明很难有两全之策，而是提出了更深刻尖锐的问题：

究竟是伽利略变换（或绝对时空）更基本，还是物理规律的不变性更基本？

爱因斯坦认为：

物质世界的规律应是和谐统一的，麦克斯韦方程组应该对所有惯性系成立。在任何惯性系中光速都是各向为 c ，这样就自然地解释了迈克耳孙 — 莫雷实验的零结果。

这意味着：

物理规律的不变性更基本，所有惯性系地位是平等的，不存在特殊的惯性系，接受光速不变，建立新的时空观和时空变换关系。

事件和时空变换

事件：具有确定发生时间、地点的客观现象

时空坐标：事件的发生时间、地点

时空变换：同一事件在两个惯性系中的时空坐标之间的变换关系。

$$(x, y, z, t) \Leftrightarrow (x', y', z', t')$$

不同形式的时空变换，涉及在不同参考系中对时间和空间的测量，代表不同的时空性质，反映不同的时空观。

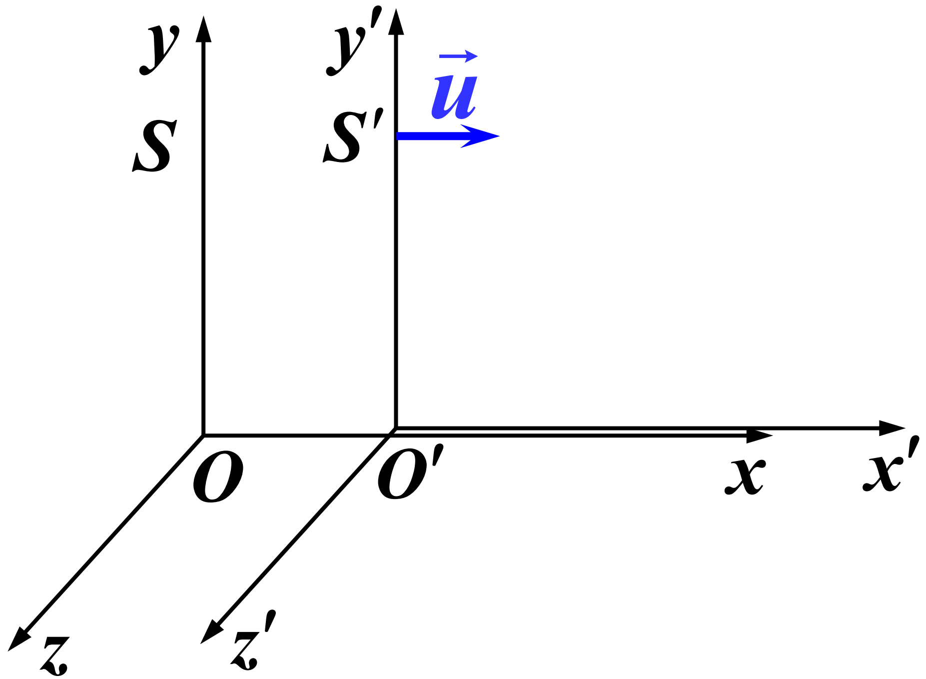
§10.1 牛顿相对性原理和伽利略变换

牛顿相对性原理：

一切力学规律在不同的惯性系中应有相同的形式。

牛顿相对性原理源于绝对时空观，由惯性系之间的伽利略变换得以体现。

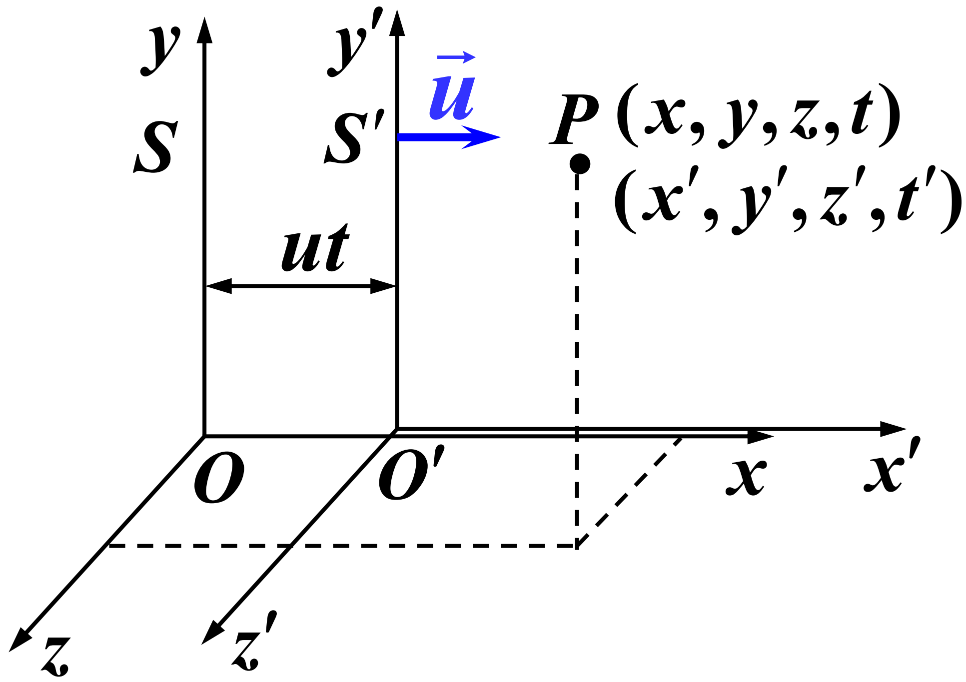
设惯性系 S' 相对 S 运动，相对速度为 $\vec{u}$ 。



约定：$x' \,/\!/\, x$, $y' \,/\!/\, y$, $z' \,/\!/\, z$, $\vec{u} = u\vec{i} =$ 常数

原点 O'、O 相遇时，即 2 系原点处

配置的钟相遇时的读数：$t = 0$, $t' = 0$



由时间、空间间隔度量的绝对性有：

伽利略变换 $$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

求导： $\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$

$\vec{u} =$ 常数 $\Rightarrow \vec{a}' = \vec{a}$

$\therefore$ 牛II律 $\vec{F} = m\vec{a}$ 在伽利略变换下形式不变。

$\therefore$ 伽利略变换和力学相对性原理一致。

用力学实验无法判定惯性系的运动状态。

§ 10.2 狭义相对性原理和光速不变原理

1905 年爱因斯坦在《论动体的电动力学》论文中提出两条基本原理：

1. 狭义相对性原理

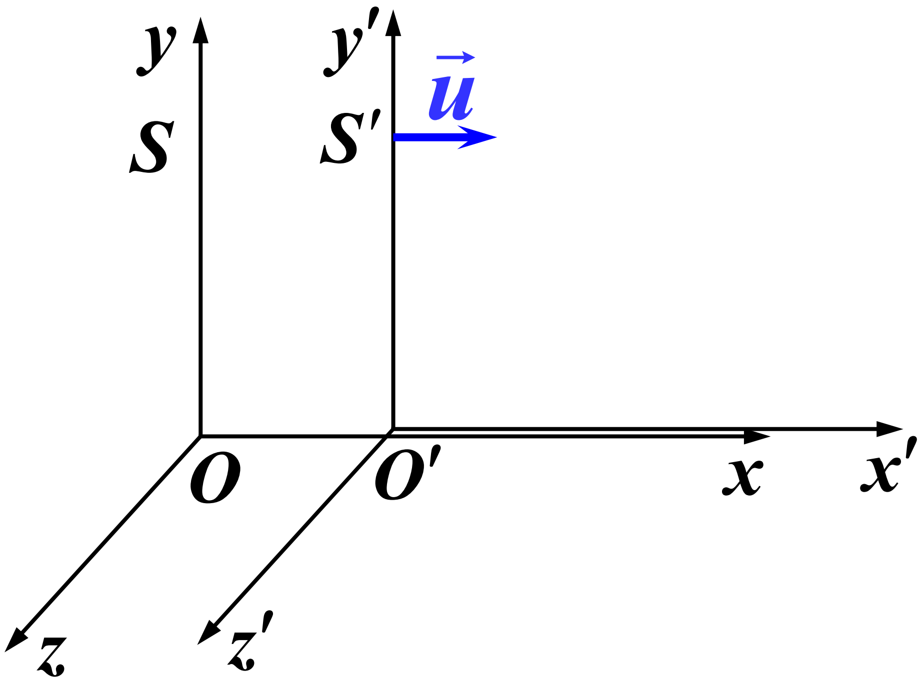
所有惯性系是平权的，物理规律在所有惯性系中具有相同形式。

2. 光速不变原理

任何惯性系中，真空中的光速都为 c，和惯性系、光源或观察者的运动无关。

由特定事件理解光速不变原理

设惯性系 S' 相对 S 运动，相对速度为 $\vec{u}$ 。



约定：

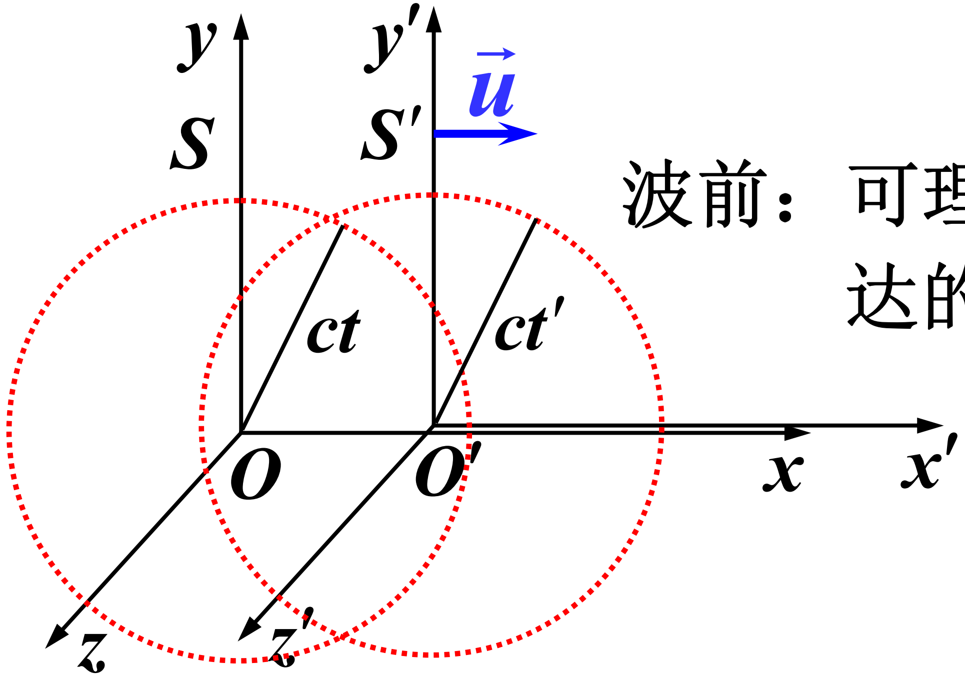
$x' \,//\, x,\ \ y' \,//\, y,\ \ z' \,//\, z$

$\vec{u} = u\vec{i} =$ 常数

且 O'、O 重合时：

$t = 0,\ \ t' = 0$

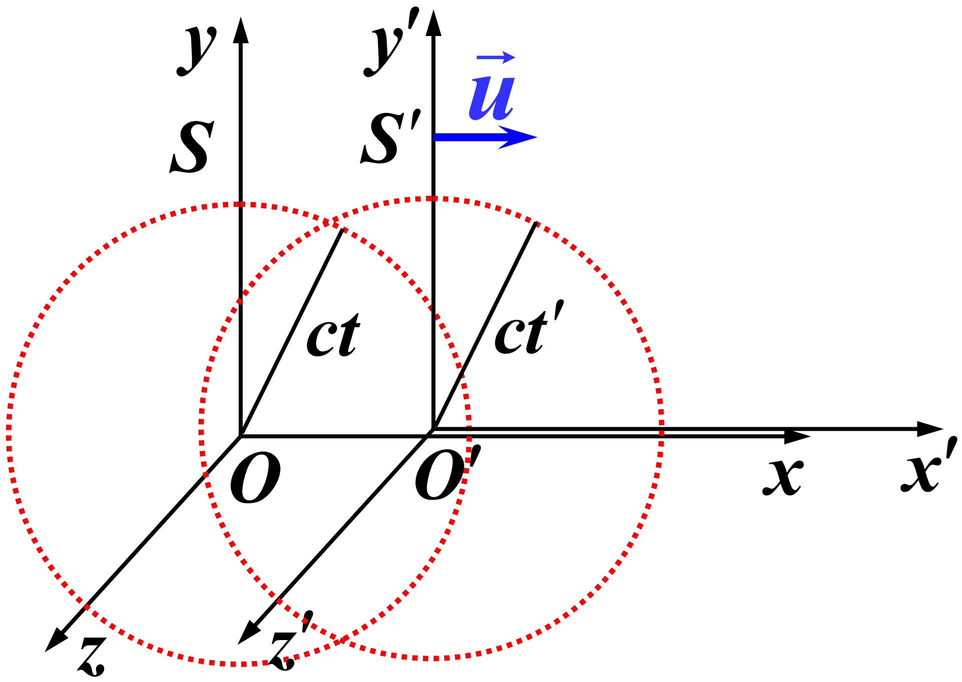
设 O'、O 重合时，固定在 O' 点的光源闪光。



波前：可理解为光同时刻到达的点所形成的曲面

S'系： 发出闪光在球心 O' 点，闪光的波前是半径为 ct' 的球面。

S 系： 发出闪光在球心 O 点，光速与光源运动无关，闪光波前是半径 ct 球面。



描述闪光波前的方程：

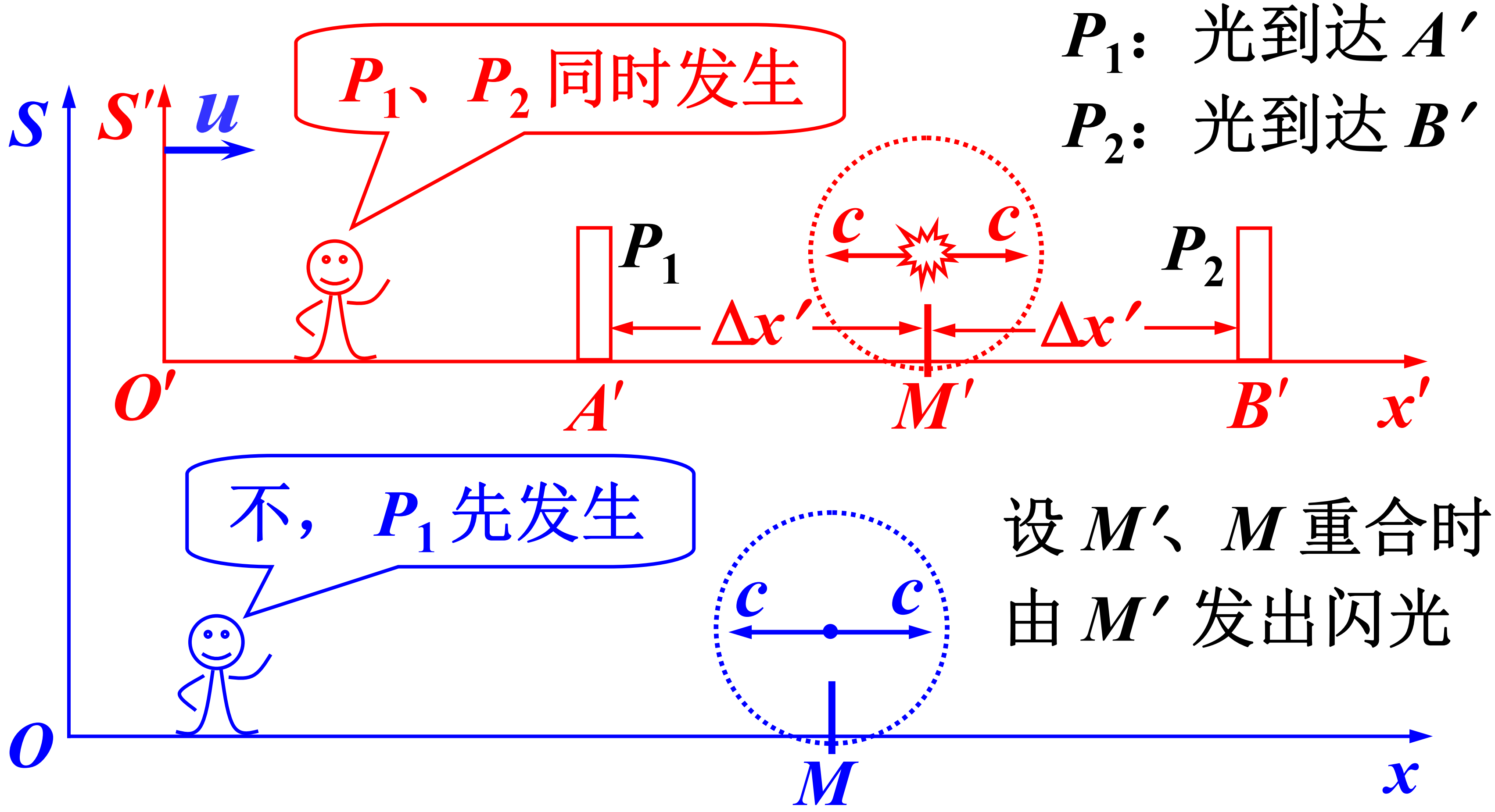
$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$S': \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

— 体现光速不变原理

§ 10.3 同时性的相对性

一. 同时性的相对性 — 源于光速不变



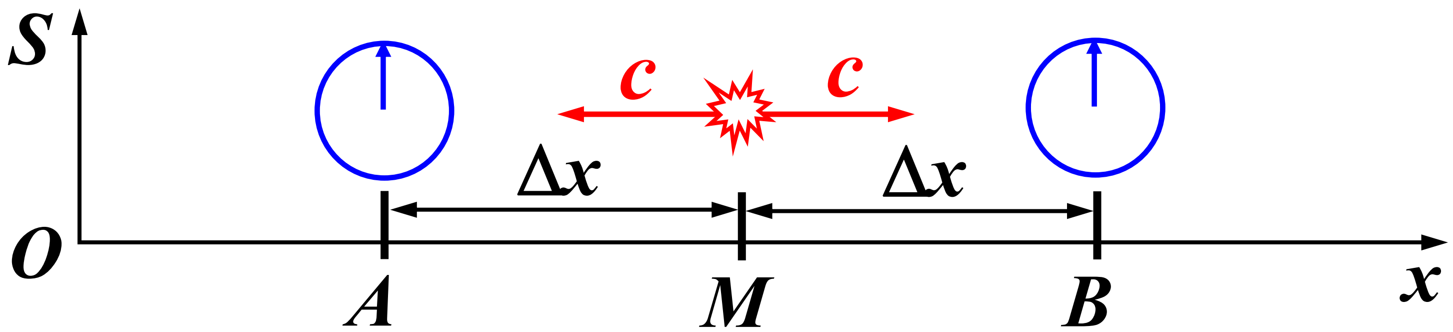
沿两个惯性系相对运动方向配置的两个事件，若在一个惯性系中这两个事件同时发生，则在另一惯性系中观测，总是处于前一个惯性系运动后方的事件先发生。

沿垂直于相对运动方向上发生的两事件，其同时性是绝对的，不具有相对性。

在 S 和 S' 系两束光走的路程都分别相同。

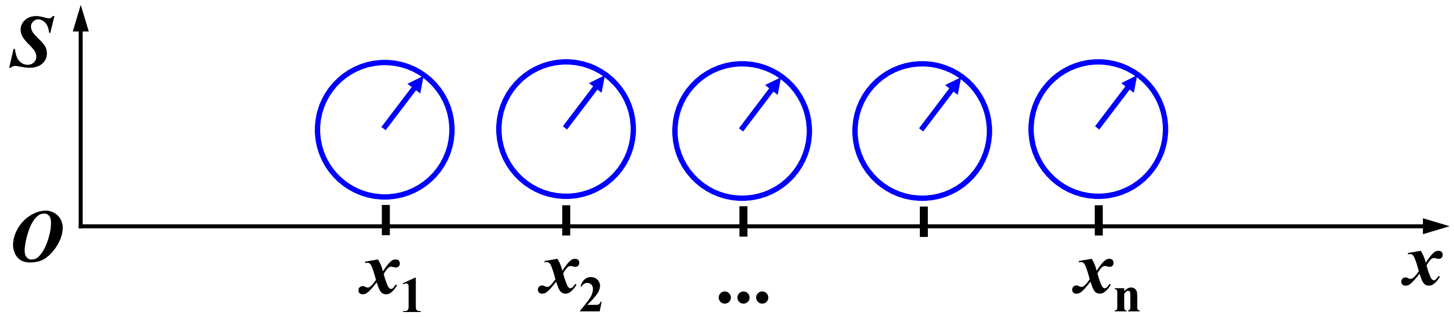
二. 爱因斯坦异地对钟准则

根据光速不变原理对钟：



中点 M 发出的光信号同时到达 A、B，到达时刻将静止在 A、B 两地的钟拨到同一时刻，即对准。

在惯性系的每个位置配置一个相对该惯性系静止的钟，利用爱因斯坦对钟准则可将所有的钟对准。



这些对准的静止的钟和惯性坐标系就构成该惯性系的测量系统。

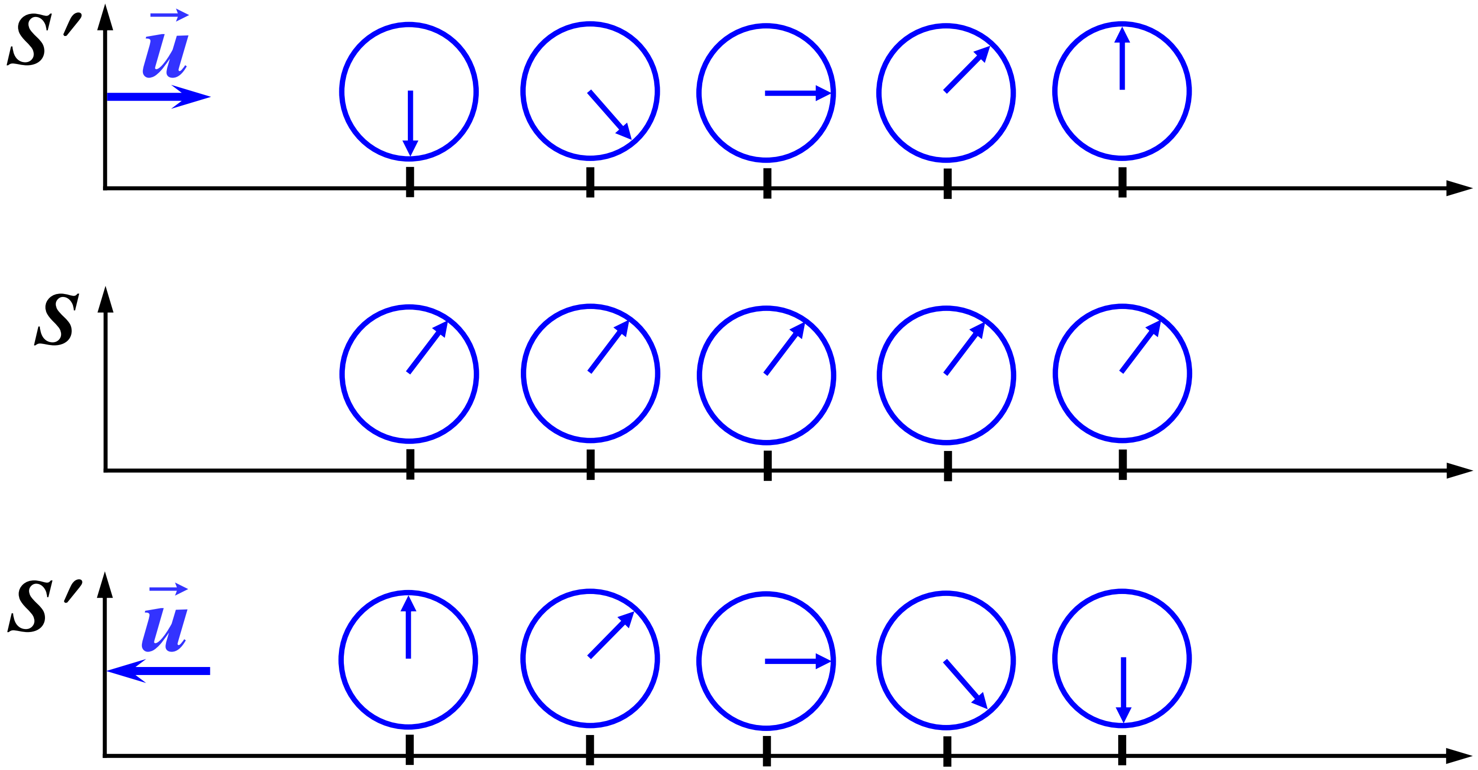
事件 $P\,(x, y, z, t)$ 发生的时刻要由配置在发生地点 (x, y, z) 处的静止的钟读出。

所有惯性系是平权的，每个惯性系都用自己配置的一系列静止的、对准的钟测量事件的时空坐标。

根据同时性的相对性可知：

- 对钟只可能针对同一惯性系配置的钟进行，分属不同惯性系配置的两个钟，只有相遇时才能直接比较读数或对钟。
- 每个惯性系都会坚持自己系内配置的钟是对准的，其它惯性系的钟没有对准。

从 S 系观察，沿 S' 系运动方向，S' 系配置的一系列钟，越靠前的指示的时刻越早。



§10.4 洛仑兹变换

光速不变原理和爱因斯坦相对性原理所蕴含的时空观，应该由一个时空变换来表达。

早在1899年，洛仑兹就导出了惯性系之间的时空变换式 — 洛仑兹变换。

但其推导是以“以太”存在为前提的，并认为只有 t 代表真正的时间，t' 只是一个辅助量。

1905年，爱因斯坦在全新的物理基础上得到这一变换关系。

推导洛伦兹变换需要以下 4 点基本假设：

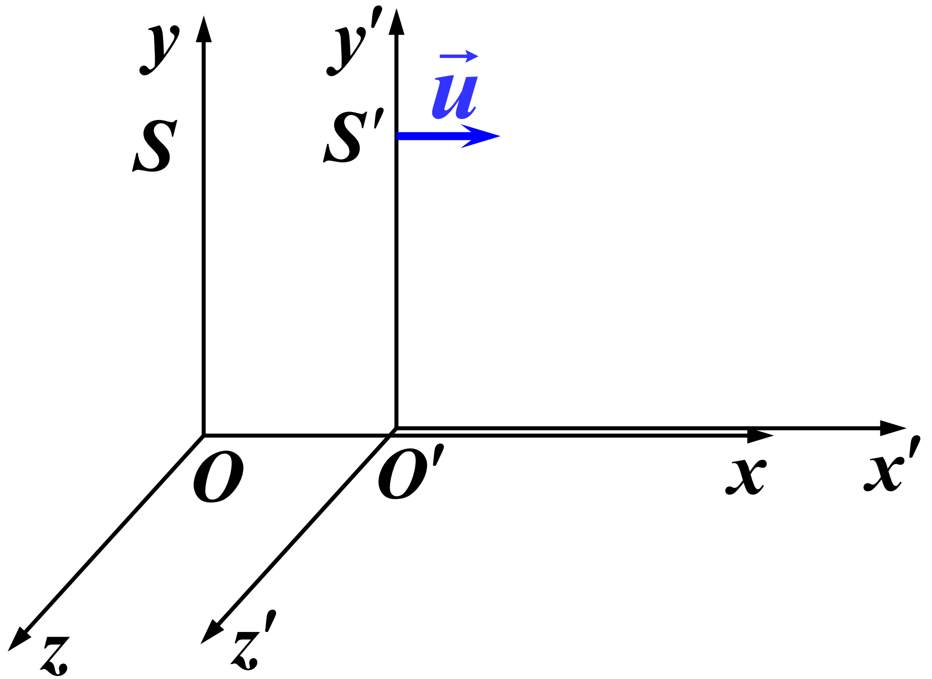
1. 时空特性

狭义相对论里仍然认为空间是均匀、各向同性的，时间是均匀的。

这样惯性系的坐标原点、坐标轴的取向可任意选择，时间的原点可任意选择。

通常选择 2 个惯性系 S'、S 的时空坐标轴的原点重合，坐标轴相互平行，相对运动方向沿 x 轴方向。

设惯性系 S' 相对 S 运动，相对速度为 $\vec{u}$ 。



约定：$x' \,//\, x$，$y' \,//\, y$，$z' \,//\, z$，$\vec{u} = u\vec{i} =$ 常数

原点 O'、O 相遇时，即 2 系原点处

配置的钟相遇时的读数：$t = 0$，$t' = 0$

空间的均匀各向同性、时间的均匀性要求：

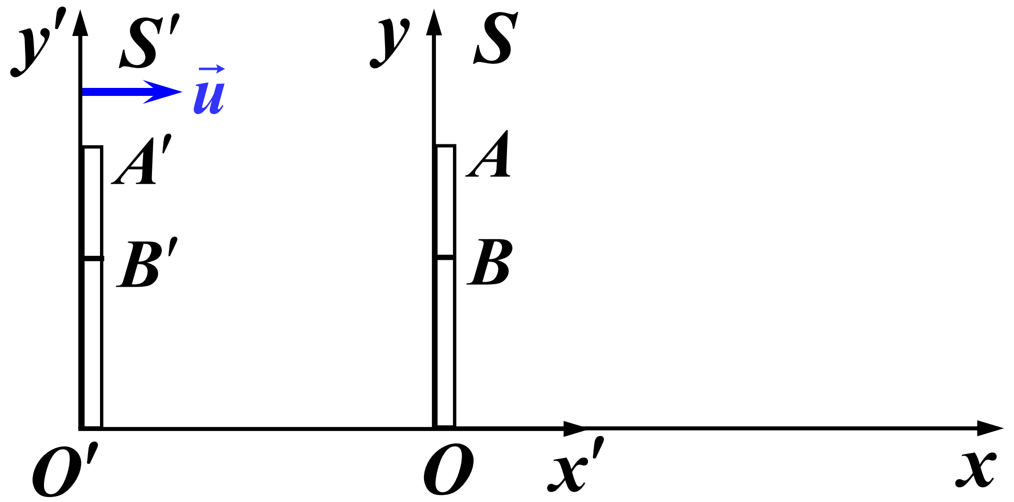
- 变换必需是线性的
- 垂直运动方向的长度测量与运动无关

设想 S 系在 y 轴上放把静止的尺，底端和顶端分别为 O、A 点，B 是其间一点。

再把这样的 S 系拷贝一个变为 S'系，而且按前面约定的方式沿 x 轴方向相对运动。

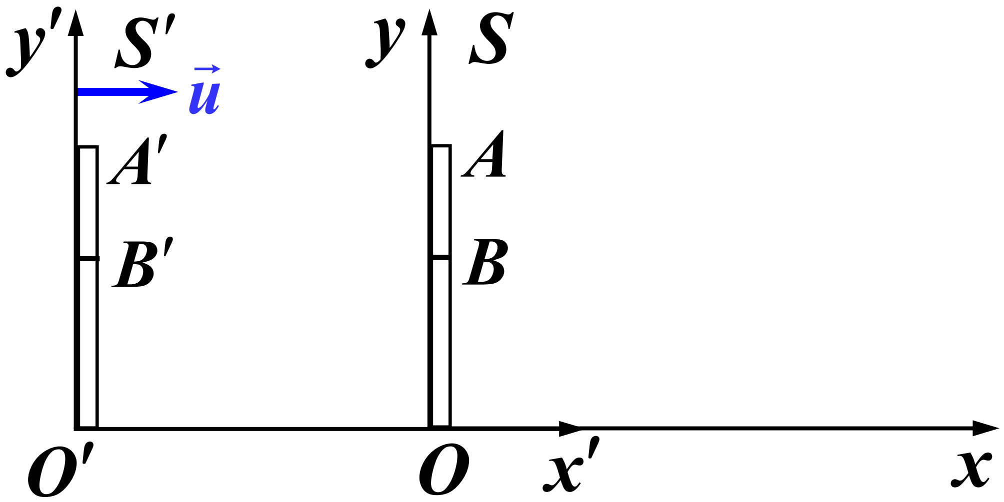
假设 2 系的 y、y' 轴相遇时，或 2 把尺相遇时比较其长度，结果只能是一样长。

证明



假设 S 系的结果是 A 和 B' 相遇，则 S 系的结论是 $A'B'$之间点不会和 AO 之间点相遇。

但 2 系是全同的，沿相对运动方向的观察是对称的，所以由对称性， S 系的结果若是 A 和 B' 相遇，则 S'系的结果是 A'和 B 相遇。



这和 S 系的结论矛盾。

所以比较结果只能一个：A 和 A' 相遇。

A 和 A' 相遇意味着在垂直于相对运动方向 2 个尺子是等长的：即垂直运动方向的长度测量与运动无关。

2. 运动的相对性

认可运动的相对性关系：$\vec{v}_{A对B}=-\vec{v}_{B对A}$

在此处键入文本

S'系相对 S 系沿 x 轴以速度 u 运动，则 S 系相对 S'系沿 x' 轴以速度 $-u$ 运动。

3. 光速不变原理

4. 低速下能回到伽利略变换

设变换为
$$\begin{cases} x' = \alpha x + \varepsilon t & (1) \\ t' = \delta x + \eta t & (2) \\ y' = y & (3) \\ z' = z & (4) \end{cases}$$

系数 $\alpha, \varepsilon, \delta, \eta$ 应由相对运动和光速不变条件来确定，可选择几个特殊事件来定：

▲ S' 系的原点 O' 在 S 系的速度为 u

由 (1) 式，令 $x'=0$ 再微分可得：

$$u = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{O'} = -\frac{\varepsilon}{\alpha} \qquad (5)$$

同理，S 系原点 O 在 S' 系的速度为 $-u$ ，

由 (1)(2) 得： $$-u=(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'})_O=\frac{\varepsilon}{\eta} \qquad (6)$$

▲ O'、O 重合时 O' 点发光的波前方程：

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \qquad (7)$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \qquad (8)$$

把 (1)–(6) 代入 (8) 得：

$$\begin{aligned}&\alpha^2x^2+2\alpha\varepsilon xt+\varepsilon^2t^2+y^2+z^2\\&=c^2(\delta^2x^2+2\delta\alpha xt+\alpha^2t^2)\end{aligned} \qquad (9)$$

(7)(9) 同时成立要求系数对应相等：

$$\alpha^2 - c^2\delta^2 = 1 \qquad (10)$$

$$\varepsilon - \delta c^2 = 0 \qquad (11)$$

$$c^2\alpha^2 - \varepsilon^2 = c^2 \qquad (12)$$

由(5)(6)(10)(11)(12) 解出：

$$\alpha = \eta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}，\ \varepsilon = \frac{-u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}，\ \delta = \frac{-\frac{u}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

洛仑兹变换

正变换
$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

逆变换
$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{u}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

令 $\beta = \dfrac{u}{c}$， $\boxed{\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}}$ —洛仑兹因子

正变换

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x-ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right) \end{aligned}}$$

逆变换

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x'+ut') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right) \end{aligned}}$$

两事件的时间间隔、空间间隔变换公式

正变换

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$$
$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x)$$

逆变换

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$$
$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x')$$

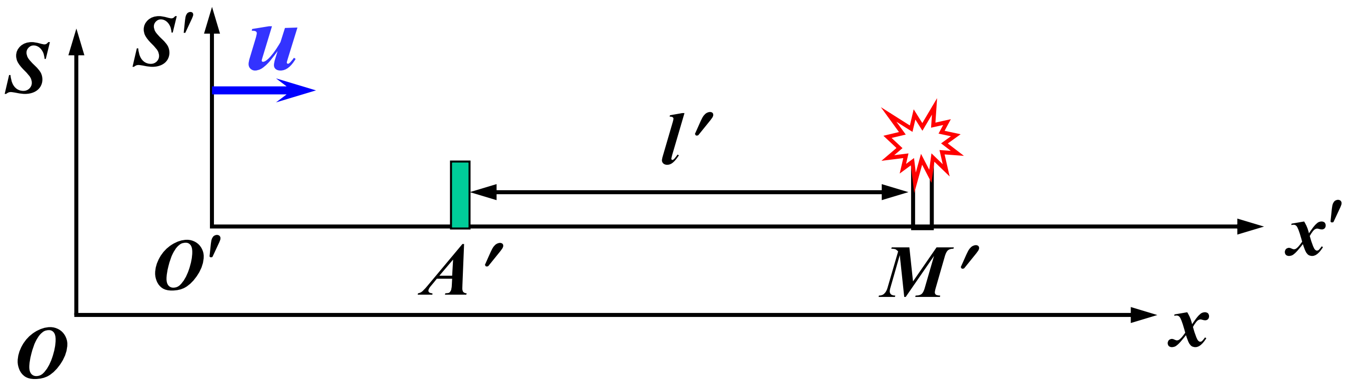
说明：

1. $u << c$ 时洛仑兹变换过渡到伽里略变换。

2. c 是一切可作为参考系的物体的极限速率，两物体间的相对速度只能小于c 。

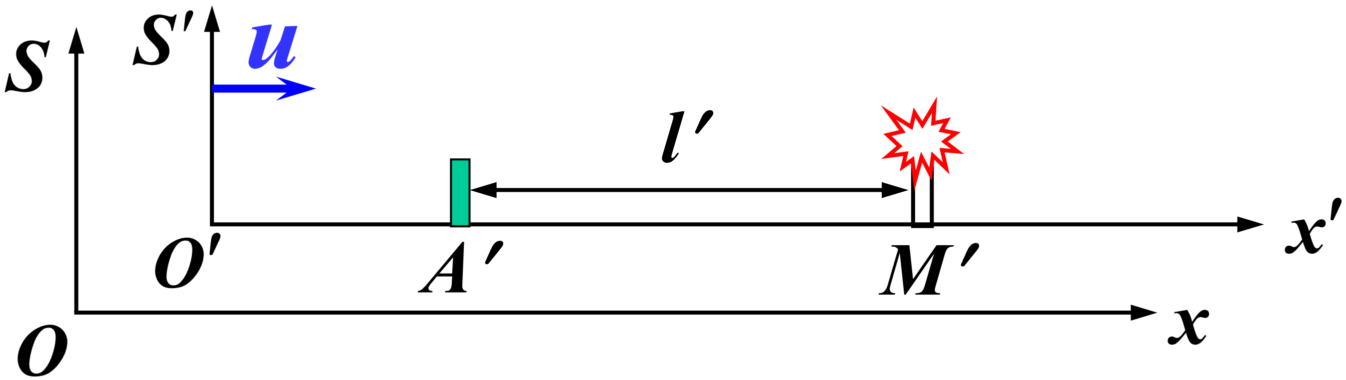
【例】爱因斯坦火车 S' 以速度 $u = 0.6c$ 相对地面 S 运动，火车中光信号发生器 M' 与接收器 A' 距离 $l' = 3\times10^6$m。

求：地面测量光信号传到 A' 所需时间。



解： 事件1：M' 发光； 事件2：光到 A'

火车 S' 系： $\Delta t' = \dfrac{l'}{c} = 0.01\text{s}$， $\Delta x' = -l'$



地面 S 系：　由洛伦兹变换得

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x')$$

$$= \gamma[\frac{l'}{c} + \frac{\beta}{c}(-l')]$$

$$= 0.005\,\mathrm{s}$$

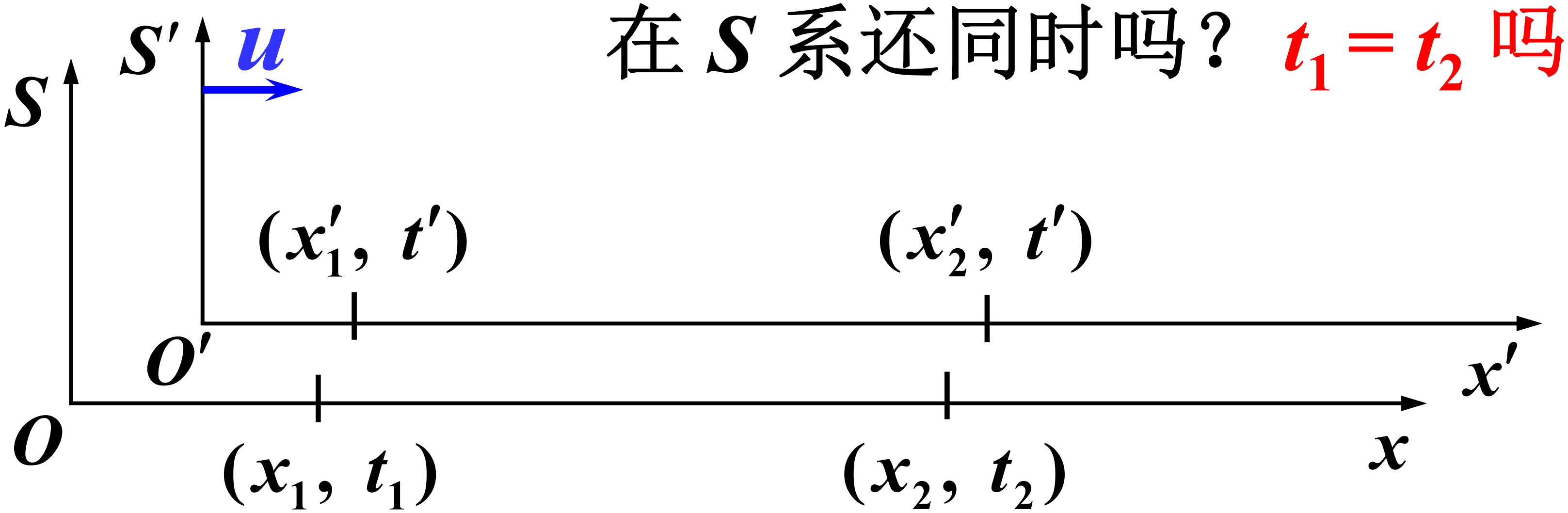
§ 10.5 相对论时空观

本节由洛仑兹变换出发，讨论几个体现相对论时空观的重要结论。

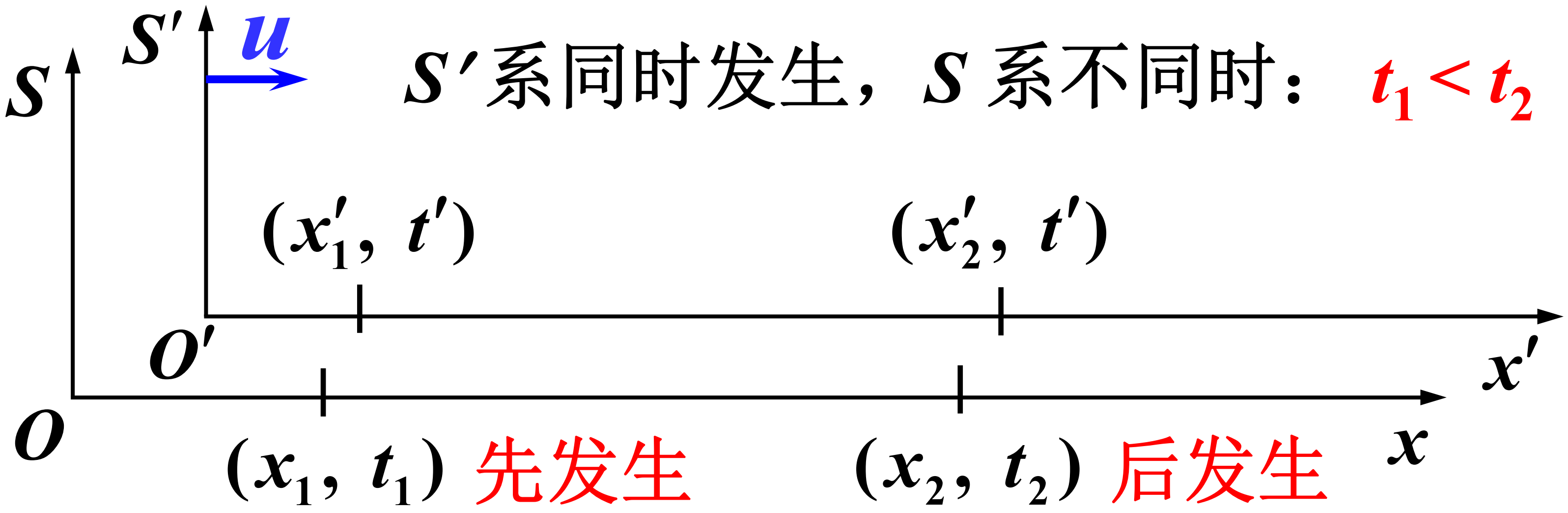
一. 同时性的相对性

设两事件 P_1、P_2 在 S' 系同时发生，

在 S 系还同时吗？ $t_1 = t_2$ 吗？



S'系同时发生，S 系不同时： $t_1 < t_2$



S 系：

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x'\right)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{\gamma\beta(x_2' - x_1')}{c} > 0$$

相对运动后方的事件先发生

二. 时间延缓（时间膨胀）

原时： 在惯性系同一地点先后发生的两事件的时间间隔，由一只当地钟测。原时又称固有时，用 $\Delta t'$ 或 τ 表示。

测时： 在另一惯性系观测这两事件的时间间隔，由两只相应的钟测得。测时又称两地时，用 Δt 表示。

根据洛仑兹变换有：

$=0$（同地）

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x') = \gamma \Delta t'$$

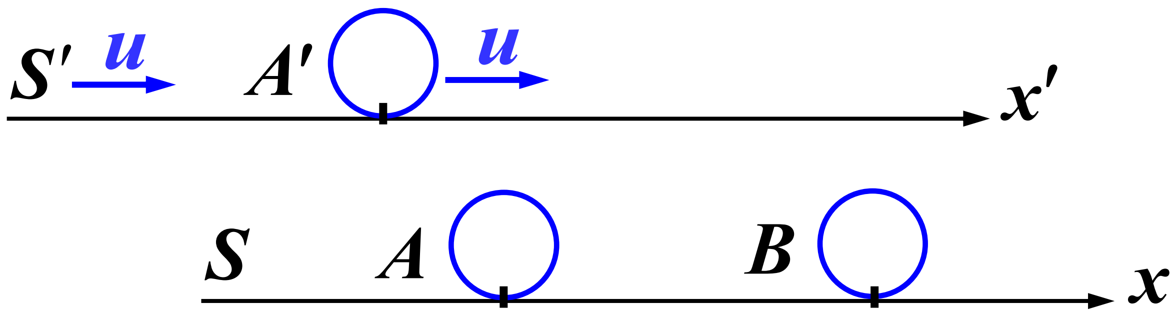
原时－测时关系

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} < \Delta t}$$

— 原时最短

时间延缓效应：惯性系中同一地点发生的两事件的时间间隔，在另一惯性系中观测变大。

【例】动钟变慢

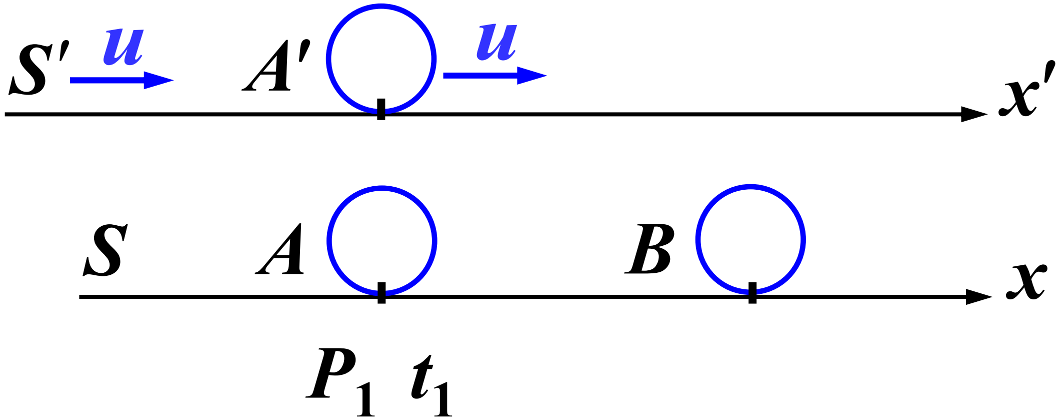


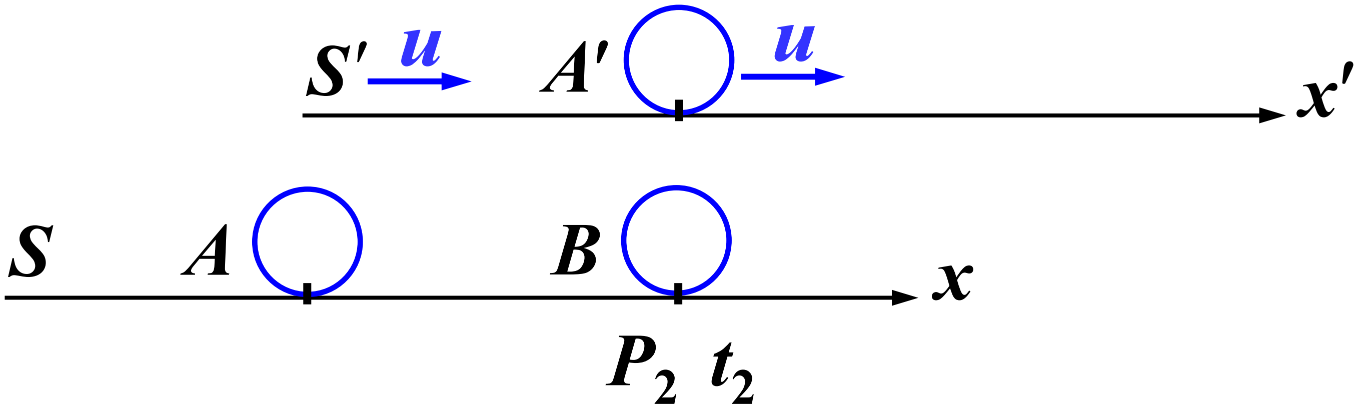
设运动的钟 A' 相对惯性系 S 以速度 u 运动，S' 系是相对钟 A' 静止的惯性系。A、B 是 S 系内配置的两个同步的钟。

事件 P_1：A' 和 A 相遇，时间坐标 t_1、t'_1

事件 P_2：A' 和 B 相遇，时间坐标 t_2、t'_2

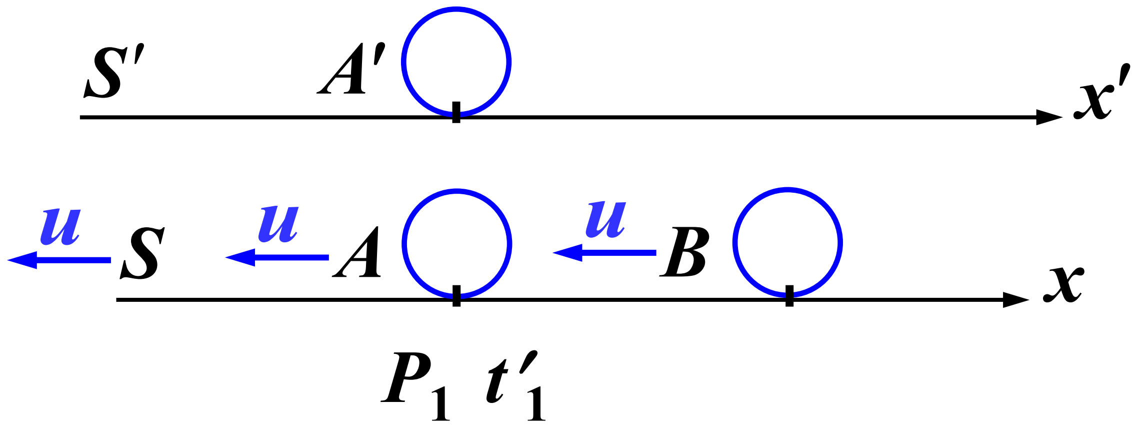
S 系的观测结果：

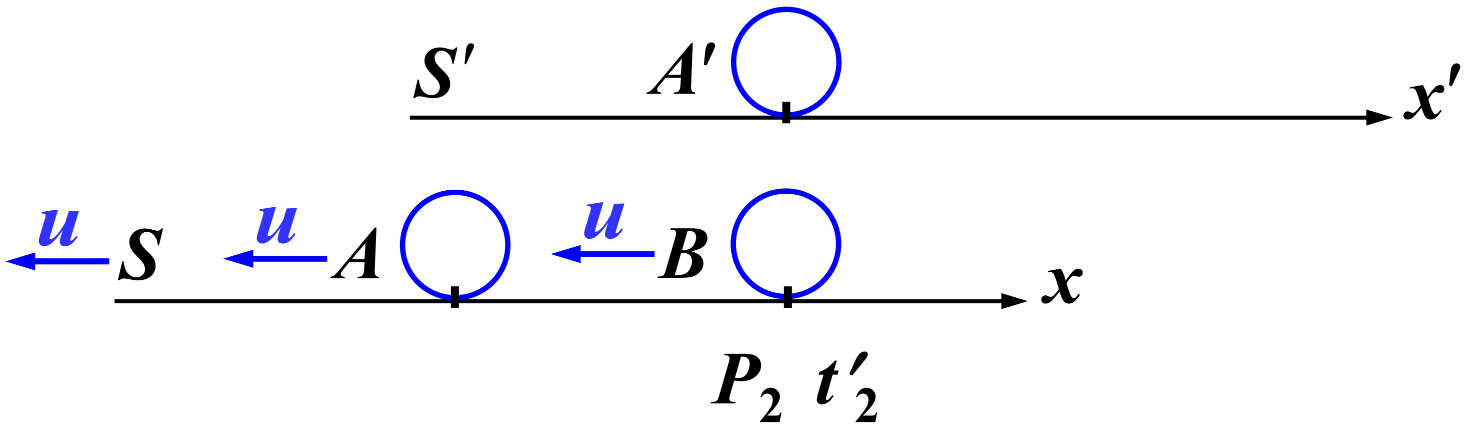




事件 P_1、P_2 时间差：$\Delta t = t_2 - t_1$

S'系的观测结果：





事件 P_1、P_2 时间差：$\Delta t' = t'_2 - t'_1$

在 S'系，钟 A' 静止，事件 P_1、P_2 都发生在钟 A' 位置处，都由钟 A' 测时间，所以 S'系的观测结果 $\Delta t'$是原时。而 S 系的观测结果 Δt 是测时：

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} < \Delta t$$

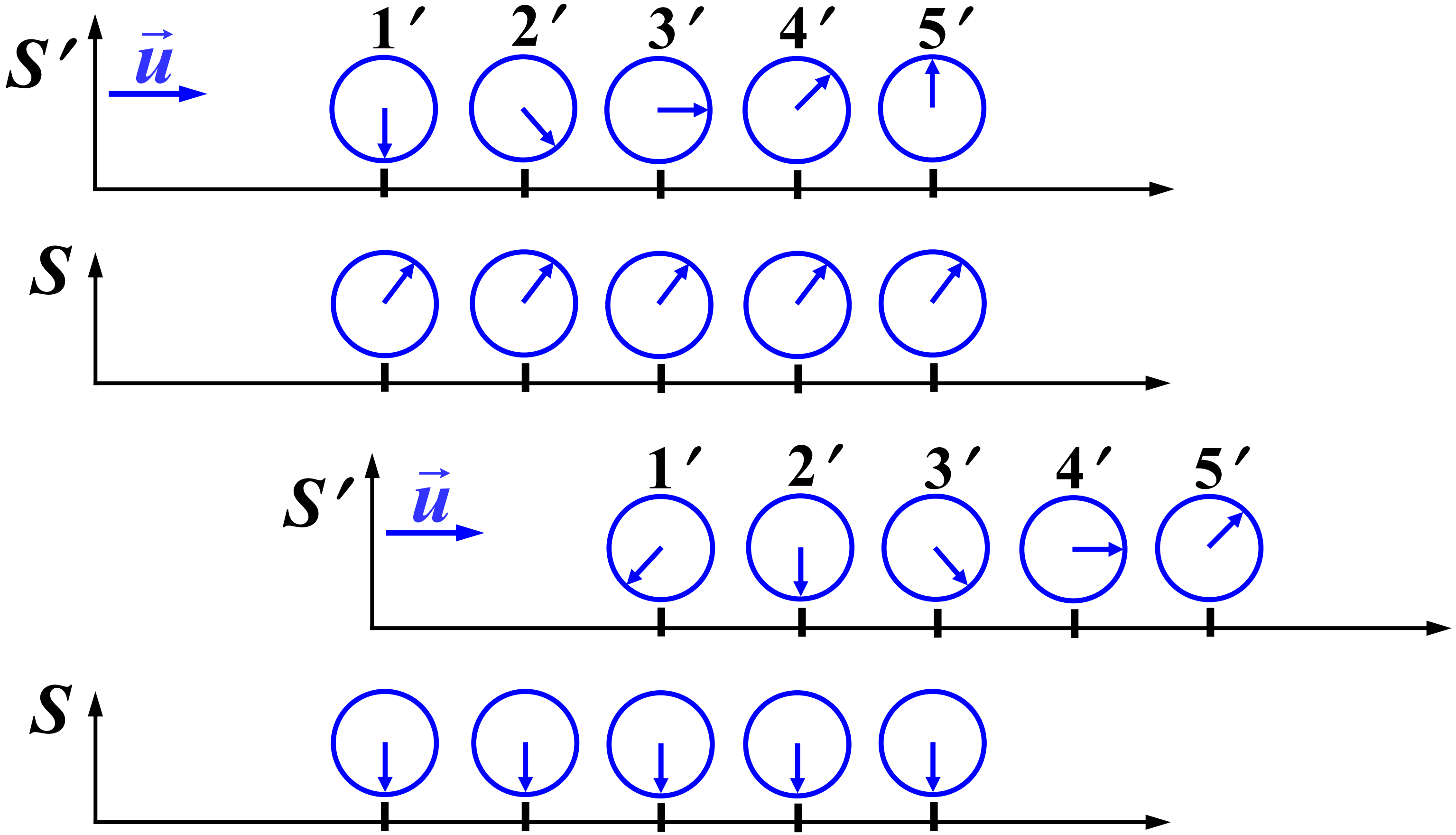
则 S 系的观测者认为运动的时钟走时慢（$\Delta t'$小），而自己系内的时钟走时快（Δt 大）— 动钟变慢。

注意：动钟变慢并非是钟的结构发生了变化，和钟同地点、相对静止的观测者（或者和钟一起运动的观测者）是感觉不到钟变慢的。

当 $u \ll c$ 时，$\Delta t' = \Delta t$，回到绝对时间。

时间延缓是相对的：*S* 系中观测 *S′* 系中配置的时钟变慢，而 *S′* 系中观测 *S* 系中配置的时钟变慢。

S 系中观测 *S′* 系配置的时钟



S 系的观测结果：S' 系中的时钟没校准，但走时都一样，都是原时。即 S' 系中每个位置处的时间原点不统一，但每个位置处的时间流逝一样，都是原时，但仍比自己系的时间流逝慢。

S' 系的观测结果：S 系中的时钟没校准，但走时都一样，都是原时。即 S 系中每个位置处的时间原点不统一，但每个位置处的时间流逝一样，都是原时，但仍比自己系的时间流逝慢。

根据上面讨论可知，同一地点发生的任何过程，如物理的、化学的、生命的等等，在一个运动的惯性系中观测，节奏都会变慢。

关于原时和测时的深入理解

观察一个运动的物体，运动的物体“自己”感受的时间就是原时，而观测者记录物体的运动，使用自己参考系的时间，这个时间就是测时。

设运动的物体速度为 $\boldsymbol{v}$，其原时为 τ，观测者记录的时间为 t，则有：

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\Delta t}{\gamma_v} \qquad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

惯性系内的时间用来观测运动物体时，就是测时，即普通时间，它用来定义物体常规意义上的速度。

【讨论】孪生子佯谬和孪生子效应

有一对孪生兄弟，哥哥告别弟弟乘宇宙飞船去太空旅行。根据时间延缓效应，地球上的弟弟认为哥哥比自己年轻，飞船上的哥哥认为弟弟比自己年轻。

假如飞船返回地球兄弟相见，到底谁年轻就成难以回答的问题。

问题关键：时间延缓效应是狭义相对论结果，要求飞船和地球同为惯性系。

要想保持飞船和地球同为惯性系，兄弟就只能永别，不可能再见面比较谁年轻，这就是孪生子佯谬。

若飞船返回地球，在往返过程中有加速度，飞船就不是惯性系。这一问题的严格求解要用广义相对论，计算结果：兄弟相见时哥哥比弟弟年轻。这种现象被称为孪生子效应。

1971年美国空军用两组 **Cs**（铯）原子钟绕地球一周做实验，发现运动钟变慢 **203±10ns**，而广义相对论预言变慢**184±23ns**，二者在误差范围内一致，验证了孪生子效应。

时间延缓实例

$$\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu$$

π 子静止寿命 $\Delta\tau = 2.5\times10^{-8}\ \mathrm{s}$

$u = 0.99c$ 时，测得径迹长 $l = 53\mathrm{m}$。

运动寿命：$\Delta t = \dfrac{l}{u} = \dfrac{53}{0.99\times3\times10^{8}} = 1.8\times10^{-7}\ \mathrm{s}$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta t}\right)_{\text{实验}} = \frac{2.5\times10^{-8}}{1.8\times10^{-7}} = 0.14 \\ &\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta t}\right)_{\text{理论}} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \sqrt{1-0.99^2} = 0.14 \end{aligned}\right\}\text{一致}$$

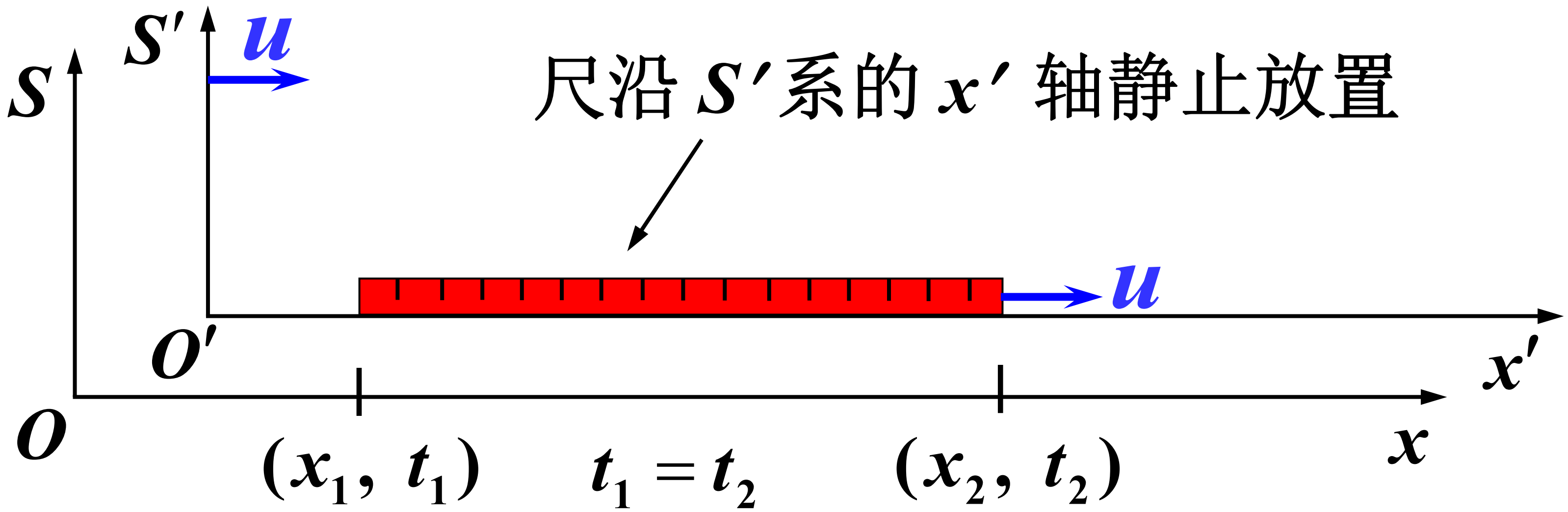
三. 长度收缩

原长：在相对物体静止的惯性系中所测长度。需测量物体始端、末端坐标，但与测量时间的早晚无关。原长又称静长或固有长度，用 l' 表示。

动长：物体在运动时所测长度。必需同时测量物体始端、末端坐标。用 l 表示。

动长测量当中涉及两个同时事件：同时测量运动物体的始端、末端坐标。在相对物体静止的惯性系中，两事件的坐标差是原长。

S 系测量尺的动长

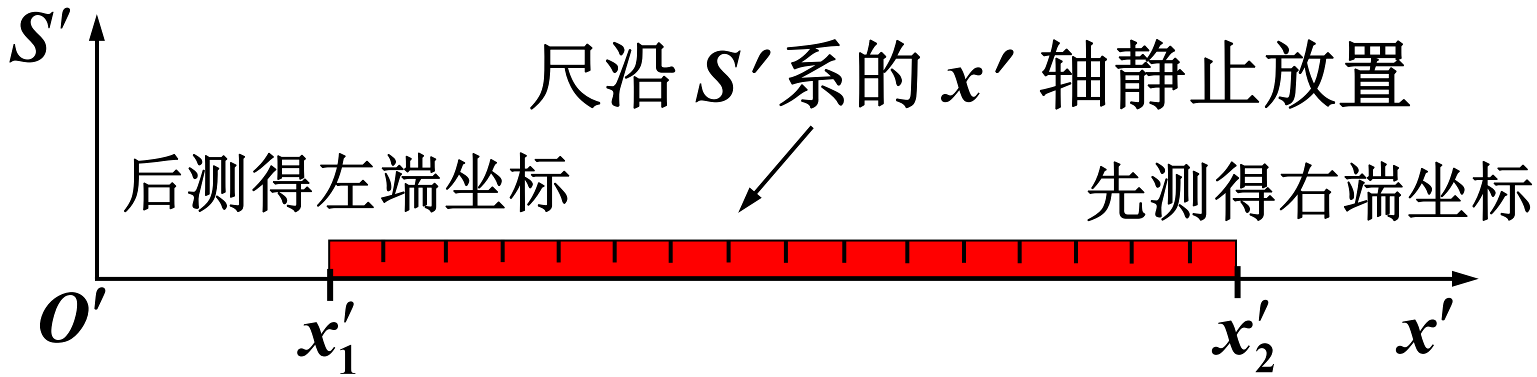


事件1：测尺左端坐标：尺左端与 x_1 标记相遇

事件2：测尺右端坐标：尺右端与 x_2 标记相遇

按要求，事件 1、2 必需同时发生：$t_1 = t_2$，其坐标差才是 S 系测得的尺的动长：$l = |x_2 - x_1|$

S'系对测量过程的理解



设在 S'系，尺左、右端坐标分别为 x_1'、x_2'

在 S'系，事件 2 先于事件 1 发生：

先测得尺右端坐标，发生在 x_2' 位置处

后测得尺左端坐标，发生在 x_1' 位置处

但和事件 1、2 先后发生的次序无关，在 S'系，

事件 1、2 的坐标差就是静长：$l' = |x_2' - x_1'|$

由洛仑兹变换 $\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$ 得：

原长－动长关系

$$\boxed{l' = \frac{l}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}}$$

— 原长最长

u 应理解成物体的速度

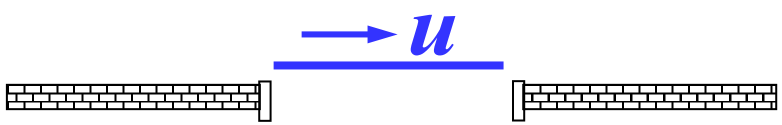
动长比原长短 — 长度收缩效应。长度收缩只沿运动方向有，垂直运动方向没有。

注意：并非运动尺的结构发生了改变，和尺相对静止的观测者是感受不到尺缩短的。

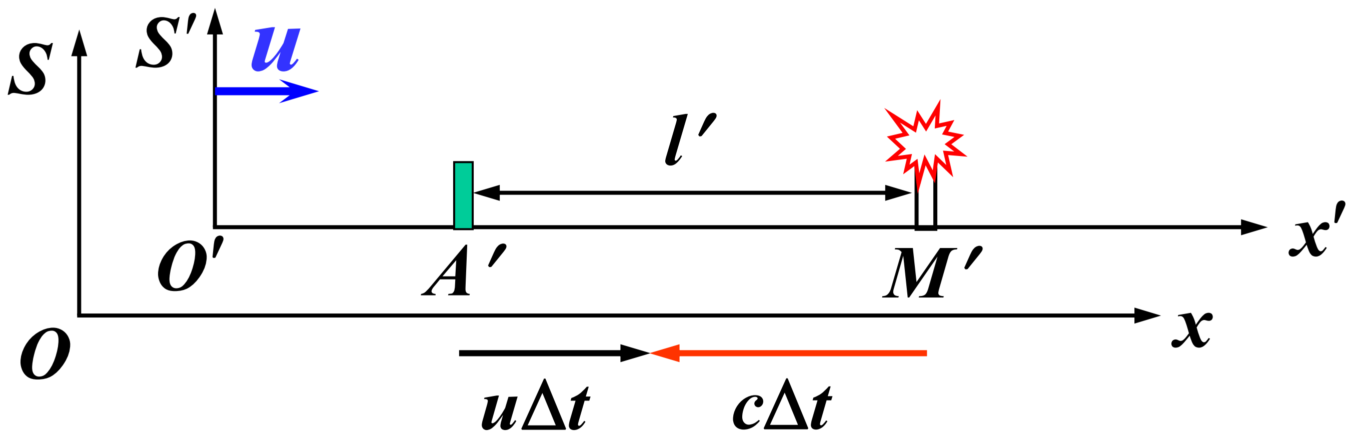
长度收缩是相对的：S 系中观测到相对 S' 系静止的尺缩短，而 S' 系中观测到相对 S 系静止的尺也会缩短。

当 $u \ll c$ 时，动长 = 原长，回到绝对空间。

【思考】一原长等于门框宽度的细杆，高速贴墙经过门框，能否将杆拉入门框内？忽略门框厚度。



【例】由运动长度收缩重解爱因斯坦火车问题



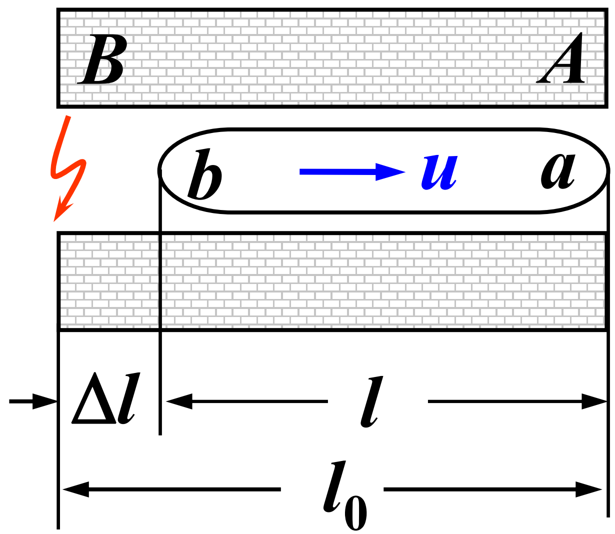
S 系中：A'向右前进 $u\Delta t$，光向左传播 $c\Delta t$：

$$u\Delta t + c\Delta t = \left| A'M' \right| \text{的动长} = \frac{l'}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{1}{c+u}\frac{l'}{\gamma} = 0.005\mathrm{s} \quad \text{（结果同前）}$$

【例】火车、隧道静长 l_0。火车以速度 u 通过隧道，地面上观测，火车前端 a 到达隧道前端 A 时，闪电正击中隧道末端 B。问：地面系和火车系观测，闪电能否在火车末端 b 留下痕迹？

地面上观测：



火车长度缩短为：$l = l_0/\gamma$

a、A相遇时，b已进入隧道：

$$\Delta l = l_0 - l = l_0(1-\frac{1}{\gamma}) > 0$$

击不中 b 。

火车上观测：

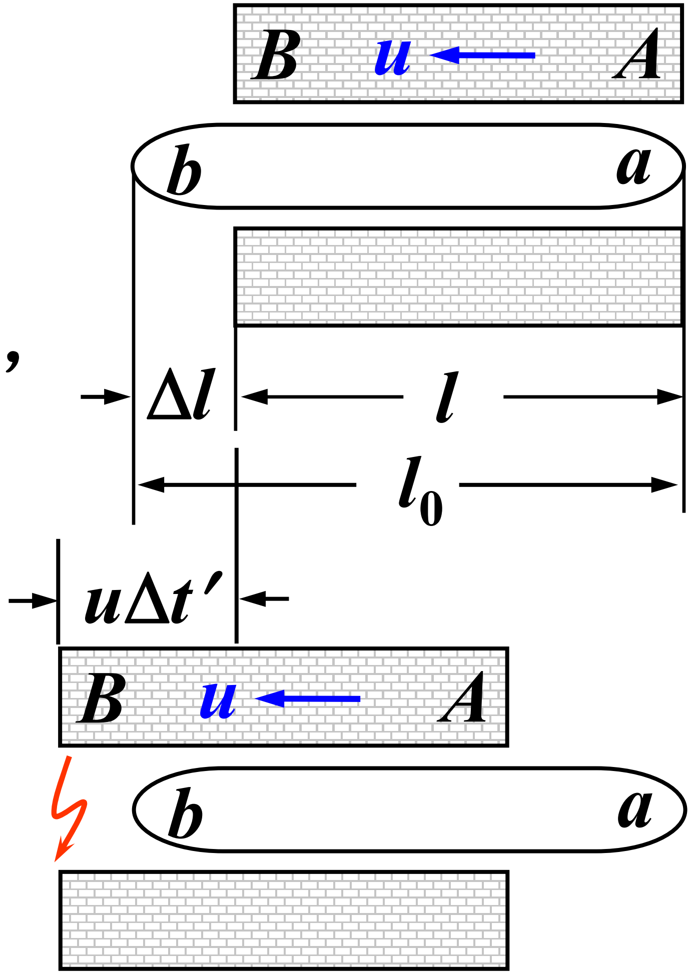
火车长 l_0，隧道长 l，a、A 相遇时，车尾在隧道外 Δl 。

a、A相遇在先，击中B在后，

落后时间：

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x)$$

$$= \gamma\frac{u}{c^2}l_0 > 0$$



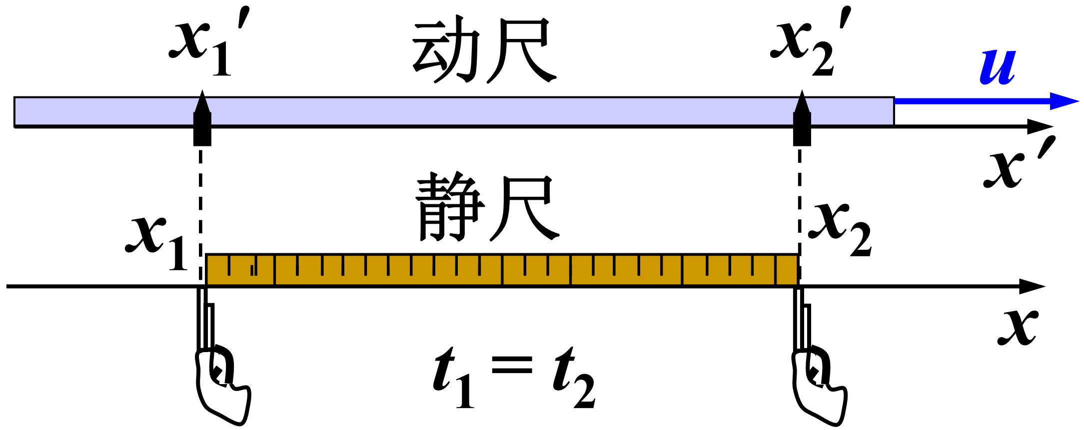
击中B时，隧道后退 $u\Delta t'$。

$$u\Delta t' - \Delta l \ = l_0(\gamma - 1) > 0$$

也击不中 b 。

【例】静尺原长 l。静尺系中两枪同时打向动尺，

问：动尺系中弹痕距离 $|x_2'-x_1'|=l$ 否？



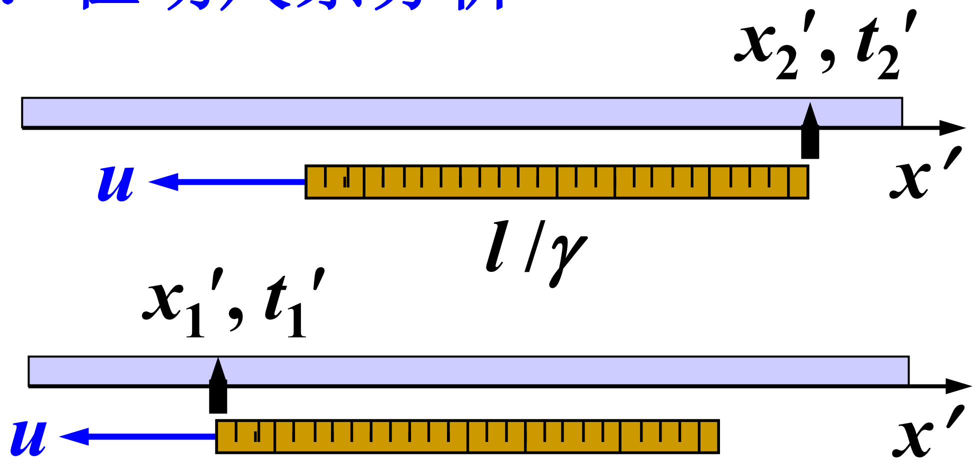
解法一：在静尺系分析

$t_2=t_1$，则 $|x_2-x_1|$ 是弹痕之间部分的动长，

$|x_2'-x_1'|$ 是弹痕之间部分的静长。

$$|x_2'-x_1'|=|x_2-x_1|\gamma=l\gamma>l$$

解法二：在动尺系分析



右弹痕比左弹痕先打出，且静尺长度缩短。

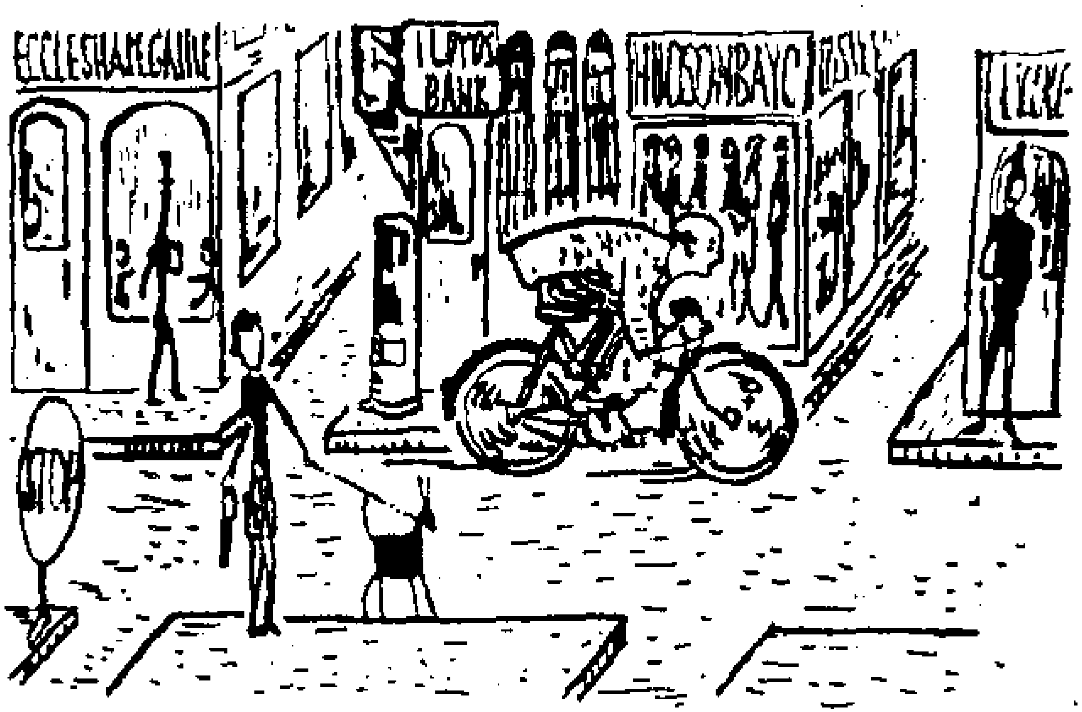
$|x_2'-x_1'|$ ＝动尺系中静尺长度（l/γ）

＋动尺系中静尺运动距离（$u|t_2'-t_1'|$）

$$x_2' - x_1' = l/\gamma + u\,|t_2' - t_1'| = l/\gamma + u\,|\gamma(\underset{0}{\underset{\parallel}{\Delta t}} - \frac{u}{c^2}\underset{l}{\underset{\parallel}{\Delta x}})|$$

$$= l\gamma$$

高速运动物体的视状



伽莫夫的科普名著《物理世界奇遇记》中描述的汤普金斯先生的奇遇：骑车在光速很小的城市，见到周围一切都变扁了。

相对论问世后几十年间物理学家普遍有这种看法。

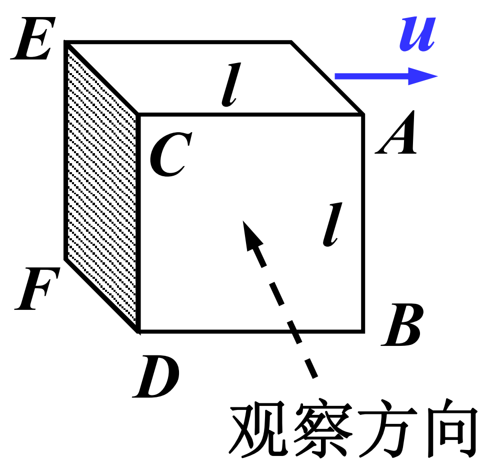
直到潘勒斯（**R. Penrose**）和特勒尔（**J. Terrell**）等人分别发表文章提醒，才纠正了这种看法。

书中描绘的是运动物体的"测量"形象，而不是"视觉"形象 — 视状。

"测量"形象：物体上各点同时刻发出的光同时刻到达测量仪器所成像。

"视觉"形象：仍然是光同时刻到达测量仪器成像。但这些发自物体上不同点的光不一定是同时刻发出的，只要同时刻到达即可。

考虑观察一个距离非常远的、相对观察方向垂直的高速运动的、边长为 l 的立方体。



观察距离很远，可认为从 A、B、C、D 各点同时刻发出的光都同时刻到达观察者的眼睛。

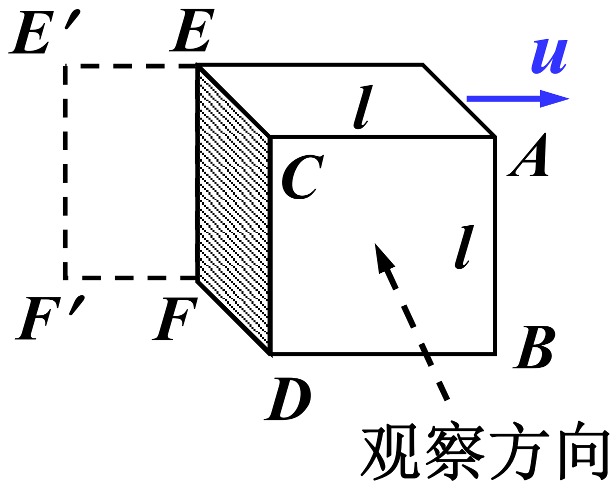
$u = 0$ 时只能看到 $ABCD$ 面。

$u \neq 0$ 时，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 缩短 $\sqrt{1-u^2/c^2}$ 倍。

而且 E、F 在之前某时刻发出的光可以和 A、B、C、D 此时刻发出的光同时刻到达观察者的眼睛。

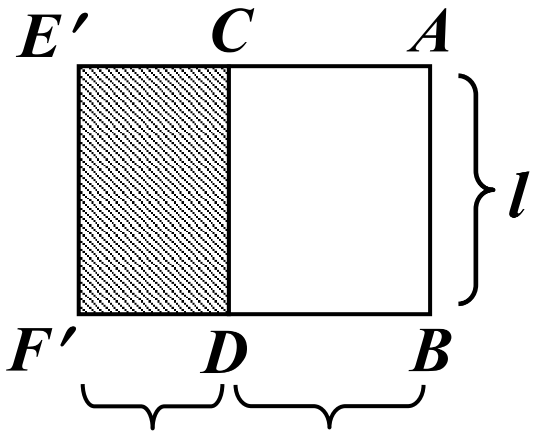
一阶近似下，只要：

$$\overline{EE'}=\overline{FF'}=\frac{l}{c}\cdot u$$



E、F 在 E'、F' 位置时发的光和$ABCD$ 面发的光就可以同时到达眼睛。

即 $CDEF$ 面和 $ABCD$ 面可同时被观察到。



$$\frac{l}{c}\cdot u \qquad l\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

注意：$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 垂直于运动方向，不缩短

这相当于立方体保持原长静止不动，绕俯视方向的轴旋转一个角度后的观察结果。

旋转角 α：

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}_{动长}}{l} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

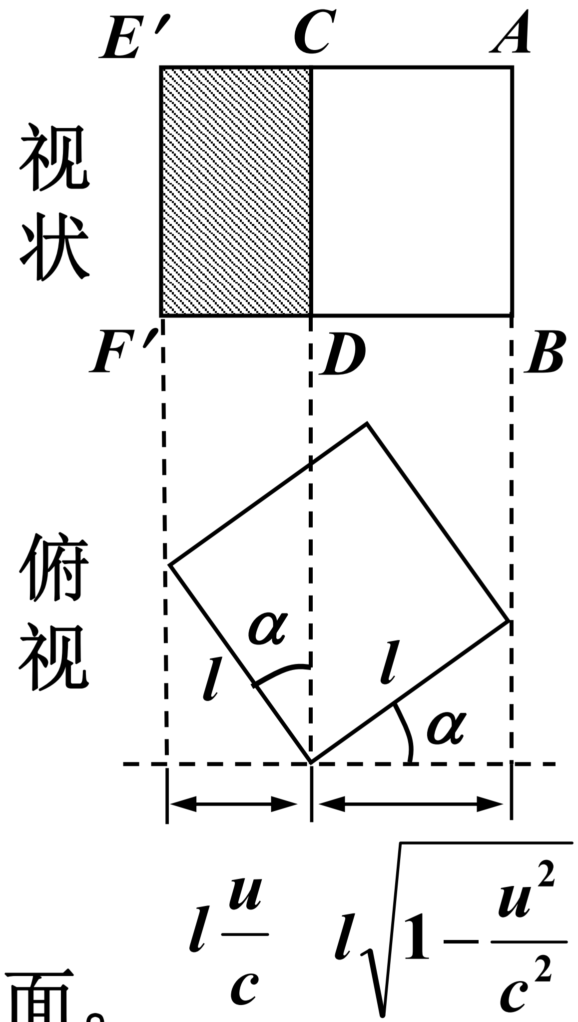
$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{u}{c}$$

能看到运动物体的后侧面，

看不到运动物体的前侧面。

$$u \to c,\ \ \alpha \to 90^{\circ}$$

物体从正前方经过只能看到后侧面。



四. 时空间隔的绝对性

两事件 P_1、P_2 的时空间隔 ΔS 定义为:

$$\Delta S=\sqrt{c^2\underline{(t_1-t_2)^2}-\underline{[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]}}$$

$$=\sqrt{c^2\Delta t^2-\Delta l^2}$$

Δt:时间间隔, Δl:空间间隔

ΔS 在洛仑兹变换下不变 — 洛仑兹不变量:

$$\Delta S=\sqrt{c^2\Delta t^2-\Delta l^2}=\Delta S'=\sqrt{c^2\Delta t'^2-\Delta l'^2}$$

$$\Delta S = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}$$

- 对光信号联系的两事件

$$\Delta l = c\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta S = 0$$

- 对同一地点的两事件

$\Delta l = 0$，Δt 是原时 τ，

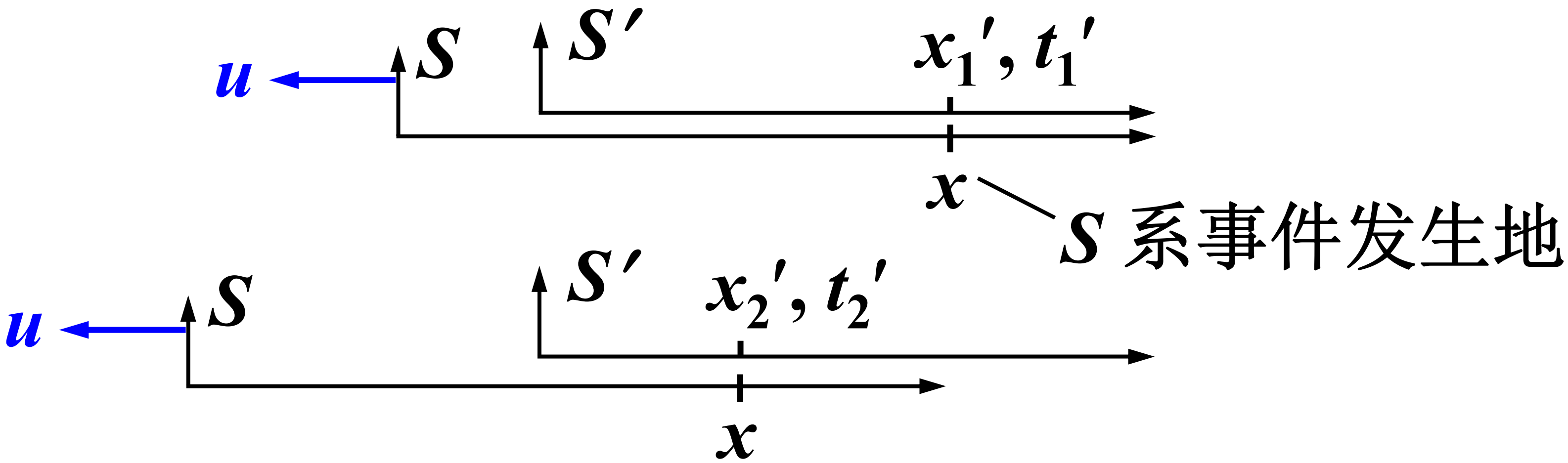
$$\therefore \quad \Delta S = c\,\tau, \qquad \tau = \Delta S / c$$

$\therefore$ 原时是洛仑兹不变量

【例】S 系同地点发生两事件，时间间隔 $\Delta t = 4\text{s}$，在 S' 系的时间间隔 $\Delta t' = 5\text{s}$。求：（1）S' 系相对 S 系速度 u；（2）S' 系中两事件的空间间隔 Δl 。

解：（1）$\Delta t = 4\text{s}$ 是原时，$\Delta t = \Delta t' / \gamma \Rightarrow u = 3c/5$

（2）在 S' 系观测结果：



$$\Delta l = |x_2' - x_1'| = |u\Delta t'| = 3c \cdot \text{s}$$

也可由间隔不变性求：

$$c^2\Delta t_{21}'^2 - \Delta x_{21}'^2 = c^2\Delta t_{21}^2 - \Delta x_{21}^2 \quad = c^2\Delta t_{21}^2$$

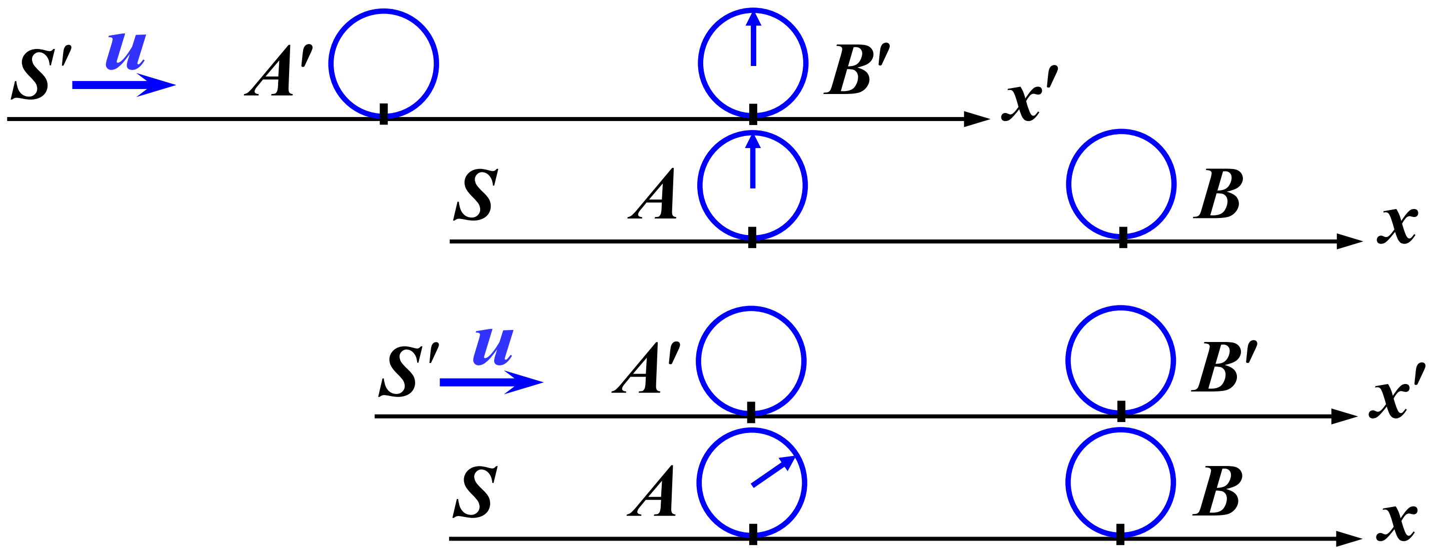
$$|x_2' - x_1'| = \Delta x_{21}' = c\sqrt{\Delta t_{21}'^2 - \Delta t_{21}^2} = 3c\cdot\mathrm{s}$$

也可由洛仑兹变换求：

$$\left|x_2' - x_1'\right| = \left|\frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right| = \left|\frac{0 - \frac{3}{5}c\cdot 4\,\mathrm{s}}{\sqrt{1-(3/5)^2}}\right| = 3c\cdot\mathrm{s}$$

S 系同地　　S'系速度

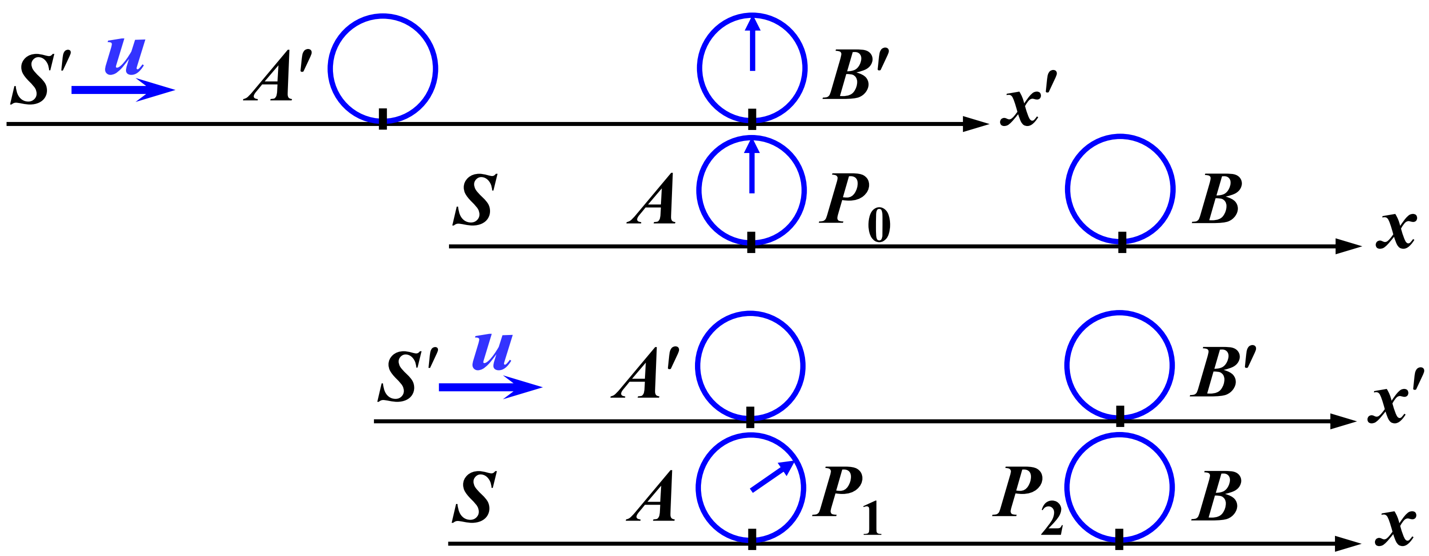
【例】惯性系 S'相对 S 以速度 $u = 0.6c$ 运动。各系内配置两个同步的钟 A, B 和 A', B'。S 系中测量：A、B'相遇时，A、B' 均指零；A、A' 相遇时，A 指 2:00，且此时 B、B'也恰好相遇。



求：（1）A、A'相遇时，A' 指示；

（2）B、B'相遇时，此两钟指示。

解：



P_0：A、B'相遇，(x_0, t_0)，(x_0', t_0')

P_1：A、A'相遇，(x_1, t_1)，(x_1', t_1')　　求 t_1'，t_2，t_2'

P_2：B、B'相遇，(x_2, t_2)，(x_2', t_2')

$$\gamma = 1.25,\quad t_0 = t_0' = 0:00,\quad t_1 = t_2 = 2:00$$

$$\Delta t_{10} = 2\,\mathrm{h},\ \Delta x_{10} = 0,\ \Delta x_{20}' = 0,\ \Delta t_{21} = 0,\ \Delta t_{20} = 2\,\mathrm{h}$$

（1）由洛伦兹变换：

$$\Delta t'_{10} = \gamma(\Delta t_{10} - \frac{u}{c^2}\Delta x_{10}) = \gamma\Delta t_{10} = 2.5\,\text{h}$$

$$t'_1 = t'_0 + \Delta t'_{10} = 0 + 2.5\,\text{h} = 2:30$$

A、*A′*相遇时 *A′* 指示 2:30

（2）由洛伦兹变换：$\Delta t_{20} = \gamma(\Delta t'_{20} + \frac{u}{c^2}\Delta x'_{20}) = \gamma\Delta t'_{20}$

$$\Delta t'_{20} = \Delta t_{20}/\gamma = 1.6\,\text{h}$$

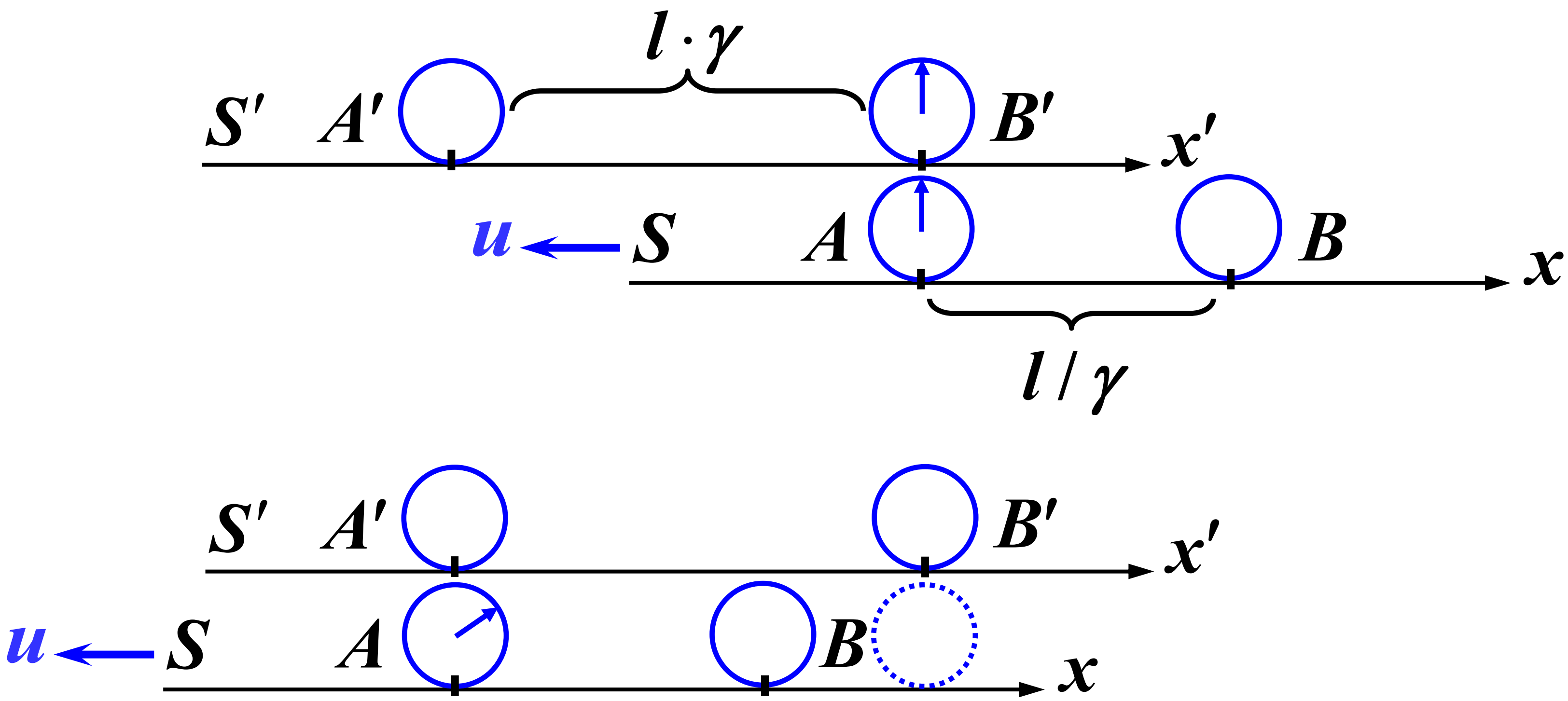
$$t'_2 = t'_0 + \Delta t'_{20} = 0 + 1.6\,\text{h} = 1:36$$

B、*B′*相遇时，*B* 指示 2:00，*B′* 指示 1:36

另法：在 S' 系中用动长、静长，原时、测时求解

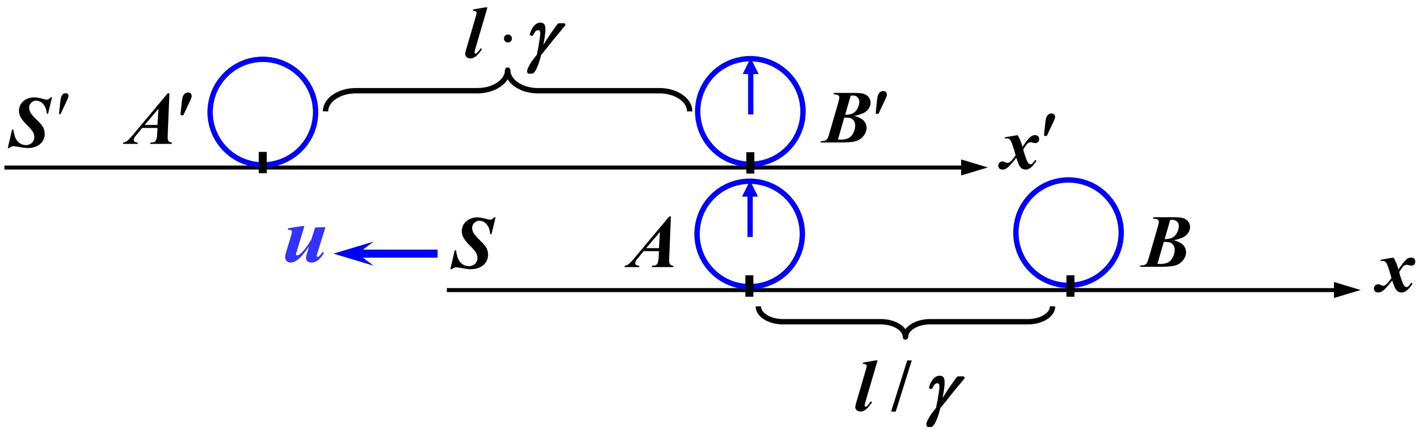
设 S 系中 AB 之间距离为 l：$l = 2h \cdot u$

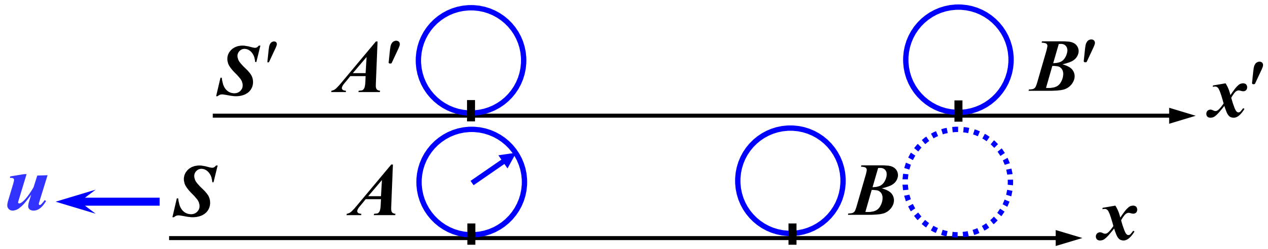
S' 系中观测如下：



A、A' 相遇时，B、B' 已经相遇过了。

（1）



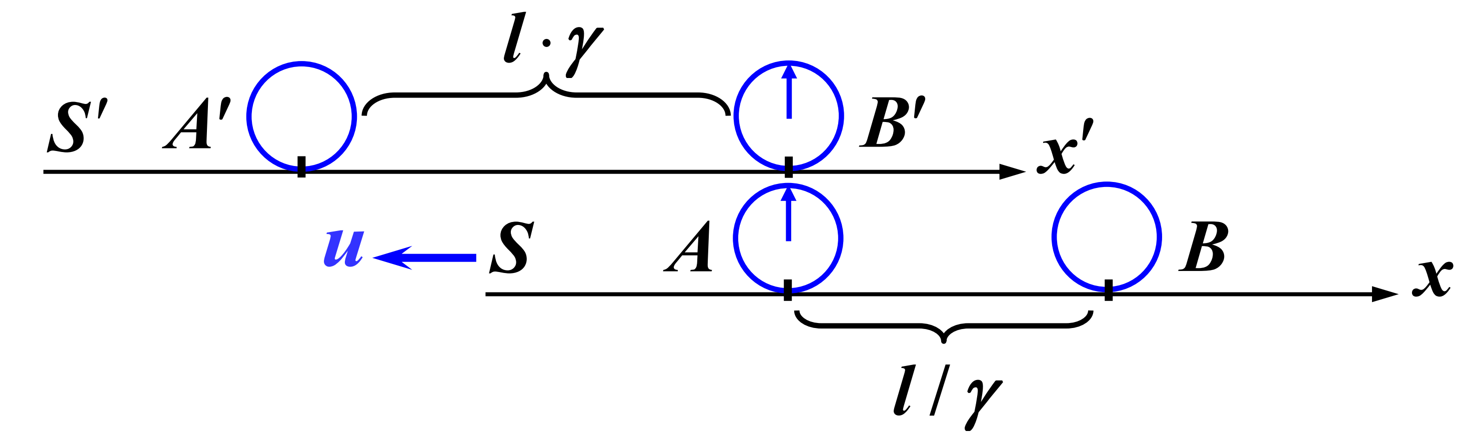


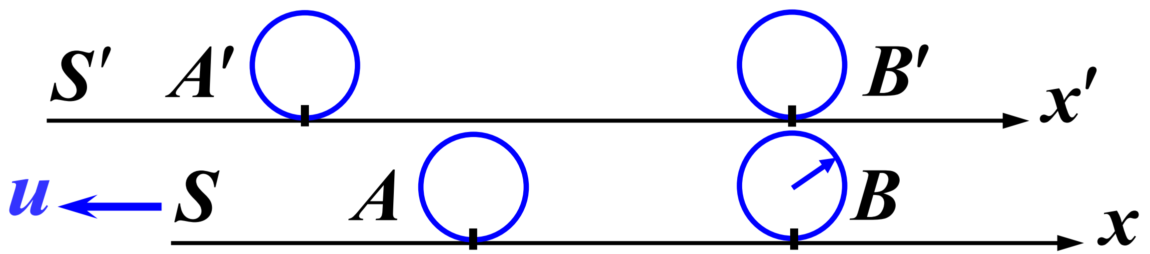
A、A'相遇比 A、B'相遇晚： $\dfrac{l\cdot\gamma}{u}=2\mathrm{h}\cdot\gamma=2.5\,\mathrm{h}$

A、B'相遇时 B' 指示 0:00，则：

A、A'相遇时 A' 指示 2:30

（2）

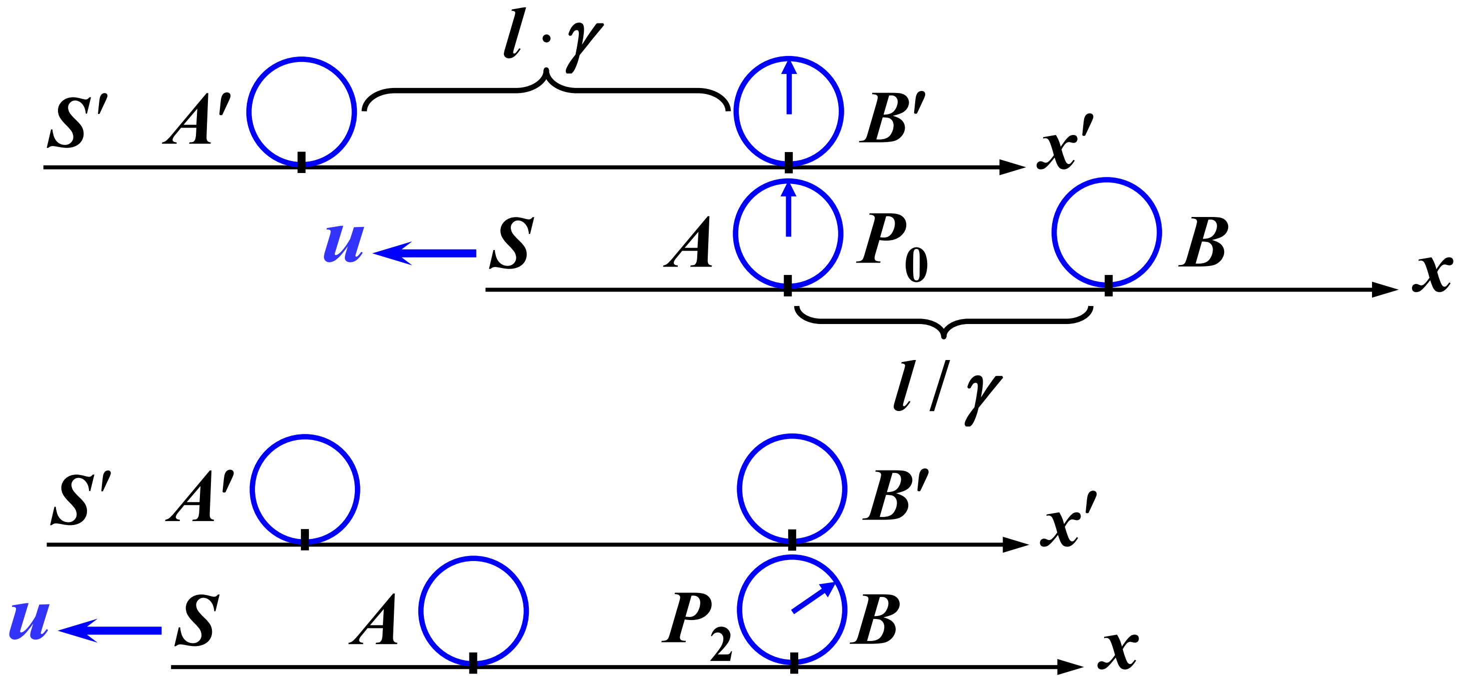




B、B'相遇比 A、B'相遇晚： $\dfrac{l/\gamma}{u} = 2\text{h}/\gamma = 1.6\,\text{h}$

A、B'相遇时 B' 指示 0:00，则：

B、B'相遇时 B' 指示 1:36



实际上 B、B'相遇和 A、B'相遇都在 B'处发生，

故 $\Delta t'_{20}$ 是原时，Δt_{20} 是测时：$\Delta t'_{20} = \Delta t_{20}/\gamma = 1.6\mathrm{h}$

A、B'相遇时 B' 指示 0:00，则：

B、B'相遇时 B' 指示 1:36

五. 因果关系的绝对性、时序的相对性

两事件 P_1、P_2 在 S 和 S' 系的时间关系：

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x) = \gamma \cdot \Delta t(1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t})$$

若 P_1 是因，P_2 是果，则 $\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq c$ ，

$\Rightarrow$ $\Delta t'$ 和 Δt 同号

$\therefore$ 洛仑兹变换不改变有因果关系事件的时序

— 因果关系的绝对性

若 P_1、P_2 为相互独立事件，则可能 $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} > c$，

洛仑兹变换可使时序颠倒，这不违背因果律，

— 时序的相对性

六. 相对论时空结构

时空间隔 ΔS 对两事件之间关系有什么影响？

为方便，设空间为二维，两事件时空坐标分别为：

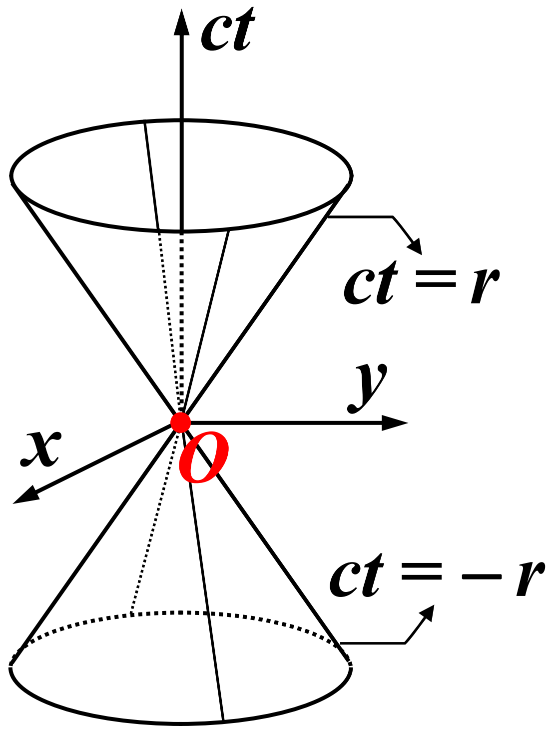
$P\,(x, y, t)$ 和 $O\,(0, 0, 0)$

时空间隔为：

$$(\Delta S)^2 = (ct)^2 - r^2,\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

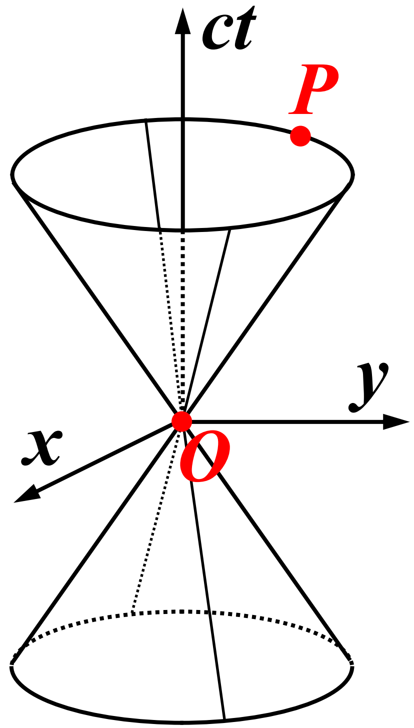
满足 $\Delta S = 0$ 的点形成以 O 为顶点的锥面 — 光锥面，绕时间轴旋转对称，方程为：

$$ct = \pm r$$



1. 类光间隔 $(\Delta S)^2 = 0$

P 位于光锥面上，若事件 ***P*** 和 ***O*** 有联系，只能通过光信号联系。



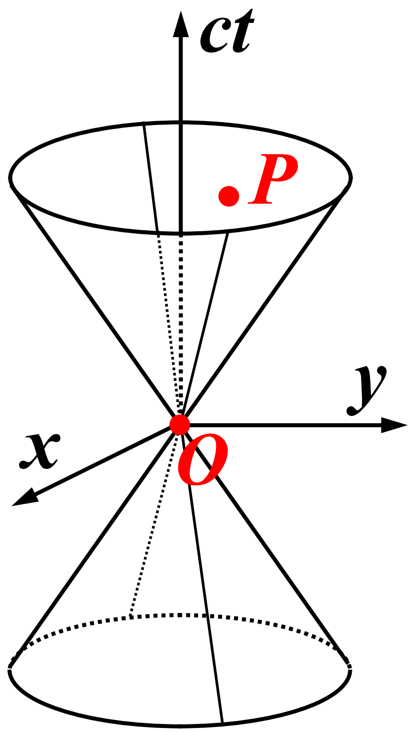
有联系时：

若 ***P*** 在上半光锥面上，则事件 ***P*** 是 ***O*** 的绝对未来，

若 ***P*** 在下半光锥面上，则事件 ***P*** 是 ***O*** 的绝对过去。

2. 类时间隔 $(\Delta S)^2 > 0$

P 位于光锥面内，若事件 *P* 和 *O* 有联系，则只能通过低于光速的作用联系：$(v_s t)^2 = r^2 < (ct)^2$，v_s 是作用传播的速度。



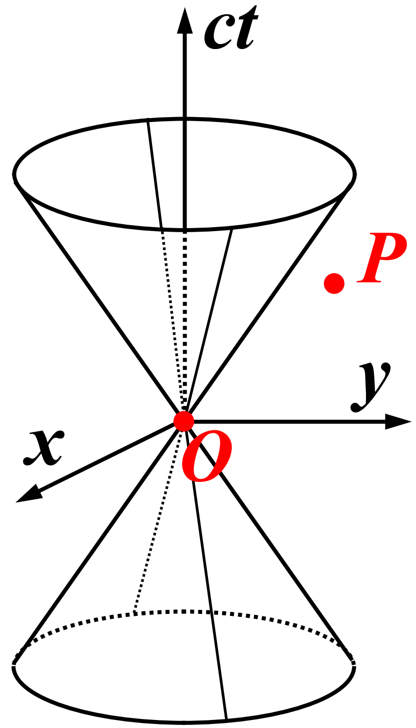
有联系时：

若 *P* 在上半光锥面内，则事件 *P* 是 *O* 的绝对未来，

若 *P* 在下半光锥面内，则事件 *P* 是 *O* 的绝对过去。

3. 类空间隔 $(\Delta S)^2 < 0$

P 位于光锥面外，若事件 P 和 O 有联系，则只能通过高于光速的作用联系：$(v_s t)^2 = r^2 > (ct)^2$，但这与目前实验矛盾，故不可能。



因此具有类空间隔特征的两事件是绝对异地的，独立的，不具有任何因果关系。

4. 相对论时空结构与因果律的关系

- 间隔 ΔS 是洛仑兹不变量，即不随惯性系的选择而变化（是相对性原理和光速不变原理的要求与体现），因此间隔划分是绝对的。
- 间隔的划分决定了事件 P 可处于 3 个区域：

  O 的上半光锥面内（包括锥面）

  O 的下半光锥面内（包括锥面）

  O 的光锥面外

各区域相对于洛仑兹变换是不连通的，洛仑兹变换（或惯性系的改变）不会改变事件 P 所属的时空区域。

- 狭义相对性原理所导致的相对论时空观，必需符合因果律，即具有绝对因果关系的两事件，发生的时序在洛仑兹变换下（或惯性系的改变）不可颠倒，这由时空区域的不连通性完全保证。

事件 P 与 O 具有绝对因果关系的必要条件：

P 位于 O 的上半光锥面内（包括锥面），

或位于 O 的下半光锥面内（包括锥面）。

5. 重新理解同时的相对性

异地同时发生的两事件具有类空间隔属性：

$$(\Delta S)^2 = -r^2 < 0$$

因此是完全独立的，不可能通过某种作用使二者建立联系而具有绝对因果关系（作用的传播速度不能超过光速）。

因此在洛仑兹变换下（或惯性系的改变）两事件的时序可以任意改变，时序失去了绝对意义，从而同时性只有相对意义。

§ 10.6 相对论速度和加速度变换

设同一质点在 S 和 S' 中速度分别为 $\vec{v}$ 和 $\vec{v}'$

由洛仑兹坐标变换

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}=\frac{v_x-u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},\quad \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}=\frac{1-\frac{u}{c^2}v_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

两式之比

$$v'_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{u}{c^2}v_x}$$

由洛仑兹坐标变换

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t'} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}}, \quad \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{1-\dfrac{u}{c^2}v_x}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

由上面两式

$$v'_y = \frac{v_y}{1-\dfrac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

同理

$$v'_z = \frac{v_z}{1-\dfrac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

洛仑兹速度变换式

正变换

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

逆变换

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

一维运动情况 — 速度沿 x 方向

令 $v_y = v_z = 0$， 则 $v'_y = v'_z = 0$

设 $v = v_x$， $v' = v'_x$

$$\boxed{v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2} v}}$$

$$\boxed{v = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'}}$$

说明：

1. $u << c$ 时过渡到伽利略速度变换：

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

2. 不可能通过参考系变换达到超光速。

由速度变换可得到：

$$v'^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 = c^2\left[1 - \frac{(1-\frac{u^2}{c^2})(1-\frac{v^2}{c^2})}{(1-\frac{uv_x}{c^2})^2}\right]$$

$v = c$ 则 $v' = c$， $v < c$ 则 $v' < c$

【例1】设想飞船以 $0.80c$ 的速度在地球上空飞行，现从飞船上沿速度方向抛出一物体，物体相对飞船速度为 $0.90c$ 。

求：地面上测量，物体速度多大?

解：选飞船为 S' 系，地面为 S 系，

由一维运动的速度变换关系得：

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'} = \frac{0.90c + 0.80c}{1 + \frac{0.80c}{c^2} \times 0.90c} = 0.99c$$

【例2】S'系中一束光沿y'轴传播，S'系相对S系以$0.8c$的速度沿x方向运动。

求：S系中的光速。

解：根据已知条件：

$$u = 0.8c,\quad v'_x = 0,\quad v'_y = c,\quad v'_z = 0$$

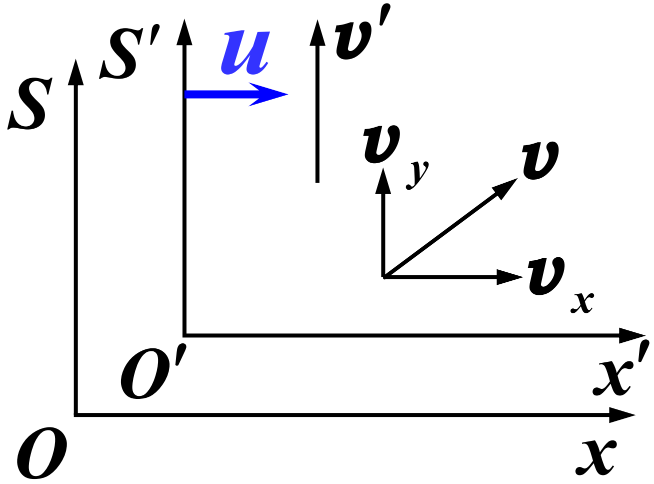
由速度的逆变换得：

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \dfrac{u}{c^2} v'_x} = u = 0.8c$$

$$v_y = \frac{v'_y}{1+\frac{u}{c^2}v'_x}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 0.6c$$

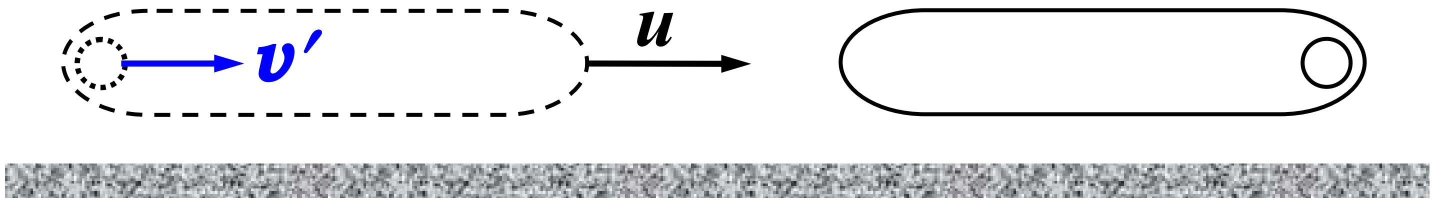
$$v_z = \frac{v'_z}{1+\frac{u}{c^2}v'_x}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 0$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = c$$



光速不变是指在不同参考系，光的传播速率不变，并非光的传播方向不变！

【例3】飞船静长 L'，以速度 u 相对地面匀速运动。小球从飞船后端运动到飞船前端，小球相对飞船的速度为 v'。



求：（1）飞船系测得的小球飞行时间 $\Delta t'$

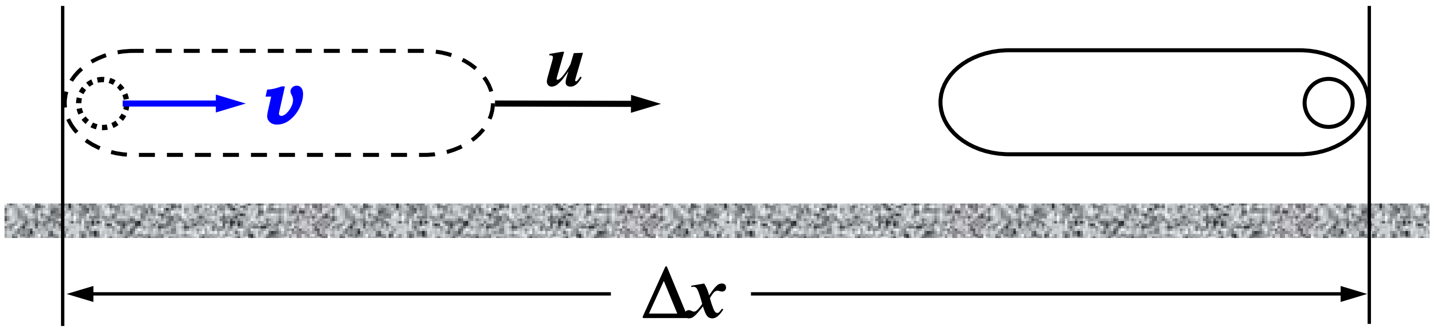
（2）地面系测得的小球飞行时间 Δt

解：（1） $$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{v'} = \frac{L'}{v'}$$

（2） 解法一： 洛仑兹时间变换

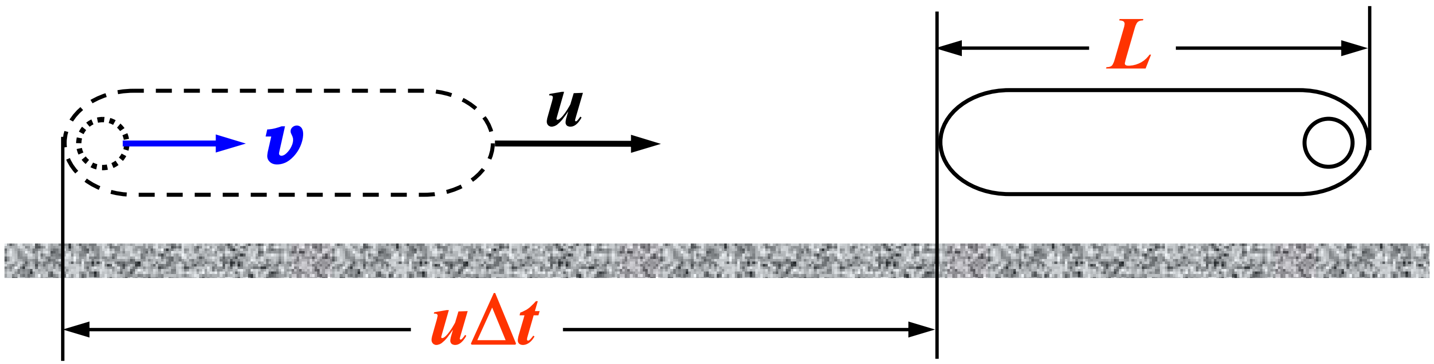
$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x') = \gamma(\frac{L'}{v'} + \frac{u}{c^2}L') = \gamma L'(\frac{1}{v'} + \frac{u}{c^2})$$

解法二： 洛仑兹坐标变换和速度变换



$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \gamma(\Delta x' + u\Delta t') \\ v &= \frac{v' + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'} \end{aligned}\right\} \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \gamma L'(\frac{1}{v'} + \frac{u}{c^2})$$

解法三： 用动长和速度变换



地面系飞船长度： $L = L'/\gamma$

在此处键入文本

地面系小球运动距离： $v\Delta t = u\Delta t + L$

地面系小球速度： $v = \dfrac{v' + u}{1 + uv'/c^2}$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \gamma L'\left(\frac{1}{v'} + \frac{u}{c^2}\right)$$

【例4】地面上同时发现飞船和彗星，相对地面分别以 0.6c、0.8c 速度相对飞行。地面上观测，再过 5 秒钟两者会相撞。求：在飞船上观测，（1）彗星速度大小；（2）飞船一经发现就得到地面警示，则此后多少时间飞船会和彗星相撞？

解：（1）飞船系测得彗星速度：

$$v' = \frac{v-u}{1-\frac{u}{c^2}v} = \frac{-0.8c-0.6c}{1+\frac{0.6c}{c^2}\times 0.8c} \approx -0.946c$$

（2）飞船上观测再经过多长时间相撞？

事件 P_1： 飞船被地面发现并得到警示

事件 P_2： 飞船与彗星相撞

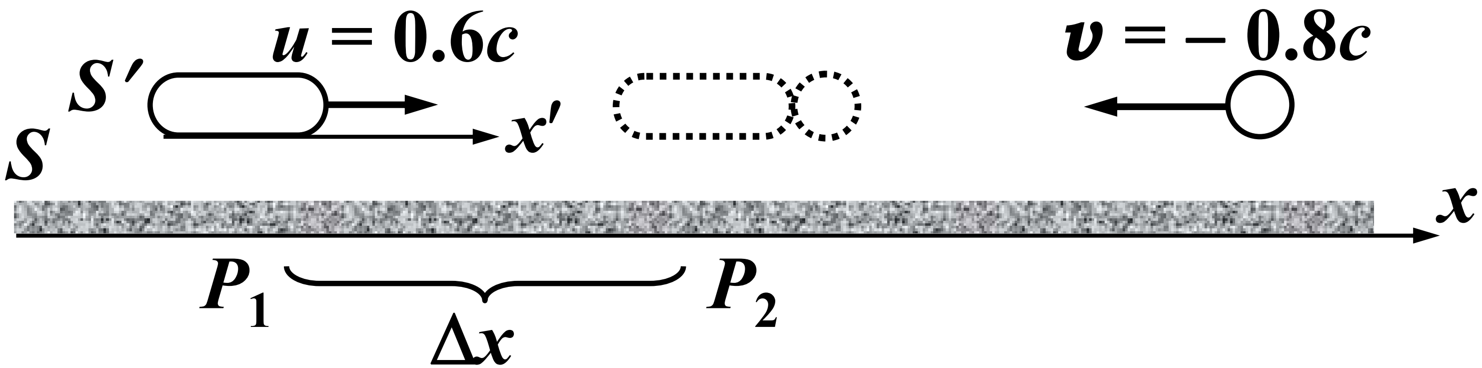
事件 P_3： 彗星被地面发现

解法一： 利用原时和测时的关系

飞船测P_1P_2时间间隔是原时$\Delta t'$，地面测是测时Δt:

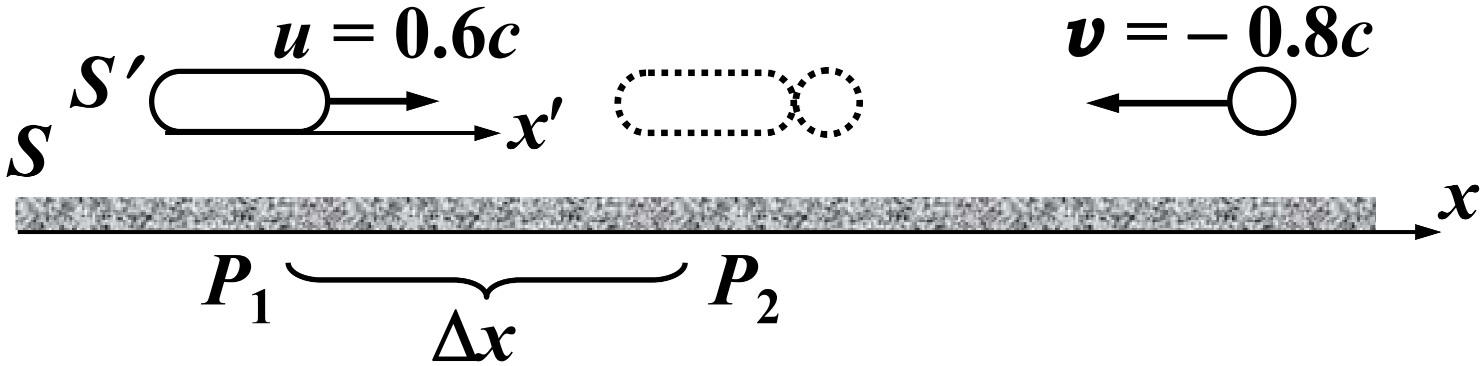
$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-u^2/c^2} = 5\sqrt{1-(0.6c/c)^2} = 4\text{s}$$

解法二： 利用洛仑兹变换



$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \dfrac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{5-\dfrac{0.6c}{c^2}\times 0.6c\times 5}{\sqrt{1-(0.6c/c)^2}} = 4\,\text{s}$$

解法三： 利用间隔不变性



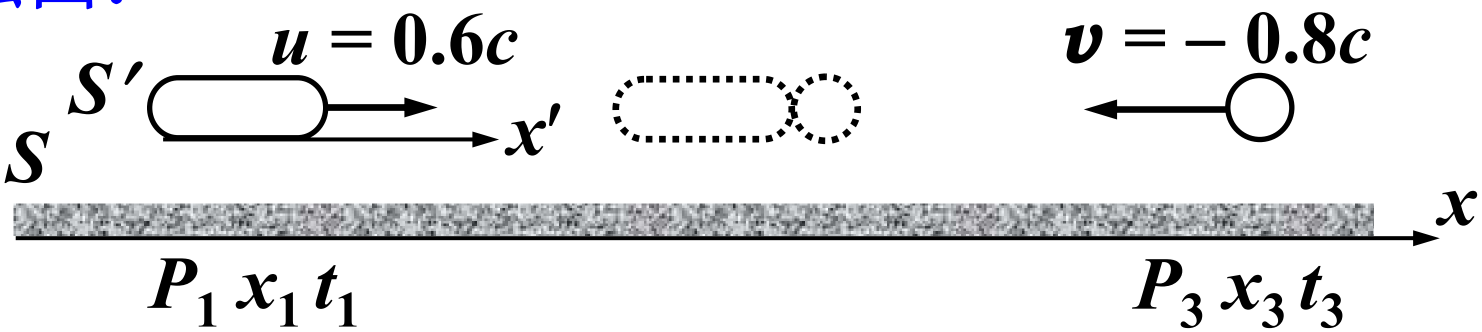
地面系 S： $\Delta t = 5\text{s}$， $\Delta x = u\Delta t$

飞船系S'： $\Delta t'$未知， $\Delta x' = 0$

$$(c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t' = 4\,\text{s}$$

解法四：



地面系，P_1、P_3 同时发生：

$$\Delta t_{31} = 0$$

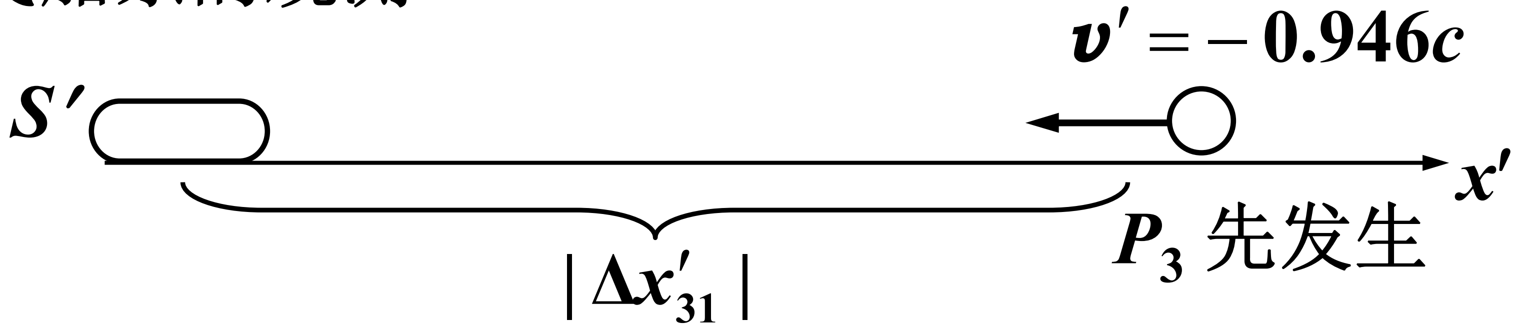
$$\Delta x_{31} = x_3 - x_1 = (0.6c + 0.8c)\cdot 5\,\mathrm{s} = 7c\cdot\mathrm{s}$$

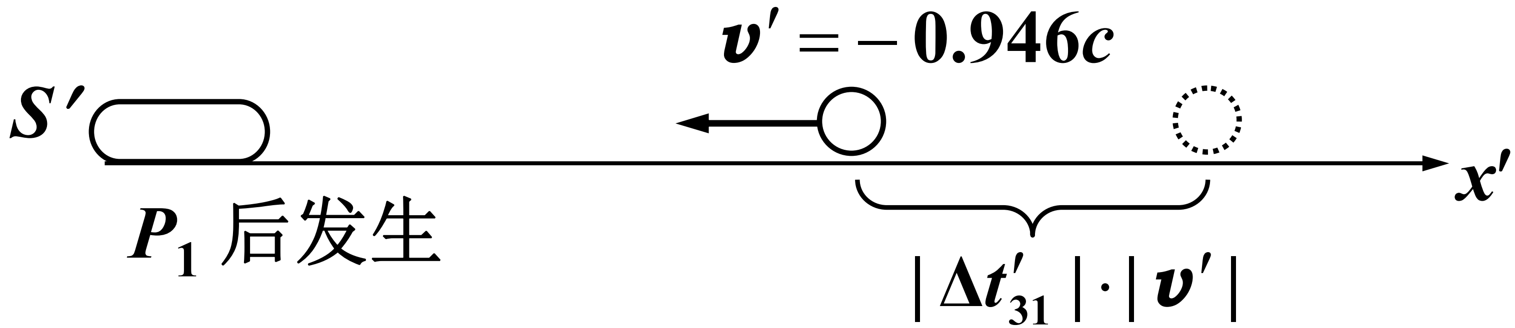
飞船系，P_3 先于 P_1 发生：

$$\Delta t'_{31} = \gamma(\Delta t_{31} - \frac{u}{c^2}\Delta x_{31}) = -\gamma\frac{u}{c^2}\Delta x_{31} = -5.25\,\mathrm{s}$$

$$\Delta x'_{31} = \gamma(\Delta x_{31} - u\Delta t_{31}) = \gamma\Delta x_{31} = 8.75c\cdot\mathrm{s}$$

飞船系的观测





飞船得到警示时与彗星距离：

$$|\Delta x'_{31}| - |\Delta t'_{31}| \cdot |v'|$$

$$\Delta t' = (|\Delta x'_{31}| - |\Delta t'_{31}| \cdot |v'|) / |v'| = 4\mathrm{s}$$

加速度变换式

利用速度、时间的变换，可得加速度变换：

$$a'_x = \frac{(1-u^2/c^2)^{3/2}}{(1-u\boldsymbol{v}_x/c^2)^3} a_x$$

$$a'_y = \frac{(1-u^2/c^2)}{(1-u\boldsymbol{v}_x/c^2)^3}[a_y + \frac{u}{c^2}(a_x\boldsymbol{v}_y - a_y\boldsymbol{v}_x)]$$

$$a'_z = \frac{(1-u^2/c^2)}{(1-u\boldsymbol{v}_x/c^2)^3}[a_z + \frac{u}{c^2}(a_x\boldsymbol{v}_z - a_z\boldsymbol{v}_x)]$$

$\vec{a}'$和 $\vec{a}$、$\vec{\boldsymbol{v}}$ 都有关。

§ 10.7 相对论质量和动量

基本的守恒定律是定义物理量的依据，相对论动力学是在保留动量、能量、质量等守恒定律的基础上建立起来的。

基本出发点：

1. 根据相对性原理的要求，基本规律（守恒定律、动力学方程）要求在洛仑兹变换下（在不同的惯性系）保持形式不变。

2. 当 $v << c$ 时，能够过渡到牛顿力学。

为使动量守恒定律成立，保留力的定义：

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} \qquad (1)$$

同时保留动量定义：

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

为保证动量守恒定律在洛仑兹变换下保持形式不变，质量必须与运动有关：

$$m = m(v) \qquad (2)$$

(2) 式也是 (1) 式的要求：m 若不变，物体速度可超过 c，故需 (2) 式，且 m 随 v 而增大。

一. 相对论质量

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

m_0 — 静止质量

m — 运动质量、相对论质量

二. 相对论动量

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$v \ll c$ 时，过渡到牛顿力学。

§ 10.8 相对论动力学方程

一. 动力学方程

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}=m\vec{a}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}}$$

二. 力和加速度的关系

$$\vec{F}=m\vec{a}+\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m(a_n\vec{e}_n+a_t\vec{e}_t)+v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t$$

$$F_n=ma_n=\frac{m_0}{(1-\dfrac{v^2}{c^2})^{1/2}}a_n$$

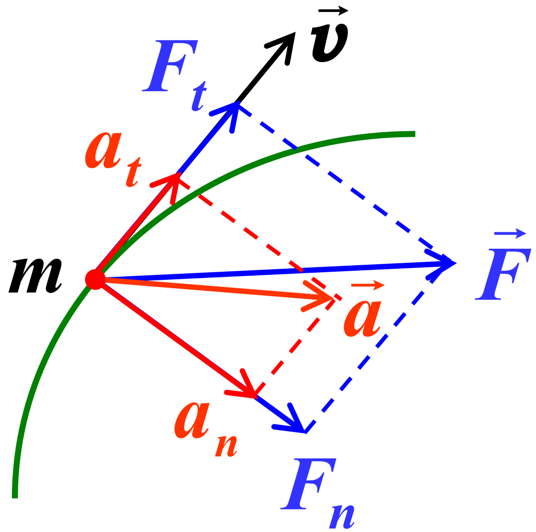
$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\mathrm{d}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}\right)\Big/\mathrm{d}t=m_0\frac{1}{(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2})^{3/2}}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$a_t=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$F_t=ma_t+\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{m_0}{(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2})^{3/2}}a_t$$

$$F_n = ma_n = \frac{m_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}} a_n$$

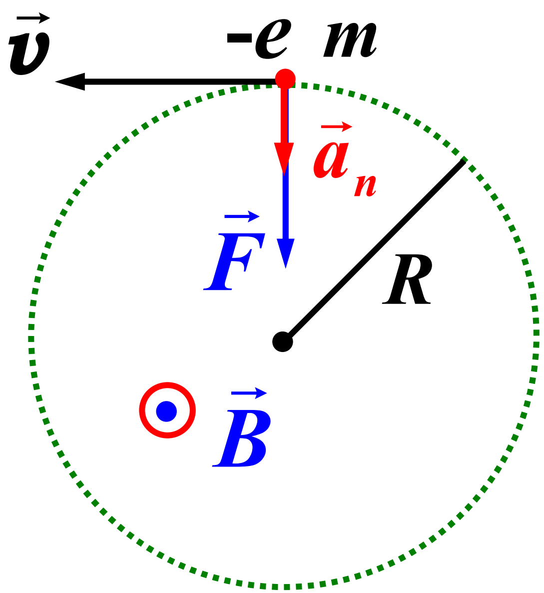
$$F_t = \frac{m_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} a_t$$



- 加速度和力不平行
- 速度越大，加速越困难
- 切向比法向加速困难

- $\boldsymbol{v} \ll c$ 时，$\vec{F} = m_0 \vec{a}$ ，过渡到牛顿力学。
- $\vec{v} \perp \vec{F}$ 时，$\vec{F} = m \vec{a}_n$

高速电子在磁场约束下的圆周运动：



$$F = e v B = m \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{m v}{eB} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{m_0 v}{eB}$$

§ 10.9 相对论能量

一. 相对论动能

相对论中保留动能定理:

对质点: $\mathrm{d}E_k = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$= \mathrm{d}(m\vec{v})\cdot\vec{v} = (m\,\mathrm{d}\vec{v} + \vec{v}\,\mathrm{d}m)\cdot\vec{v}$$

$$= mv\,\mathrm{d}v + v^2\,\mathrm{d}m$$

由 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ 可证:

$$mv\,\mathrm{d}v = c^2\,\mathrm{d}m - v^2\,\mathrm{d}m$$

$$\therefore \ \mathrm{d}E_k = c^2\,\mathrm{d}m \quad \Rightarrow \quad E_k = \int_{m_0}^{m} c^2\,\mathrm{d}m$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0c^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)m_0c^2 \end{aligned}}$$

$v << c$ 时，过渡到牛顿力学情形：

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}, \qquad E_k \approx \frac{1}{2}m_0v^2 << m_0c^2$$

注意： $\vec{p}=m\vec{v}$ 是相对论动量，

但 $\frac{1}{2}mv^2$ 不是相对论动能！

二. 质能关系

对 $E_k=mc^2-m_0c^2$ 爱因斯坦认为：

$\boxed{E_0=m_0c^2}$ — 静止能量

$\boxed{E=mc^2=E_k+m_0c^2}$ — 总能

$\boxed{E=mc^2}$ — 质能关系

相对论统一了质量和能量守恒。

孤立系统：$\Delta E = \Delta E_k + \Delta(m_0 c^2) = 0$

$$\therefore \quad \Delta E_k = (-\Delta m_0)c^2$$

$-\Delta m_0$ 称为质量亏损，一般就用 Δm_0 表示。

由独立质点组成的系统，反应前后的 Δm_0：

$$\boxed{\Delta m_0 = \sum m_{0i\text{初}} - \sum m_{0i\text{末}}}$$

【例】热核反应：${}_1^2\mathrm{H} + {}_1^3\mathrm{H} \rightarrow {}_2^4\mathrm{He} + {}_0^1\mathrm{n}$

$$\Delta m_0 = (m_\mathrm{D} + m_\mathrm{T}) - (m_\mathrm{He} + m_\mathrm{n}) = 0.0311 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

释放能量：$\Delta E = \Delta m_0 c^2 = 2.799 \times 10^{-12}\ \mathrm{J}$

1kg 核燃料释放能量 $\approx 3.35\times 10^{14}$ J，相当于

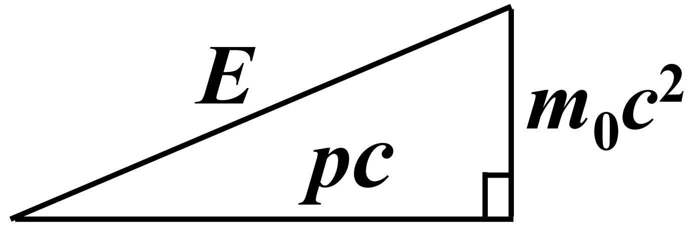
1kg 优质煤燃烧热 $\approx 2.93\times 10^{7}$ J 的 1千万倍！

质能关系 $E=mc^2$ 的提出开创了原子能时代。

三. 能量 — 动量关系

$$\left.\begin{aligned} &E = mc^2 \\ &m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &p = mv \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4}$$



四. 动能 — 动量关系

由 $E = E_k + m_0c^2$，　$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$ 得

$$\boxed{E_k^2 + 2E_k \cdot m_0c^2 = p^2c^2}$$

$\upsilon << c$ 时，过渡到牛顿力学情形：

前面已得到 $\upsilon << c$ 时：$E_k << m_0c^2$，

$$\therefore\ 2E_km_0c^2 \approx p^2c^2 \Rightarrow E_k \approx \frac{p^2}{2m_0}$$

回到了牛顿力学的动能 — 动量关系。

五. 关于光子的一些重要关系

静止质量： $m_0 = 0 \quad (\because v = c)$

总能： $E = mc^2 = (mc)c = pc$

动能： $E_k = E = mc^2 = pc$

根据爱因斯坦光子理论：

$$E = h\nu \quad （\nu\text{是光子频率}）$$

$$\therefore \quad p = \frac{h\nu}{c}, \quad m = \frac{h\nu}{c^2}$$

六. 2 个极端情况

1. 非相对论极限 — 牛顿的情况

$$v \ll c\ ,\quad m \approx m_0\ ,\quad p \approx m_0 v$$

$$E_k \approx \frac{p^2}{2m_0} = \frac{1}{2} m_0 v^2 \ll m_0 c^2 \approx E$$

2. 极端相对论情况 — 高能粒子

$$\left.\begin{aligned} & v \sim c\ ,\quad p \approx mc \\ & E_k \approx E \approx pc \approx mc^2 \gg m_0 c^2 \end{aligned}\right\} \text{和光子的相应关系类似}$$

【例】两全同粒子，静止质量为 m_0，以相等速率 v 对撞，碰后复合。

求：复合粒子的速度和质量。

解：设碰前质量 m，碰后质量 M，速度 V，

动量守恒： $0 = MV \Rightarrow V = 0$

$$\therefore \quad M = M_0$$

能量守恒： $2mc^2 = Mc^2 \Rightarrow M_0 = \dfrac{2m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

动能损失 $\Rightarrow$ 静止质量（静能）

§ 10.10 相对论动量 — 能量变换

由 $\vec{p}' = \dfrac{m_0 \vec{v}'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$， $E' = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$

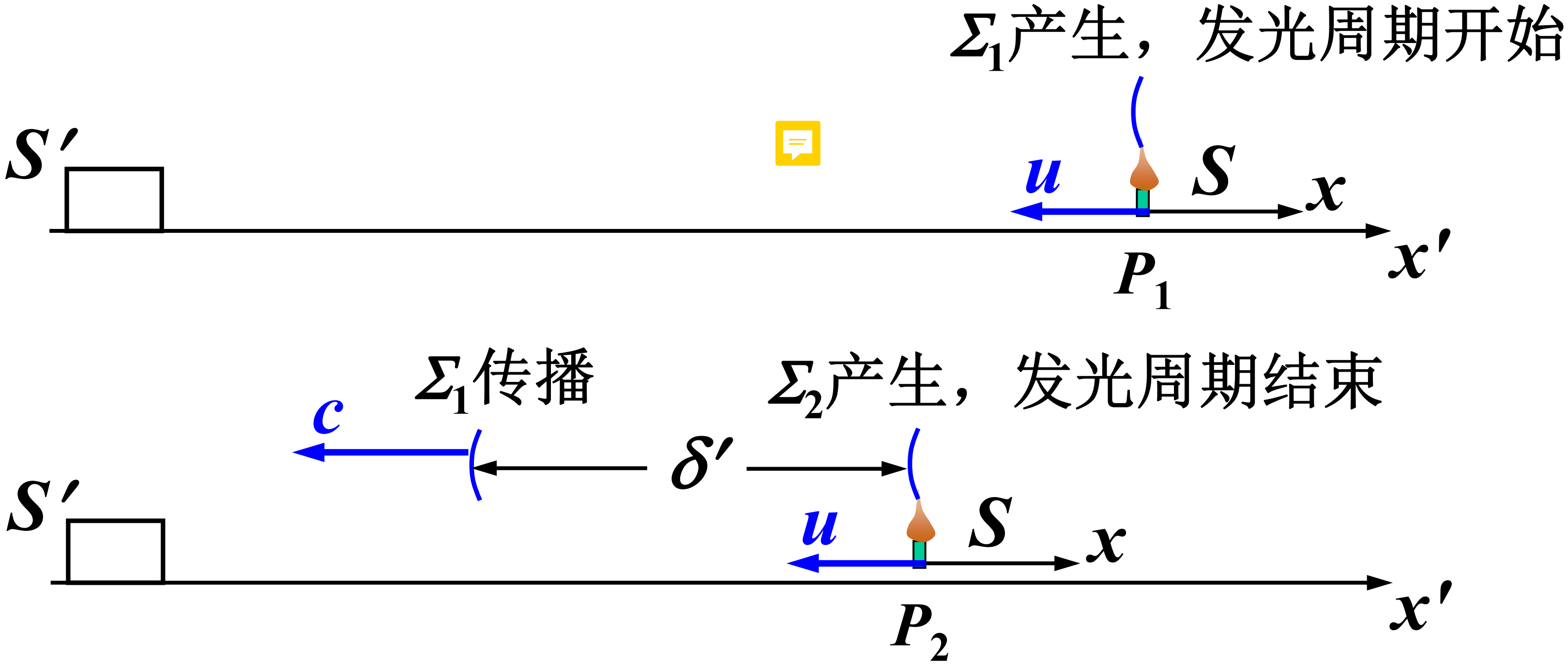
和速度变换公式可得：

$$
\begin{aligned}
p'_x &= \gamma(p_x - u\frac{E}{c^2}) \\
p'_y &= p_y \\
p'_z &= p_z \\
E' &= \gamma(E - \beta c p_x)
\end{aligned}
\qquad \text{对比} \qquad
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - ut) \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \gamma(t - \frac{\beta}{c}x)
\end{aligned}
$$

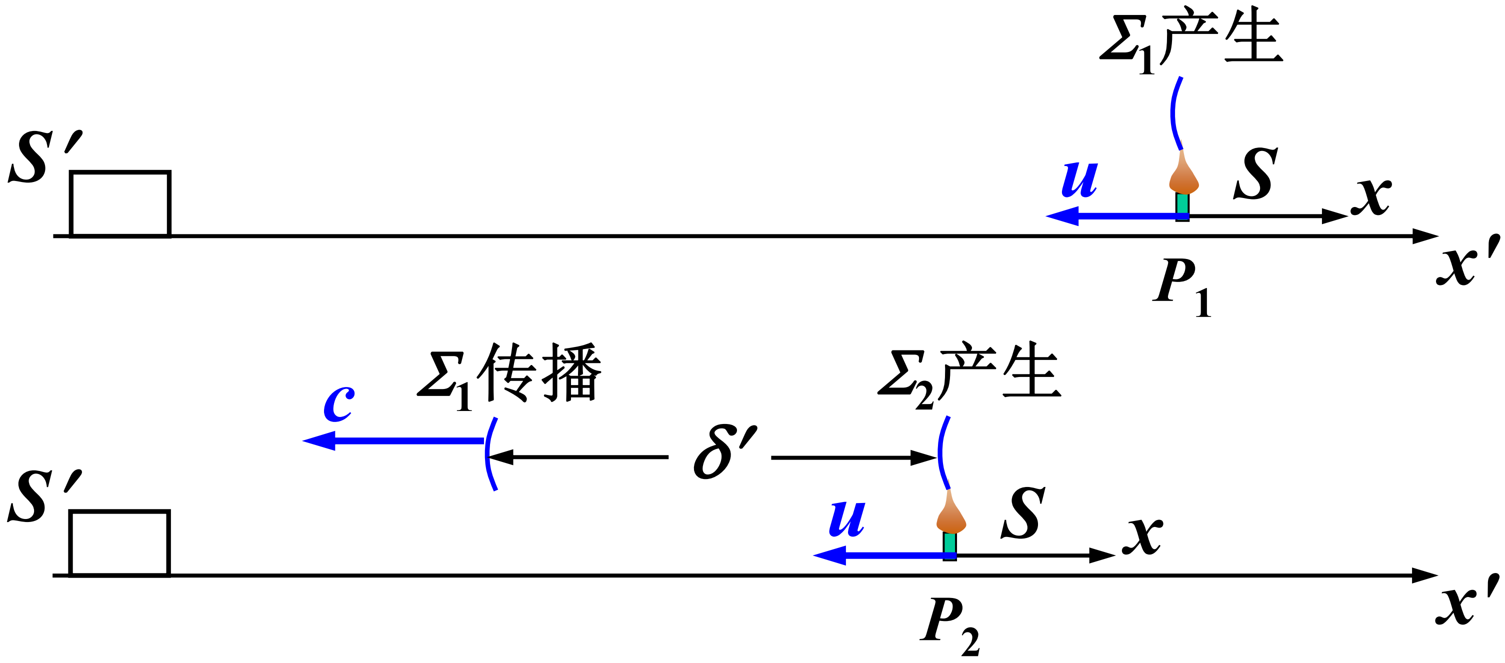
有 $p_x \sim x$， $p_y \sim y$， $p_z \sim z$， $E/c^2 \sim t$ 。

【例】光源系 S 中观测，光的频率为 ν。接收器以速率 u 沿二者连线方向向着光源运动，求：接收器接收到的频率 ν'，接收器参考系为 S' 系。

解：在接收器 S' 系中求解



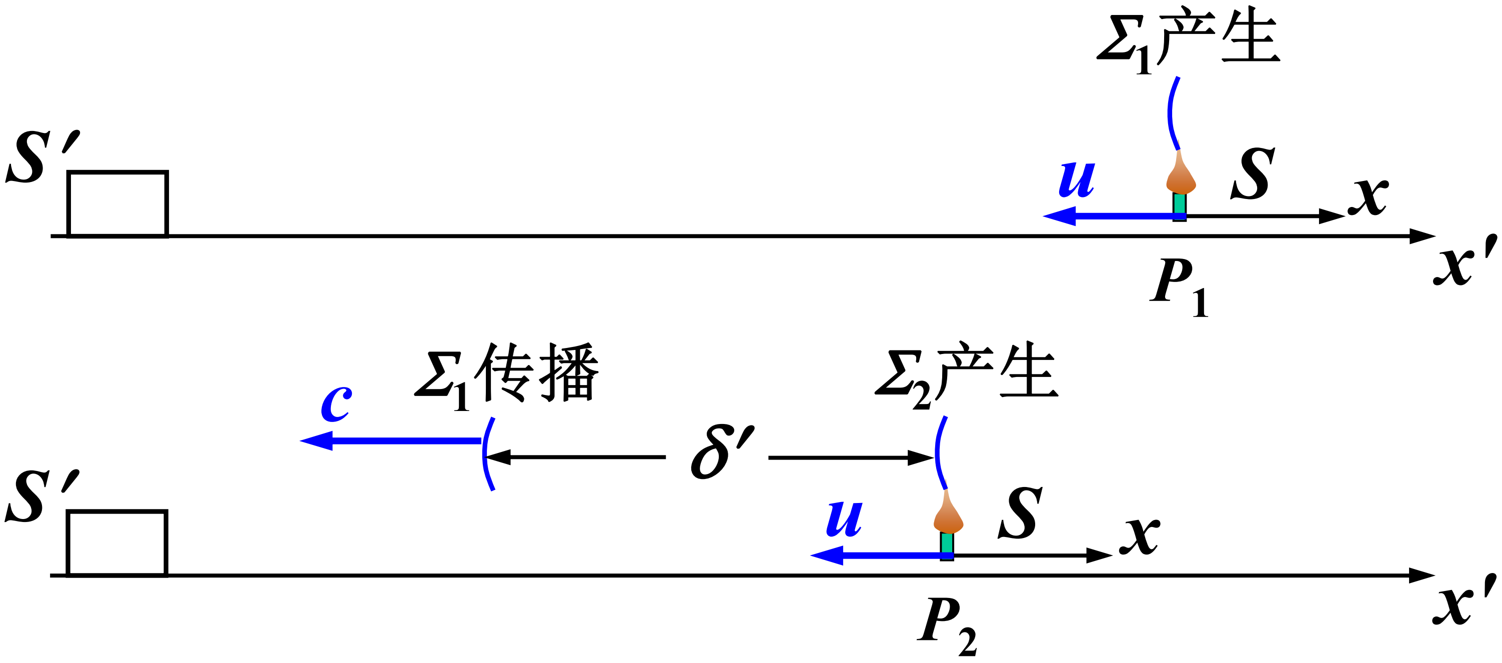
P_1：发光周期开始，P_2：发光周期结束



P_3：Σ_1 和接收器相遇，P_4：Σ_2 和接收器相遇

P_3、P_4 的时间差就是接收器接收到的周期：

$$\left|\Delta t'_{43}\right| = T' = \frac{\delta'}{c}, \quad \nu' = \frac{c}{\delta'}$$

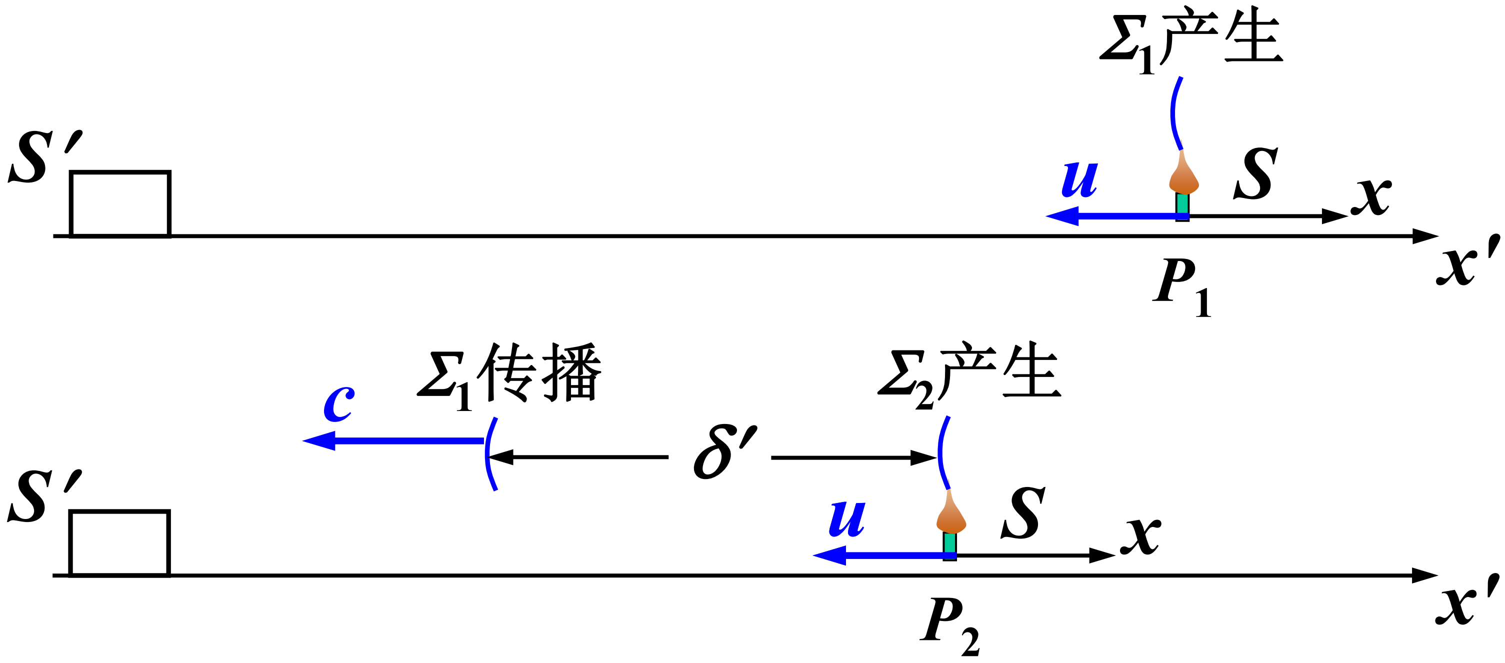


S'系中，P_1、P_2时间差和距离：

光源 S 系周期

$$\Delta t'_{21} = \gamma(\Delta t_{21} - \frac{u}{c^2}\underbrace{\Delta x_{21}}_{=0}) = \gamma \Delta t_{21} = \gamma T$$

$$\left|\Delta x'_{21}\right| = u\Delta t'_{21} = u\gamma T$$

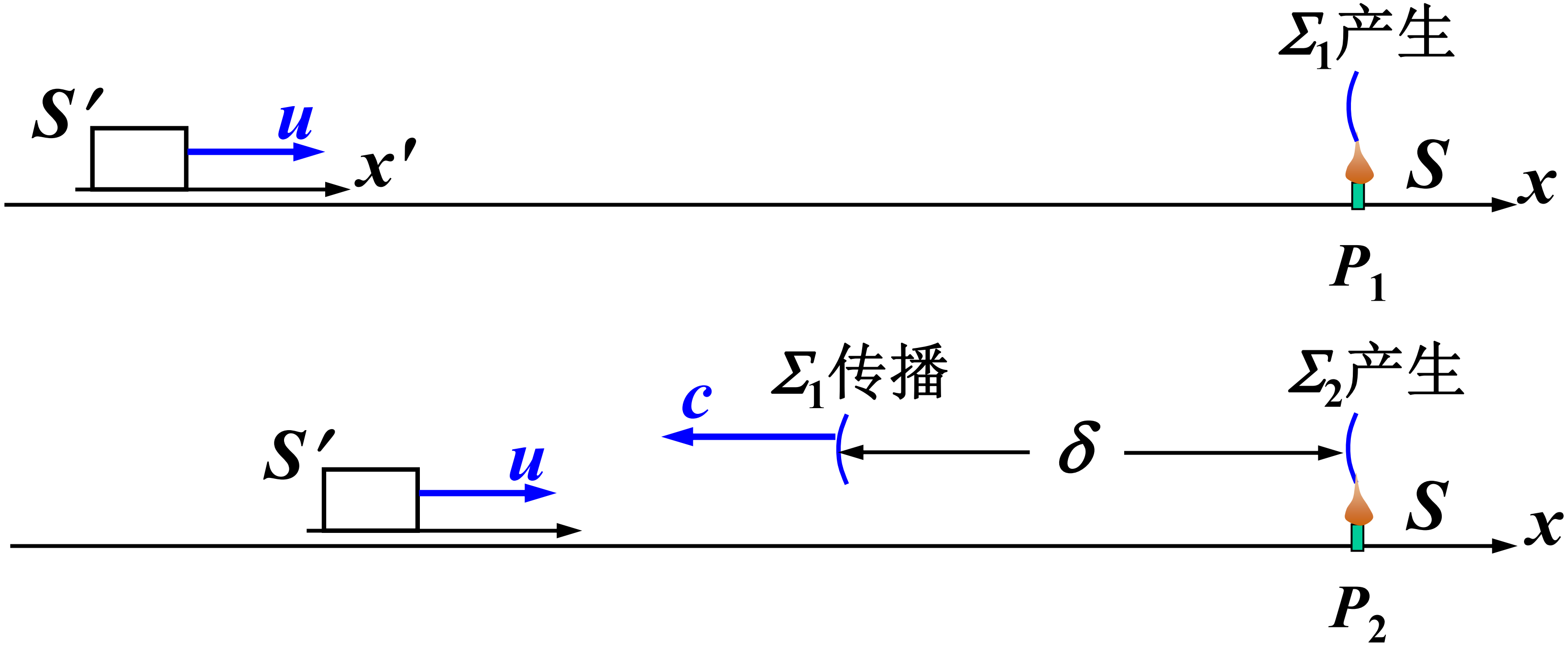


$$\delta' = \Delta t'_{21} c - \left| \Delta x'_{21} \right| = (c-u)\gamma T$$

$$\nu' = c/\delta' = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}\,\nu > \nu$$ —— 多普勒效应

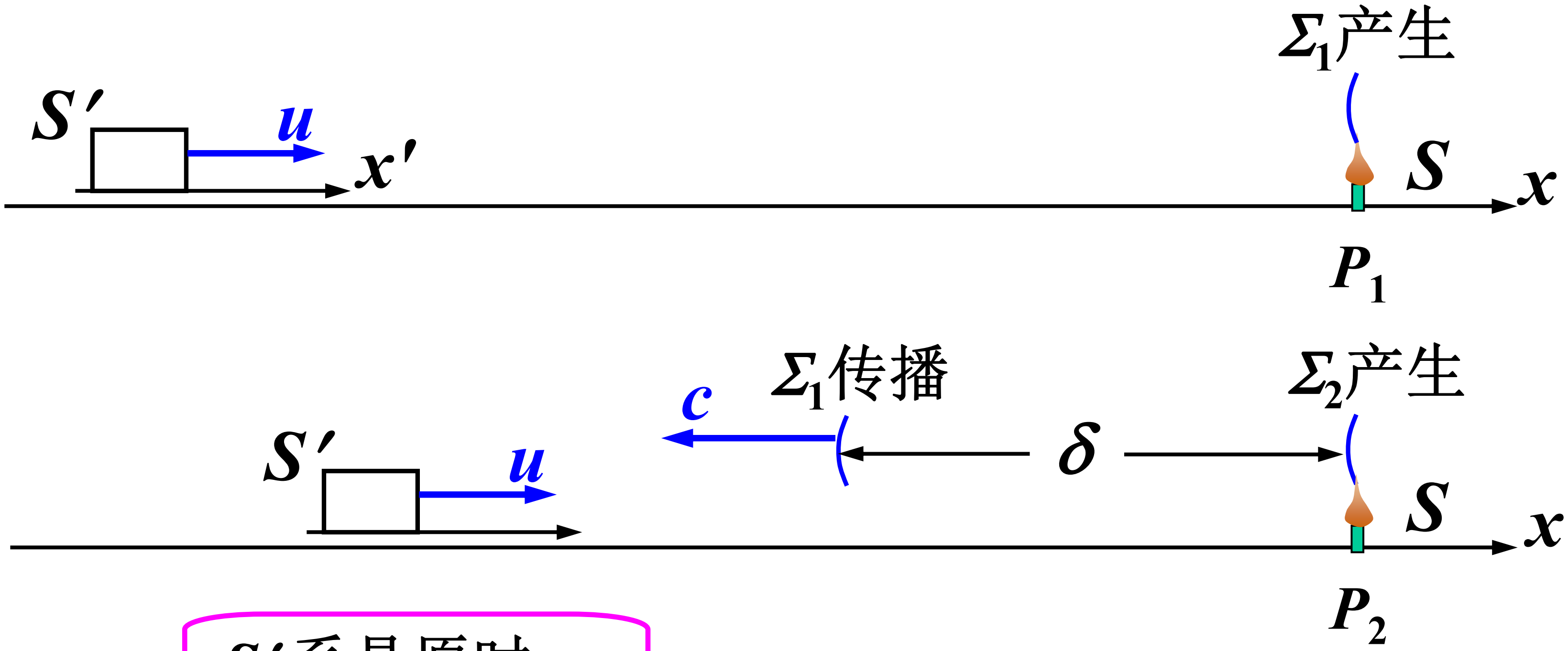
【思考】光源、接收器相互远离结果如何？

另法：在光源 S 系中求解



P_3、P_4 的时间差：

$$|\Delta t_{43}| = \frac{\delta}{c+u} = \frac{c|\Delta t_{21}|}{c+u} = \frac{cT}{c+u}$$

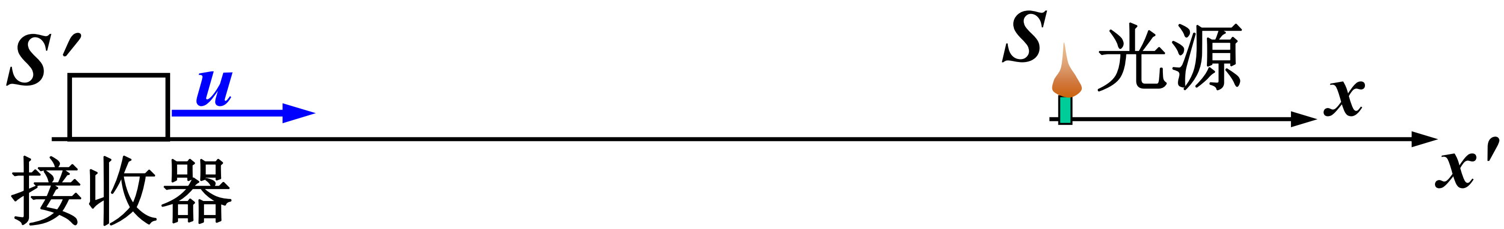


S′系是原时

$$T' = \left|\Delta t'_{43}\right| = \left|\Delta t_{43}\right|/\gamma = \frac{cT}{(c+u)\gamma} = \sqrt{\frac{c-u}{c+u}}T$$

$$\nu' = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}\,\nu > \nu$$

另法：用光子的能量和动量变换



S 系：光子动量沿 $-x$，由光子动量 — 能量关系：

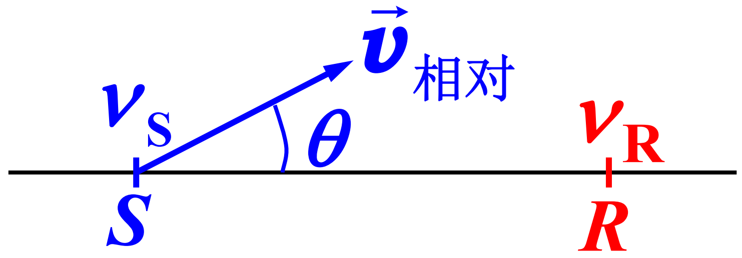
$$p_x = -E/c, \quad p_y = p_z = 0$$

S'系：由动量、能量变换关系，得光子能量为：

$$E' = \gamma(E - up_x) = \gamma(E + uE/c) = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}E$$

$$E = h\nu, \quad E' = h\nu' \quad \Rightarrow \quad \nu' = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}\nu > \nu$$

电磁波多普勒效应的一般形式



$$\nu_R = \frac{\sqrt{c^2 - v_{相对}^2}}{c - |v_{相对}| \cdot \cos\theta} \nu_S$$

$\theta = \pi/2, \ \nu_R \neq \nu_S$ — 横向多普勒效应

注意：起作用的是相对运动，或相对速度，按照“波源相对接收器运动”，或按“接收器相对波源运动”，结果是一样的。

纵向多普勒效应

光源和接收器相对接近时，$\theta = 0$ ：

$$\nu_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{c+|\boldsymbol{v}|}{c-|\boldsymbol{v}|}}\,\nu_{\mathrm{S}} \qquad \text{频率增大}$$

光源和接收器相对远离时，$\theta = \pi$ ：

$$\nu_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{c-|\boldsymbol{v}|}{c+|\boldsymbol{v}|}}\,\nu_{\mathrm{S}} \qquad \text{频率减小}$$

频率变化与机械波的情形一样。

§ 10.11 相对论中力的变换

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}$$

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}=\frac{1-\dfrac{u}{c^2}\boldsymbol{v}_x}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

由上面关系以及动量 – 能量变换关系可得力的变换关系

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{u}{c^2}\vec{F}\cdot\vec{v}}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \qquad F_x = \frac{F'_x + \frac{u}{c^2}\vec{F}'\cdot\vec{v}'}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}$$

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1 - \frac{u}{c^2}v_x)} \qquad F_y = \frac{F'_y}{\gamma(1 + \frac{u}{c^2}v'_x)}$$

$$F'_z = \frac{F_z}{\gamma(1 - \frac{u}{c^2}v_x)} \qquad F_z = \frac{F'_z}{\gamma(1 + \frac{u}{c^2}v'_x)}$$

力和加速度的关系也可表示成

$$\boxed{\vec{F}=m\vec{a}+\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c^2}\vec{v}}$$

证明：$\vec{F}=m\vec{a}+\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}=m\vec{a}+\dfrac{\mathrm{d}E}{c^2\,\mathrm{d}t}\vec{v}$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{F}=m\vec{a}+\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c^2}\vec{v}$$

§ 10.12 相对论的四维形式

在 3 维空间中，一个矢量经旋转后只是方向变化，模长不变。相应的变换矩阵式正交变换矩阵。

狭义相对论中，时间和空间统一起来，成为一种 4 维时空 — 闵可夫斯基空间。狭义相对论中的时空仍是刚性平直的，是一种伪欧几里得时空。

类比 3 维空间，4 维时空的坐标是什么？“旋转”操作的“正交矩阵”是什么？

可尝试从间隔不变性 — 间隔是洛仑兹标量中寻找答案。

$$\Delta S=\sqrt{c^2(t_1-t_2)^2-[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]}$$

$$[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+(ict_1-ict_2)^2]=-\Delta S^2$$

定义 4 维时空坐标： x , y , z , ict

把洛伦兹变换用 4 维时空坐标重新表示：

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x-ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x' &= \gamma\cdot x+i\gamma\beta\cdot ict \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ict' &= -i\gamma\beta x+\gamma\cdot ict \end{aligned}$$

矩阵表示：
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$$

4 维时空中的洛仑兹变换矩阵

正变换矩阵

$$\boxed{a = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad \beta = \frac{u}{c}}$$

逆变换矩阵 $a^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$

显然： $aa^{\mathrm{T}} = 1$ （$a^{\mathrm{T}} = a^{-1}$）

洛仑兹变换是 **4** 维时空的一种线性正交变换，是 **4** 维时空的一种纯“转动”操作。所以洛仑兹变换不会改变 **4** 维矢量的模，从而不会改变间隔。

洛伦兹变换是惯性系之间的时空变换，因此不同的惯性系在 **4** 维时空间看就是相对“转动”而已。

洛伦兹变换的导出不需要狭义相对性原理。狭义相对性原理是针对物理学定律提出的要求：所有物理定律在不同惯性系中具有相同形式，即表达物理定律的数学方程在不同惯性系中形式是不变的，称为方程具有协变性。

这种不变性是物理学定律对匀速直线运动的对称性—相对论性对称性，是自然界一种基本对称性。

狭义相对论是在 **4** 维时空讨论物理规律，这要求在 **4** 维时空重新定义物理量，以保证物理量和所表达的物理定律的方程在洛伦兹变换下具有协变性，以满足相对性原理要求。

一. 4 维标量 — 洛仑兹标量或不变量

1. 从 4 维坐标获得

时空间隔 $(\Delta S)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$

$$(\mathrm{d}S)^2 = (c\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2$$

2. 从电磁学规律的不变性获得

电荷 Q 、真空中的光速 c，真空介电常量 ε_0 ...

3. 从相对参考系静止的物体的测量结果获得

原时 τ 、静长 l、静止质量 m_0、固有体积 V_0 ...

静止介质的一切物理常数：介电常量 ε 、磁导率 μ 、电导率 σ 、...

重要关系

设在惯性系 S、S' 中物体分别以速度 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{v}'$ 运动，物体的原时 τ 和 S、S' 系的时间 t、t' 有关系：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\equiv\gamma_v \qquad \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}\equiv\gamma_{v'}}$$

由 4 维坐标的洛伦兹变换可证：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}=\frac{\gamma_v}{\gamma_{v'}}=\frac{1}{\gamma\left(1-\dfrac{u}{c^2}v_x\right)}=\frac{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}{1-\dfrac{u}{c^2}v_x}}$$

$$\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

4. 从 4 维矢量的不变量获得

4 维矢量的模方是洛伦兹标量。

5. 从 4 维标量或矢量的运算获得

2 个 4 维标量的代数运算结果是洛伦兹标量。

2 个 4 维矢量的内积平方是洛伦兹标量。

二. 4 维矢量

任何具有 4 个分量的物理量 $V_\mu(\mu = 1, 2, 3, 4)$，在不同惯性系之间变换，如果按照和 4 维时空坐标相同的方式进行洛伦兹变换，就称为 4 维矢量：

$$V'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} V_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$$

矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \\ V'_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}$$

4 维矢量的这种变换特性称为相对论不变性。

三. 4 维运动学量

1. 4 维位矢

根据 4 维时空坐标，定义 4 维时空中的位矢

$$\boxed{\vec{R} = (R_1, R_2, R_3, R_4) = (x, y, z, ict) = (\vec{r}, ict)}$$

变换方式： $R'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} R_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$

矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$$

2.4 维速度

4 维速度要具有相对论不变性，该如何定义？

考虑到物体的原时是洛伦兹标量，所以定义：

物体的 4 维速度是其 4 维位矢对其原时的微商

$$\boxed{\vec{U}=\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}=\gamma_v\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}=\gamma_v\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t},\ ic\right)=\gamma_v(\vec{\boldsymbol{v}},\ ic)}$$

$$\vec{U}=(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4)=\gamma_v(\boldsymbol{v}_x,\boldsymbol{v}_y,\boldsymbol{v}_z,\ ic)=\gamma_v(\vec{\boldsymbol{v}},\ ic)$$

4 维速度的模方 — 洛仑兹标量：

$$\boxed{|U|^2=\sum_{\mu}U_{\mu}U_{\mu}=-c^2}$$

证明 4 维速度具有相对论不变性： $\vec{U}' = \dfrac{\mathrm{d}\vec{R}'}{\mathrm{d}\tau}$

$$\Rightarrow \quad U'_\mu = \frac{\mathrm{d}R'_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}(\sum_\nu a_{\mu\nu} R_\mu)}{\mathrm{d}\tau} = \sum_\nu a_{\mu\nu} U_\mu$$

4 维速度变换 $\quad U'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} U_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$

矩阵表示：

$$\gamma_{v'} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \\ ic \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \gamma_v \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ ic \end{pmatrix}$$

从 4 维速度变换很容易得到 3 维速度变换：

$$\gamma_{\boldsymbol{v}'}\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}'_x \\ \boldsymbol{v}'_y \\ \boldsymbol{v}'_z \\ ic \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \gamma_{\boldsymbol{v}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_x \\ \boldsymbol{v}_y \\ \boldsymbol{v}_z \\ ic \end{pmatrix}$$

之前证明过：
$$\frac{\gamma_{\boldsymbol{v}}}{\gamma_{\boldsymbol{v}'}} = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u}{c^2}\boldsymbol{v}_x\right)} = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c^2}\boldsymbol{v}_x}$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \qquad v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \qquad v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \qquad v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

四. 4 维动力学量和动力学方程

下面讨论如何按狭义相对性原理要求、动量守恒律等构建物体的 **4** 维动力学量和 **4** 维动力学方程。

物体的 **4** 维动力学方程应取习惯形式：

$$物体所受4维力=\frac{物体的4维动量微分}{时间微分}$$

如果 **4** 维动量和时间能保证相对论不变性，则 **4** 维力也具有相对论不变性，**4** 维动力学方程也就具有协变性，这样就能满足狭义相对性原理要求。

从 **4** 维速度定义可得到提示，分母上的时间应选择物体的原时，这样才能保证方程的协变性。

1. 静止质量、相对论质量、4 维动量

物体的 4 维动量很自然地用物体的 4 维速度构建：

物体 4 维动量 = 物体质量 × 物体 4 维速度

为保证 4 维动量的相对论不变性，上式中的质量必需是洛伦兹标量。

所以定义一个新的洛伦兹标量：物体静止质量 m_0

进一步定义物体的相对论质量和相对论动量：

$$\boxed{m = m_0 \gamma_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\vec{v}}$$

4 维动量定义：物体静止质量和物体 4 维速度乘积

$$\boxed{\vec{P} = m_0 \vec{U} = m_0 \gamma_v (\vec{v},\ ic) = (m\vec{v},\ imc) = (\vec{p},\ imc)}$$

很明显 4 维动量具有相对论不变性，所以其模方是洛仑兹标量。

在物体相对静止的惯性系中（$v = 0$）的 4 维动量：

$$\vec{P} = m_0 \vec{U} = m_0 \gamma_v (\vec{v},\ ic) = (0,\ im_0 c)$$

$$\Rightarrow \quad |P|^2 = -m_0^2 c^2$$

所以在任何惯性系都有：

$$\boxed{|P|^2 = p^2 - m^2 c^2 = -m_0^2 c^2}$$

2.4 维力

4 维力定义：物体 4 维动量对物体原时的微商

$$\vec{T}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}\tau}=\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}(imc)}{\mathrm{d}\tau}\right)=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},i\frac{\mathrm{d}(mc)}{\mathrm{d}t}\right)$$

4 维力的定义直接保证 4 维力是相对论不变量。这样在某个惯性系 4 维力为零，4 维动量守恒，则在一切惯性系中 4 维力为零，4 维动量守恒。

为满足动量守恒律要求，相对论中保留在一切惯性系中，动量变化率等于力的定义：

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{T} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}, i\frac{\mathrm{d}(mc)}{\mathrm{d}t}\right) = \gamma_v\left(\vec{F}, i\frac{\mathrm{d}(mc)}{\mathrm{d}t}\right)$$

4 维力中的第 4 项是什么需要明确，为此计算 4 维力和 4 维速度的内积，它是洛伦兹标量：

$$\vec{T}\cdot\vec{U} = \gamma_v\left(\vec{F}, i\frac{\mathrm{d}(mc)}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\gamma_v(\vec{\boldsymbol{v}},\ ic) = \gamma_v^2[\vec{F}\cdot\vec{\boldsymbol{v}} - \frac{\mathrm{d}(mc^2)}{\mathrm{d}t}]$$

可选择在物体相对静止的惯性系中（$\boldsymbol{v}=0$）计算：

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}} = 1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}(mc^2)}{\mathrm{d}t}\right|_{\boldsymbol{v}=0} = \left.\frac{m_0\boldsymbol{v}(\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t)}{(1-\boldsymbol{v}^2/c^2)^{3/2}}\right|_{\boldsymbol{v}=0} = 0$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\boldsymbol{v}} = 0$$

所以在任何惯性系都有：

$$\boxed{\vec{T}\cdot\vec{U}=0} \qquad \boxed{\vec{F}\cdot\vec{v}=\frac{\mathrm{d}(mc^2)}{\mathrm{d}t}}$$

4 维力即其变换

$$\boxed{\vec{T}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}\tau}=\gamma_v\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},i\frac{\mathrm{d}(mc)}{\mathrm{d}t}\right)=\gamma_v(\vec{F},\ i\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c})}$$

$$\gamma_{v'}\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \\ i\vec{F}'\cdot\vec{v}'/c \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}\cdot\gamma_v\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ i\vec{F}\cdot\vec{v}/c \end{pmatrix}$$

应用下面关系很容易得到 3 维力的变换：

$$\gamma_{\boldsymbol{v}} / \gamma_{\boldsymbol{v}'} = 1 \Big/ [\gamma(1-\frac{u}{c^2}\boldsymbol{v}_x)] = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \Big/ [\gamma(1-\frac{u}{c^2}\boldsymbol{v}_x)]$$

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{u}{c^2}\vec{F}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}}{1-\frac{u}{c^2}\boldsymbol{v}_x} \qquad F_x = \frac{F'_x + \frac{u}{c^2}\vec{F}'\cdot\vec{\boldsymbol{v}}'}{1+\frac{u}{c^2}\boldsymbol{v}'_x}$$

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1-\frac{u}{c^2}\boldsymbol{v}_x)} \qquad F_y = \frac{F'_y}{\gamma(1+\frac{u}{c^2}\boldsymbol{v}'_x)}$$

$$F'_z = \frac{F_z}{\gamma(1-\frac{u}{c^2}\boldsymbol{v}_x)} \qquad F_z = \frac{F'_z}{\gamma(1+\frac{u}{c^2}\boldsymbol{v}'_x)}$$

3. 质能关系、动量–能量 4 矢量

由 $\vec{F}\cdot\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}(mc^2)}{\mathrm{d}t}$ 类比经典的功率–能量关系，

定义物体的相对论总能量： $\boxed{E=mc^2}$

则物体的静止能量： $\boxed{E_0=m_0c^2}$

4 维动量成为动量–能量 4 矢量： $\boxed{\vec{P}=(\vec{p},\ i\dfrac{E}{c})}$

4 维动量的模方是洛仑兹标量：

$$|P|^2=p^2-m^2c^2=-m_0^2c^2$$

动量–能量关系： $\boxed{(pc)^2+(m_0c^2)^2=E^2}$

4. 动力学方程、动量–能量守恒、动能定理

4维形式 $\begin{cases} \vec{T} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}\tau} \\ \vec{P} = (\vec{p},\ i\dfrac{E}{c}) \\ \vec{T} = \gamma_v(\vec{F},\ i\dfrac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c}) \end{cases}$

在某惯性系如果 $\vec{F}=0$，则 4 维力 $\vec{T}=0$，

则在一切惯性系中 4 维力都为零，

则在一切惯性系中 4 维动量都守恒。

4 维动量守恒意味着：

$$\vec{p} = m\vec{v} = \text{常矢量} \qquad E = mc^2 = \text{常量}$$

4 维动量守恒统一了动量守恒和总能量守恒

—— 动量–能量守恒

定义物体动能： $\boxed{E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2}$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}E_k$$

这正是相对论中的动能定理。

3 维形式的动力学方程

$$\boxed{\begin{cases} \vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \\ \vec{F} \cdot \vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} \end{cases}}$$

五. 动量–能量 4 矢量在孤立系统中的应用

前面讨论的是关于单个粒子的 4 维动力学，需要推广到多粒子系统，依据是下面的实验定律：

实验表明：对于孤立系统所经历的过程，包括不能用力的概念描述的过程，如衰变、裂变、新粒子产生等，系统的动量–能量 4 矢量守恒，或者系统的总动量、总能量守恒。

相对论力学的研究对象主要是孤立系统。动力学方程通常表现为系统的动量–能量4矢量守恒形式。

1. 系统的动量–能量 4 矢量

$$\vec{P}_{总} = \sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha} = (\sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha},\ \frac{i}{c}\sum_{\alpha} E_{\alpha}) = (\vec{p}_{总},\ \frac{i}{c} E_{总})$$

(α 是粒子指标)

显然系统的动量–能量 4 矢量具有相对论不变性，其模方为洛伦兹标量：

$$\left|\vec{P}_{总}\right|^2 = \left|\vec{p}_{总}\right|^2 - \frac{1}{c^2} E_{总}^2 = C$$

(C 是洛伦兹标量)

2. 系统的零动量参考系

$$\boxed{\vec{P}_{总} = (0,\ 0,\ 0,\ \frac{i}{c}E_{总})}$$

由动量–能量 4 矢量的模方为洛伦兹标量可知：

$$\text{任意惯性系中的 } |\vec{p}_{总}|^2 - \frac{1}{c^2}E_{总}^2$$

$$= \text{零动量参考系中的 } -\frac{1}{c^2}E_{总}^2$$

【例】设 2 粒子在实验室参考系中的动量–能量 4 矢量分别是 $(p_1, 0, 0, iE_1/c)$、 $(p_2, 0, 0, iE_2/c)$，求系统的零动量参考系和其中的总能。

解：在实验室系，系统的动量–能量 4 矢量

$$\vec{P}_{总} = (p_1 + p_2,\ 0,\ 0,\ i\frac{E_1 + E_2}{c})$$

在零动量参考系，系统的动量–能量 4 矢量

$$\vec{P}'_{总} = (0,\ 0,\ 0,\ i\frac{E'}{c})$$

由洛伦兹正变换可得零动量参考系相对实验室系的速度 u：

$$0=\gamma(p_1+p_2)+i\beta\gamma(i\frac{E_1+E_2}{c})$$

$$\Rightarrow \quad u=\frac{(p_1+p_2)c^2}{E_1+E_2}$$

由动量–能量 4 矢量的模方为洛伦兹标量可得：

$$(p_1+p_2)^2-\frac{(E_1+E_2)^2}{c^2}=-\frac{E'^2}{c^2}$$

总能： $E'=\sqrt{(E_1+E_2)^2-(p_1+p_2)^2c^2}$

3. 孤立系的粒子碰撞问题

在某惯性系内，设粒子碰撞的反应方程

$$A + B \to C + D$$

- 系统动量–能量 4 矢量守恒

$$P_A + P_B = P_C + P_D \qquad \begin{cases} \vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C + \vec{p}_D \\ E_A + E_B = E_C + E_D \end{cases}$$

- 洛伦兹标量的使用

$$\left|P_A + P_B\right|^2 = \left|P_C + P_D\right|^2$$

方程左右的模方可在任意惯性系计算。

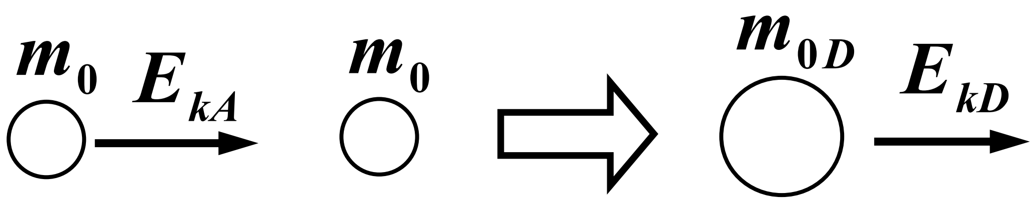
【例】高能粒子碰撞中的资用能问题

资用能：可用于粒子转化的能量

设碰撞的反应方程：　$A + B \rightarrow D$

A 是加速粒子，B 是靶粒子，D 是碰撞后产生的复合粒子。设 $m_{0A} = m_{0B} = m_0$，$E_{kA} >> m_0 c^2$，讨论靶粒子静止和对撞时的资用能。

靶粒子静止情况



资用能 $m_{0D}c^2$　　动能 E_{kD} 浪费了

碰撞前：$E_A + E_B = E_{kA} + 2m_0c^2$

$$p_A^2c^2 = (E_{kA} + m_0c^2)^2 - m_0^2c^4 = E_{kA}(E_{kA} + 2m_0c^2)$$

$$p_B = 0$$

碰撞后：$E_D = \sqrt{p_D^2c^2 + m_{0D}c^4}$

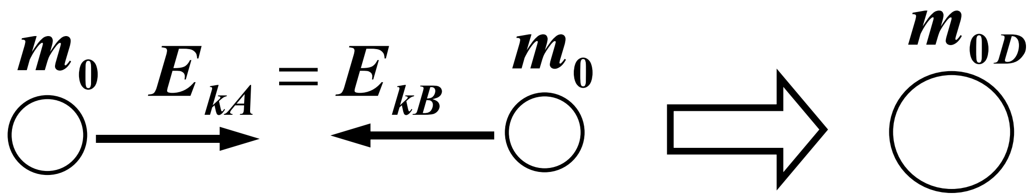
动量、能量守恒：

$$p_A + p_B = p_D, \quad E_A + E_B = E_D$$

得到资用能

$$m_{0D}c^2 = \sqrt{2m_0c^2(E_{kA} + 2m_0c^2)} \approx \sqrt{2m_0c^2E_{kA}}$$

对撞情况



资用能： $m_{0D}c^2 = 2E_{kA} + 2m_0c^2 \approx 2E_{kA}$

两种情况资用能对比：

$$\frac{2E_{kA}}{\sqrt{2m_0c^2E_{kA}}} = \sqrt{\frac{2E_{kA}}{m_0c^2}} >> 1$$ 对撞更有效！

【例】2 个静质量为 m_0 的粒子 A 和 B 碰撞产生静质量为 $M_0 >> m_0$ 的新粒子 C 的反应为：

$$A + B \rightarrow A + B + C$$

当所有产物粒子相对静止时，用于加速粒子的能量最小，分别求粒子 B 静止或对撞情况下的加速粒子 A 的最小能量。

解：使用洛伦兹标量计算

$$\underbrace{\left|P_A + P_B\right|^2}_{\text{反应前的}} = \underbrace{\left|P'_A + P'_B + P'_C\right|^2}_{\text{反应后的}}$$

反应前、反应后的分别在实验室系、零动量系计算

粒子 B 静止

反应前，实验室系： $P_A=(0,\ 0,\ p_A,\ iE_A/c)$

$$P_B=(0,\ 0,\ 0,\ im_0c)$$

反应后，零动量系： $P'_A=(0,\ 0,\ 0,\ im_0c)$

$$P'_B=(0,\ 0,\ 0,\ im_0c)$$

$$P'_C=(0,\ 0,\ 0,\ iM_0c)$$

不变量： $p_A^2-(E_A/c+m_0c)^2=-(2m_0+M_0)^2c^2$

$$E_A^2=p_A^2c^2+m_0^2c^4$$

最小能量： $E_A=\dfrac{(2m_0^2+4m_0M_0+M_0^2)}{m_0}c^2\approx\dfrac{M_0^2c^2}{2m_0}$

对撞情况

反应前，实验室系：$P_A = (0,\ 0,\ p_A,\ iE_A/c)$

$$P_B = (0,\ 0,\ -p_A,\ iE_A/c)$$

反应后，零动量系：$P'_A = (0,\ 0,\ 0,\ im_0c)$

$$P'_B = (0,\ 0,\ 0,\ im_0c)$$

$$P'_C = (0,\ 0,\ 0,\ iM_0c)$$

不变量：$-(2E_A/c)^2 = -(2m_0 + M_0)^2 c^2$

最小能量：$E_A = \dfrac{(2m_0 + M_0)c^2}{2} \approx \dfrac{M_0c^2}{2}$

为产生同样反应效果，采用对撞更有效

$$\frac{M_0 c^2}{2} \bigg/ \frac{M_0^2 c^2}{2m_0} = \frac{m_0}{M_0} << 1$$

例如，对于北京正负电子对撞机

$m_0 c^2 \approx 0.5\,\mathrm{MeV}$　电子

$M_0 c^2 \approx 4.4\,\mathrm{GeV}$　新粒子

$$\frac{m_0}{M_0} \approx 10^{-4}$$