力　学

1. 牛顿力学

适用于弱引力场中低速运动的物体。

- **运动学：** 只描述物体运动，不涉及引起运动和改变运动的原因。
- **动力学：** 研究物体运动与物体间相互作用的内在联系。
- **静力学：** 研究物体在相互作用下的平衡问题。

2. 狭义相对论

适用于高速（接近光速）运动的物体。

- **相对论运动学：** 相对论时空观，洛仑兹变换、时间延缓、尺度收缩。
- **相对论动力学：** 动量定理、能量动量关系、质能关系、力的变换关系等。

3. 振动和波动

以机械运动来介绍振动和波动，基础主要是牛顿力学。

矢量及其微分

矢量： 有大小、方向

1. 加法 平行四边形法则

交换律 $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

结合律 $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$

2. 数乘 矢量乘标量结果仍为矢量

结合律 $\lambda(\mu\vec{A})=(\lambda\mu)\vec{A}$

分配律 $\lambda(\vec{A}+\vec{B})=\lambda\vec{A}+\lambda\vec{B}$

$$(\lambda+\mu)\vec{A}=\lambda\vec{A}+\mu\vec{A}$$

3. 标量积

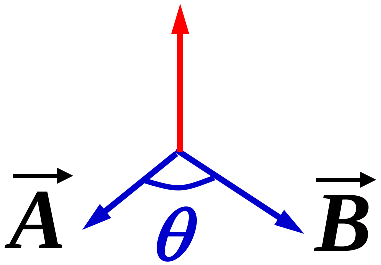
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta,\qquad A^2=\vec{A}\cdot\vec{A}$$

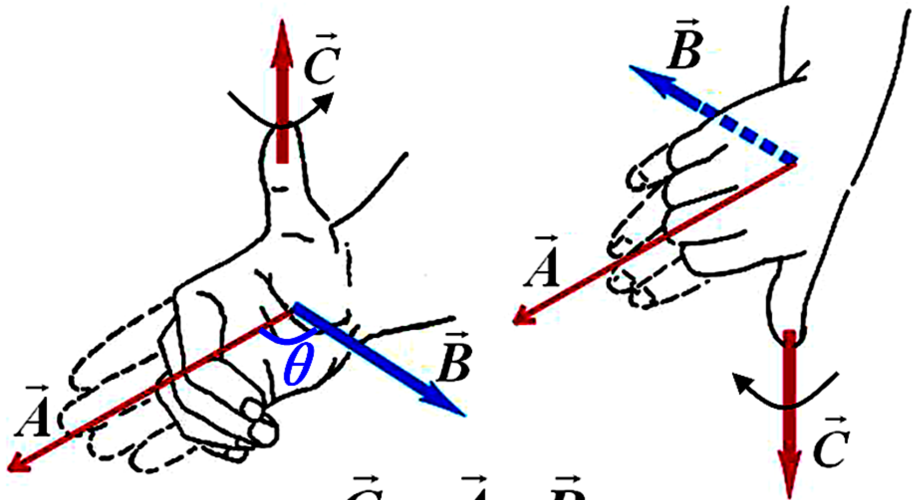
交换律 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

分配律 $\vec{A}\cdot(\lambda\vec{B}+\mu\vec{C})=\lambda\vec{A}\cdot\vec{B}+\mu\vec{A}\cdot\vec{C}$

4. 矢量积

$\vec{A}\times\vec{B}$





$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$

右手定则

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=AB\sin\theta\quad(0<\theta<\pi)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$ 不交换！

$$\vec{A}\times\vec{A}=0$$

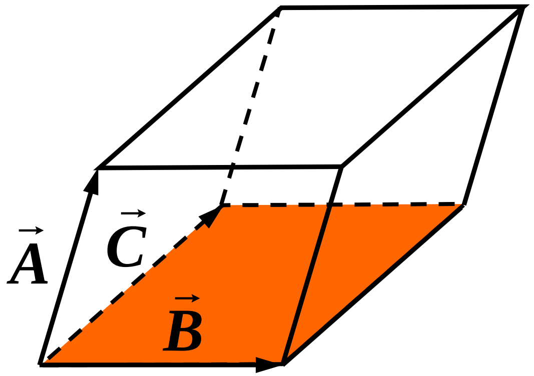
$$\vec{A}\times(\lambda\vec{B}+\mu\vec{C})=\lambda\vec{A}\times\vec{B}+\mu\vec{A}\times\vec{C}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\begin{matrix}(A_yB_z-A_zB_y)\vec{i}\\ +(A_zB_x-A_xB_z)\vec{j}\\ +(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k}\end{matrix}$$

5. 混合积

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$



$$\left|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\right|=\text{平行六面体体积}$$

$\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ 共面或其中任意 2 个平行则:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$$

6. 三重矢积

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

7. 矢量微分

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{A}(t+\mathrm{d}t)-\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{A}+\vec{B})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{A}\times\vec{B})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$\vec{A}$方向单位矢量

特例： $\vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=A\cdot\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ $\quad \overset{\frown}{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}(\lambda\vec{A})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\vec{A}+\lambda\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

特例： $\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(A\overset{\frown}{A})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\overset{\frown}{A}+A\frac{\mathrm{d}\overset{\frown}{A}}{\mathrm{d}t}$

矢量变化包括：大小变化、方向变化

第一章 质点运动学

§ 1.1 参考系

§ 1.2 位矢、位移、速度、加速度

§ 1.3 直角坐标系、匀加速运动

§ 1.4 自然坐标系、圆周运动

§ 1.5 平面极坐标系

§ 1.6 相对运动

§ 1.1 参考系

一. 参考系

参考物：用来确定所观察的物体的位置而选定的参考物体或物体系

参考空间：和参考物相固连的空间

运动学中需要测量物体运动到空间某位置处的时刻，原则上的做法是：

（1）用校准的、相对参考物静止的尺把参考空间每一点的坐标标定出来。

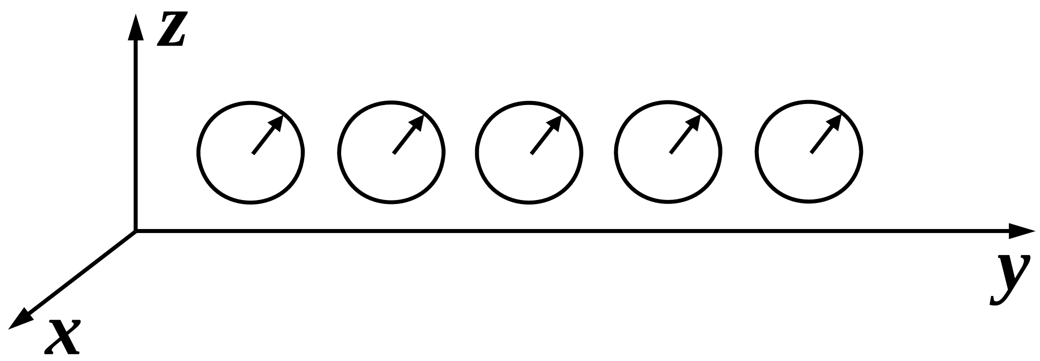
（2）在参考空间每一点配置一个校准的、相对参考物静止的时钟。

（3）参考空间每一点处配置一名相对参考物静止的观测者，物体运动到该点处，由该点处的观测者记录时间和坐标。

（4）通过参考空间不同位置处的观测者的记录，即可得知物体的运动情况。

参考系：参考空间 + 相固连的校准时钟

运动学中，参考系是时空测量系统的抽象。习惯用相固连的直角坐标框架和配置的时钟表示参考系：



绝对时空观和狭义相对论时空观

牛顿 —《自然哲学的数学原理》提出：

- 绝对空间，就其本性来说，与任何外在的情况无关，始终保持着相似和不变。
- 绝对的、纯粹的数学的时间，就其本性来说，均匀地流逝而与任何外在情况无关。

绝对时空是脱离物质的数学时空，时间、空间各自独立，空间是欧几里得空间。时间和空间的度量是绝对的，和物质、运动、参考系无关。

牛顿坚信：宇宙间存在绝对静止的参考系，其时空就是绝对时空。

这样，任何参考系的时空都和绝对时空一致而无差别，时间和空间的度量都和绝对静止参考系的一样而无差别。

牛顿的绝对时空观导致：

在不同参考系：测量同一个物体的长度一样，测量两个物体相遇的时刻一样，测量同一个生命体从出生到消亡的时间间隔一样，...

两把静止时长度相同的尺，有相对运动时长度仍相同。两个静止时校准的时钟，有相对运动时走时仍相同。

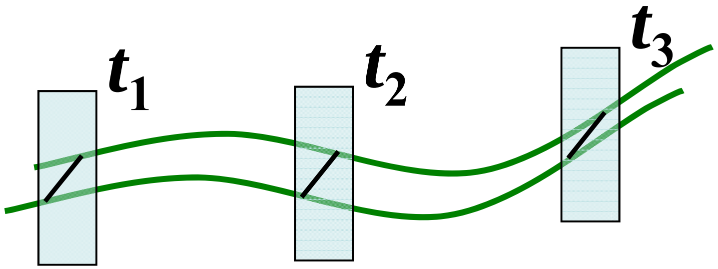
这样，每个观测者都可以用不在本地配置的“校准”的尺和时钟进行时空测量，而且不用考虑尺或时钟是否在运动。

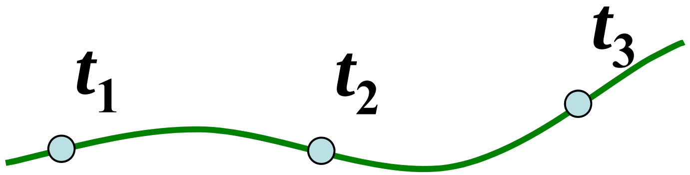
狭义相对论时空观

时间和空间紧密联系，时间、空间及其度量和物质、运动、参考系有关，空间是欧几里得空间。每个惯性参考系都有各自的时空，不同惯性系的时间、空间可以不同。

二. 平动参考系与转动参考系

物体平动：任 2 点连线在运动中保持平行。



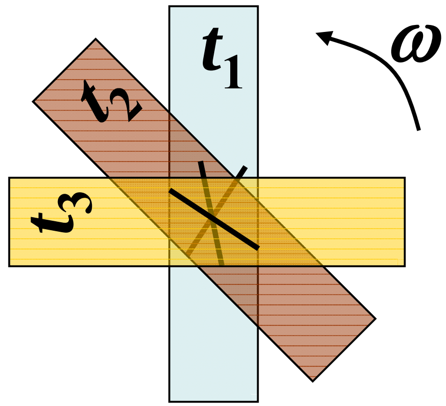


物体内所有点的平动轨迹都“相同”，故整体上可用一个质点的运动描述。

质点概念：强调物体的质量和占据的位置，忽略物体体积。

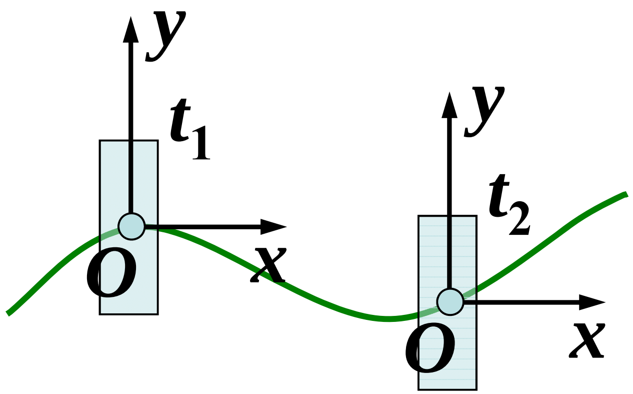
【思考】质点和质元的区别

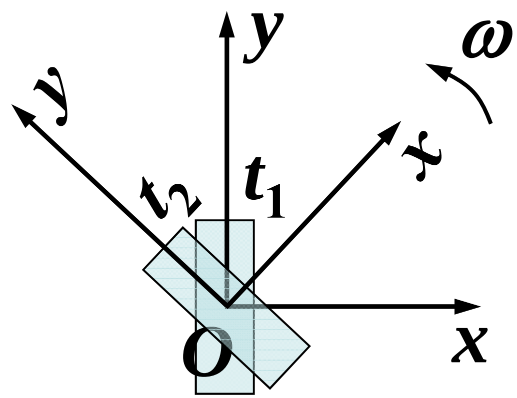
物体转动：绕某个瞬时轴或固定轴旋转。



物体内各点的运动状态不尽相同，故不能用一个点的运动代表物体的整体运动，也不能代表其它点的运动。

平动参考系：参考物只作平动，相固连的坐标框架方位不变。



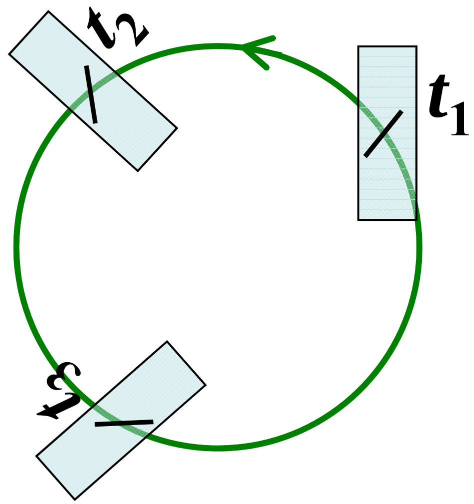


转动参考系：参考物只作转动，相固连的坐标框架转动，方位变。

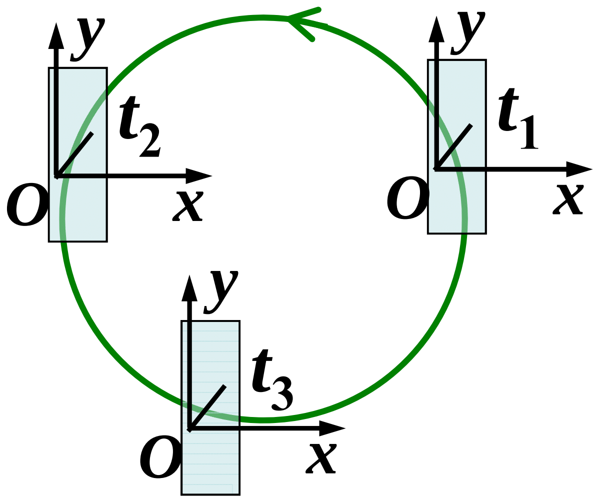
【思考】飞船是什么参考系？转动物体上的一点能否当作参考系？

飞船的运动

公转＋自转

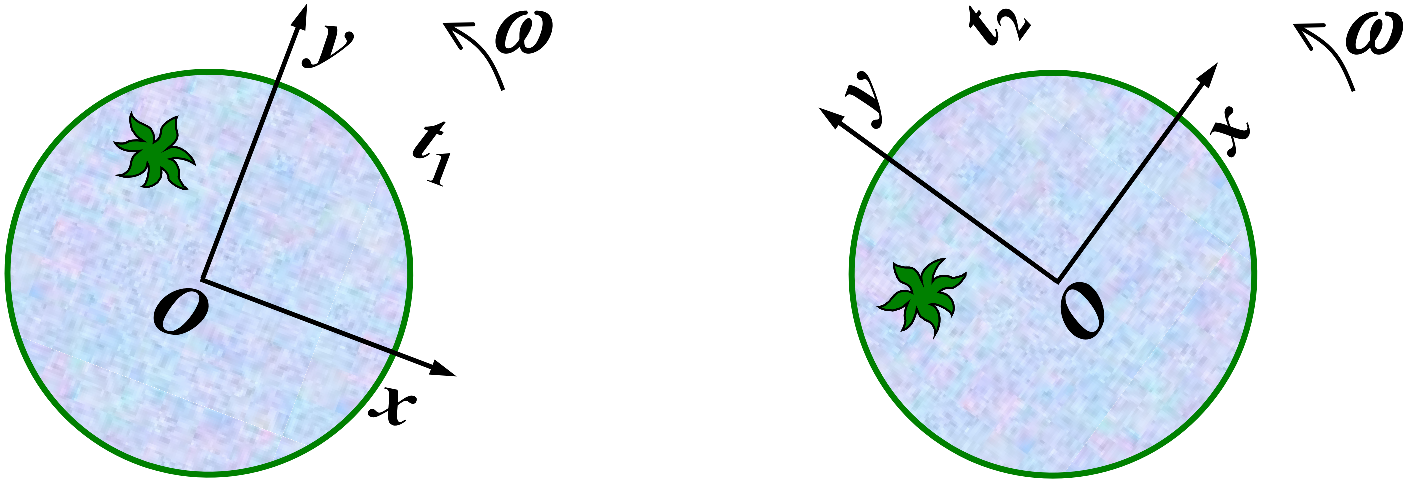


公转是平动



只考虑公转运动，飞船为平动参考系

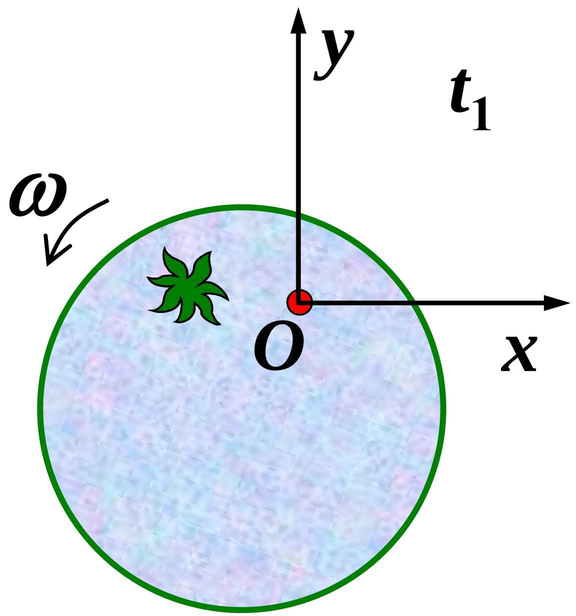
转动的物体

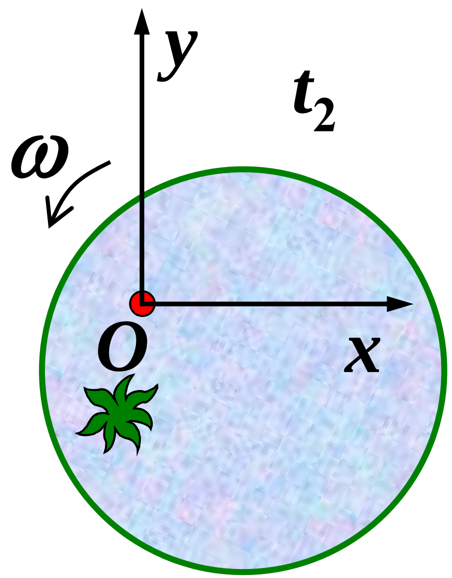


考虑物体整体的转动，物体是转动参考系

转动物体上“一点”的运动

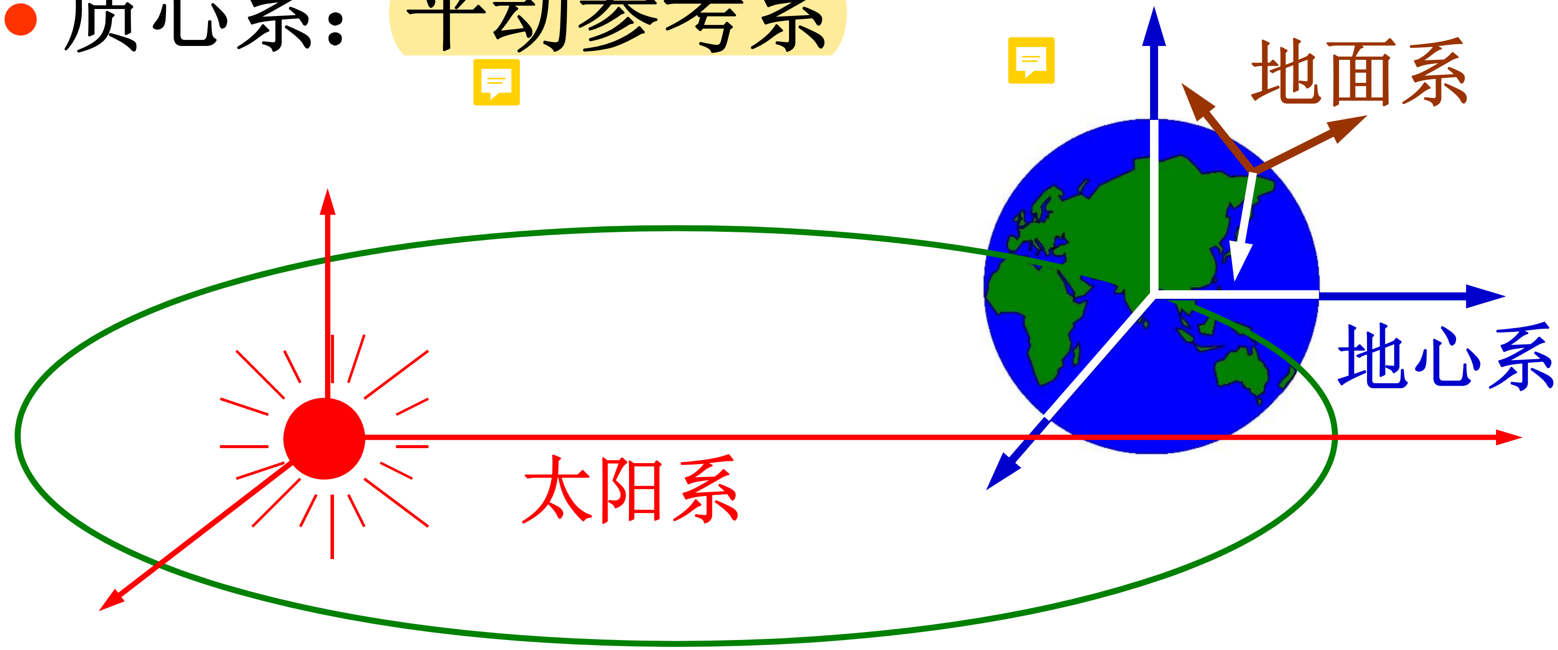
假想一个作平动的物体，其运动用转动物体上的这“一点”的运动代表，如果把平动物体当作参考物，则这“一点” 就对应一个平动参考系。





常用参考系：

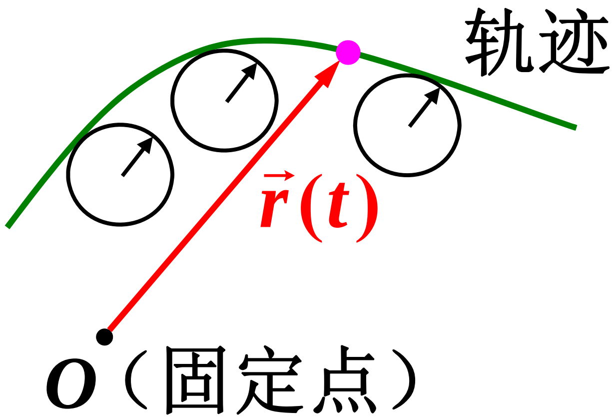
- 太阳系：太阳、恒星构成，平动参考系
- 地心系：地球、恒星构成，平动参考系
- 地面或实验室参考系：一般参考系
- 质心系：平动参考系



§ 1.2 位矢、位移、速度、加速度

位矢： 质点相对参考系内固定点的位置矢量

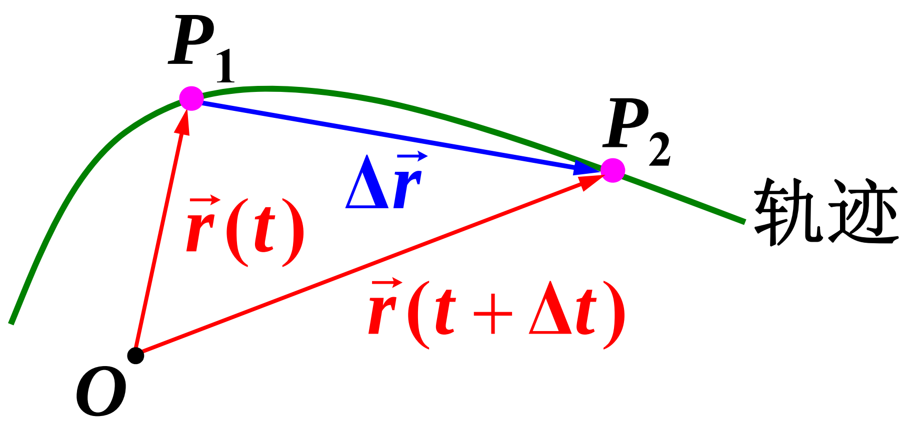
运动函数： 质点位矢和时间的函数关系



$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

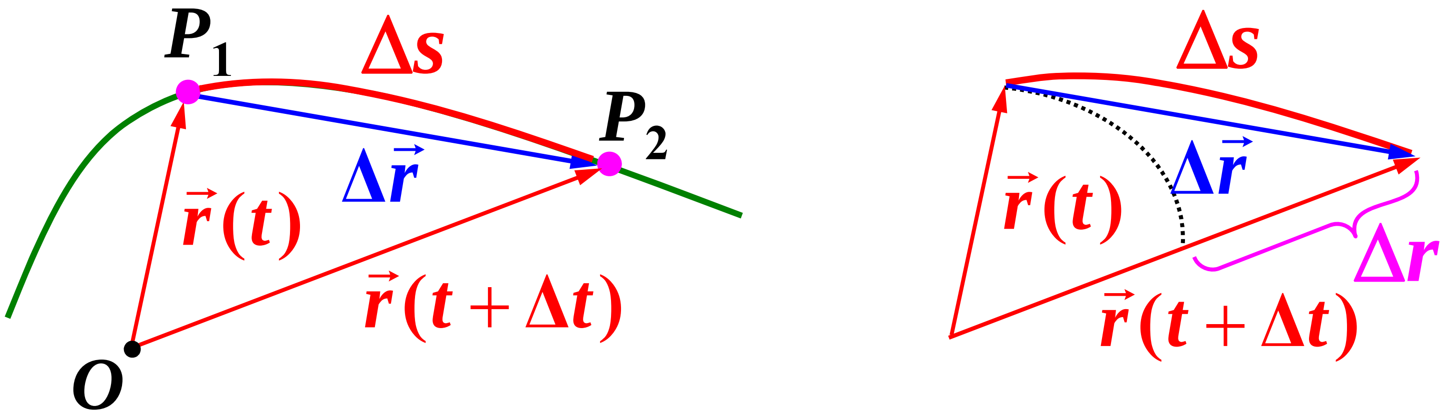
运动函数在选定坐标系下的分量表示就是运动曲线的参数方程，消去 t 得轨迹方程。

位移：质点的位矢在一段时间内的改变量$\Delta\vec{r}$



$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\begin{cases}\text{大小 } |\Delta\vec{r}|=\overline{P_1P_2}\\ \text{方向 } P_1\rightarrow P_2\end{cases}$$

路程： 质点实际运动轨迹的长度 Δs



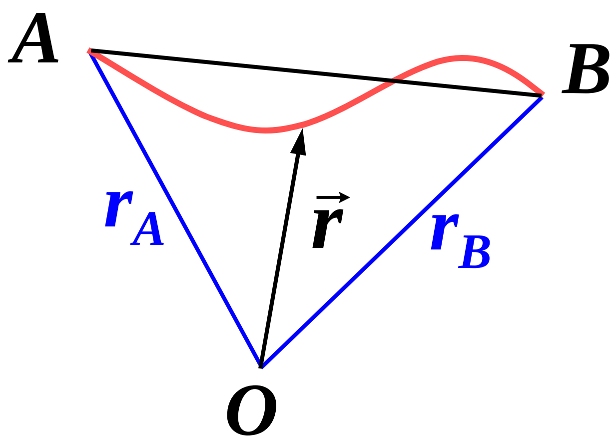
注意： $\Delta s \neq |\Delta\vec{r}|$ 但 $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$；

$$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta r, \quad |\mathrm{d}\vec{r}| \neq \mathrm{d}r$$

分清 $\Delta\vec{r}$、Δr、$|\Delta\vec{r}|$ 等的几何意义。

【例】质点沿曲线由 A 运动到 B

$\left|\int_A^B \mathrm{d}\vec{r}\right|$, $\int_A^B |\mathrm{d}\vec{r}|$, $\int_A^B \mathrm{d}r$ 的意义？



答： $\left|\int_A^B \mathrm{d}\vec{r}\right|$ —— A 到 B 位移大小

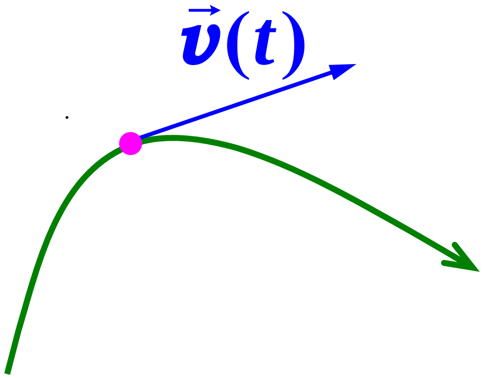
$\int_A^B |\mathrm{d}\vec{r}|$ —— A 到 B 路程

$\int_A^B \mathrm{d}r$ —— 末、初位矢大小之差 $r_B - r_A$

速度：质点位矢对时间的变化率

平均速度： $\overline{\vec{v}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

（瞬时）速度： $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}$

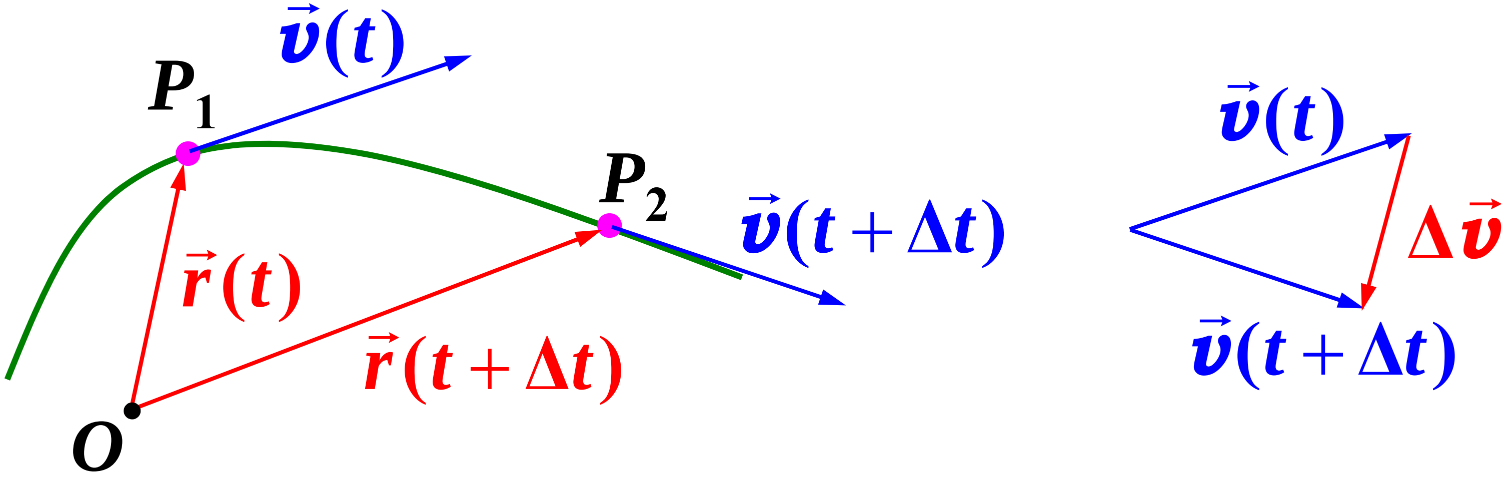


速度方向：沿轨迹切线方向

速度大小 — 速率：

$$v = |\vec{v}| = \frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

加速度：质点速度对时间的变化率



加速度：$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

加速度方向：$\vec{v}$ 变化方向

加速度大小：$a = |\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| \neq \left|\frac{dv}{dt}\right|$

运动学的两类问题：

积分：

- 由 $\vec{a}(t) \Rightarrow \vec{v}(t)$

对 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ 分离变量： $d\vec{v} = \vec{a}\,dt$

两边积分，上下限意义对应： $\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt$

可得： $\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt$

- 由 $\vec{v}(t) \Rightarrow \vec{r}(t)$、$\vec{a}(t) \Rightarrow \vec{r}(t)$ 自己导

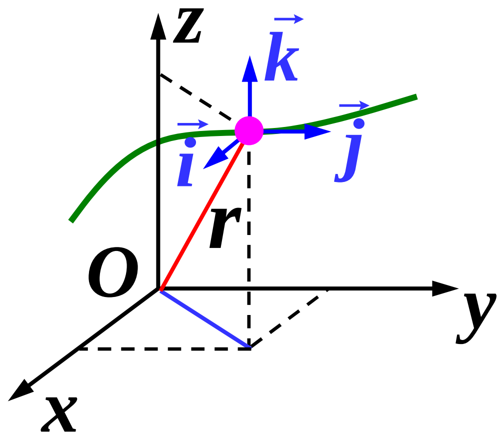
微分： $\vec{r}(t) \Rightarrow \vec{v}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \vec{a}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$

作定量计算时，需要建立合适的坐标系。

注意：物理量包括标量、矢量、张量。参考系的选择可能会影响“物理”：影响物理量的观测及其所表达的客观物理定律。坐标系的选择不影响“物理”，影响的是物理量的分量、物理公式的分量表达。

§ 1.3 直角坐标系、匀加速运动

一. 直角坐标系



坐标：x，y，z

基矢量：$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$

特点：$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 为单位常矢量，与坐标无关

二. 直角坐标系中运动的描述

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

直角坐标系适合描述 $\vec{a}$ 为常量的运动：

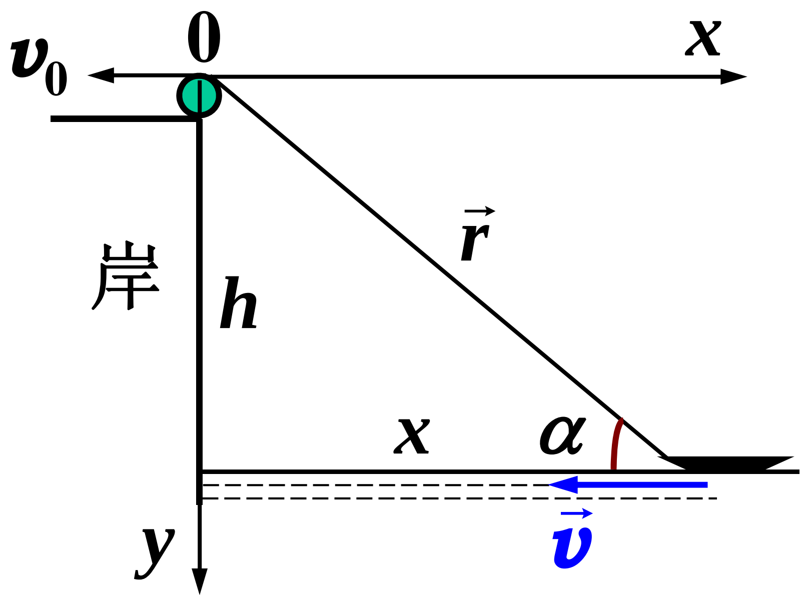
抛体运动、匀速圆周运动等

三. 匀加速运动

自学直线、抛体运动，用直角坐标系求解。

【例】用直角坐标系求船速

坐标系如图，船头位矢：



$$\vec{r} = x\vec{i} + h\vec{j} \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v_0$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\sqrt{r^2 - h^2}}{\mathrm{d}t}\vec{i}$$

$$= \frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)\vec{i} = -\frac{r}{x}v_0\vec{i} = -\frac{v_0}{\cos\alpha}\vec{i}$$

船的加速度

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\frac{r}{x}v_0)\vec{i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0)\vec{i}$$

$$=\frac{v_0h^2}{x^2\sqrt{x^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}$$

$$=\frac{v_0h^2}{x^2\sqrt{x^2+h^2}}(-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0)\vec{i}=-\frac{v_0^2h^2}{x^3}\vec{i}$$

$\vec{a}$ 和 $\vec{v}$ 同向，船加速靠岸。

§1.4 自然坐标系、圆周运动

一. 自然坐标系

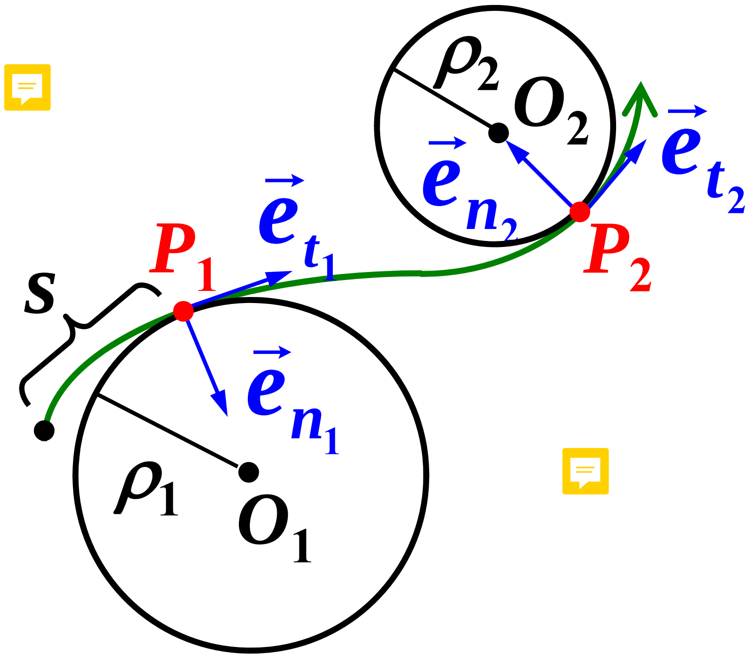
条件：轨迹已知

坐标：路程 s

基矢量：

切向 $\vec{e}_t$：指向轨迹切向

法向 $\vec{e}_n$：指向曲率圆圆心



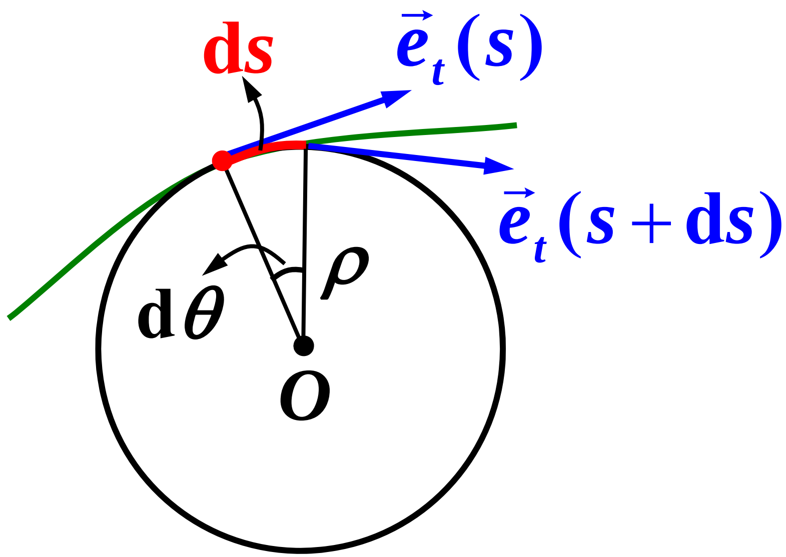
ρ — 曲率半径

特点：$\vec{e}_t$, $\vec{e}_n$ 方向随路程 s 变，非常矢量

微分关系：

$$\mathrm{d}\vec{e}_t = \frac{\mathrm{d}s}{\rho}\vec{e}_n = \mathrm{d}\theta\,\vec{e}_n \qquad \mathrm{d}\vec{e}_n = -\frac{\mathrm{d}s}{\rho}\vec{e}_t = -\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_t$$

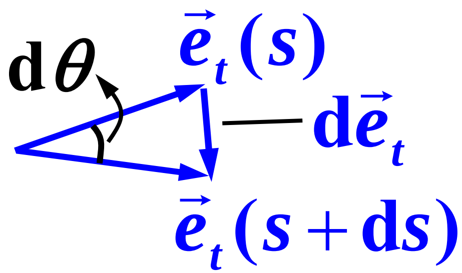
证明：



$$\left|\mathrm{d}\vec{e}_t\right| = \mathrm{d}\theta\cdot\left|\vec{e}_t\right| = \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\vec{e}_t \perp \vec{e}_t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{e}_t \,//\, \vec{e}_n$$

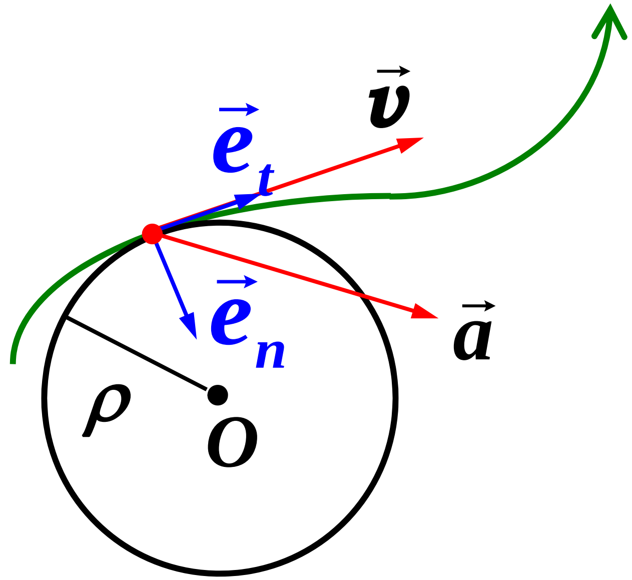
$$\Rightarrow \; \mathrm{d}\vec{e}_t = \mathrm{d}\theta\cdot\vec{e}_n = \frac{\mathrm{d}s}{\rho}\vec{e}_n$$



另一关系自己证

二. 自然坐标系中运动的描述

速度： $\vec{v} = v\,\vec{e}_t$，$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$



加速度：

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_t}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\rho\,\mathrm{d}t}\vec{e}_n = \frac{v}{\rho}\vec{e}_n$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n}$$

切向加速度

$$\boxed{\vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t}$$

描述速率的变化

$\vec{a}_t$ 与 $\vec{v}$ 同向加快，反向减慢。

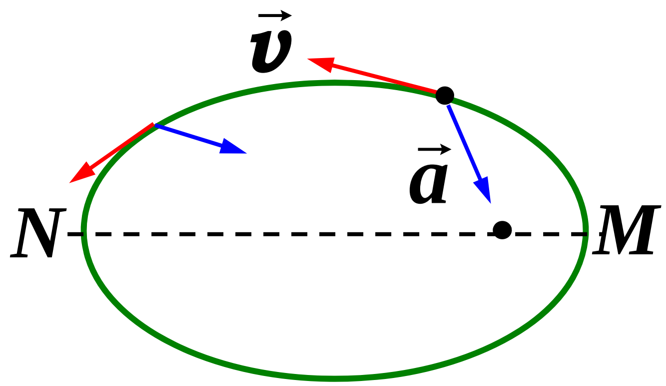
法向加速度

$$\boxed{\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n}$$

描述速度方向的变化

自然坐标系最能反映出运动特征，物理图像清晰。轨迹已知时用自然坐标系方便。

【例】行星沿椭圆轨道运动，加速度指向一焦点，定性分析由 M 到 N 速率的变化。

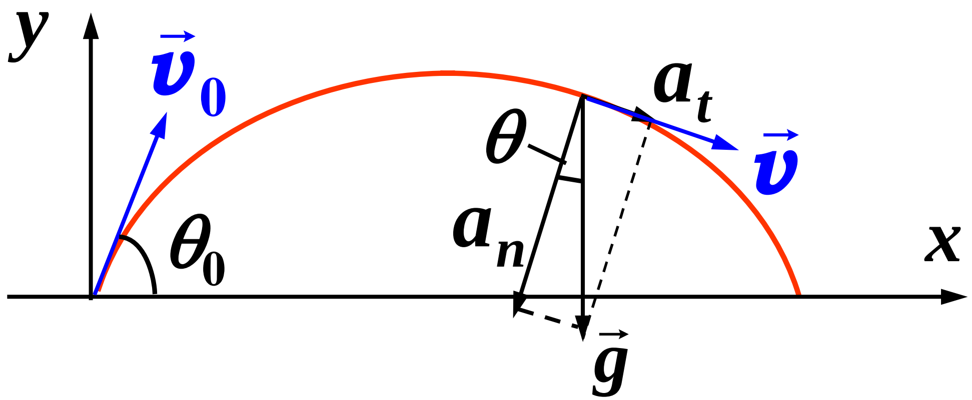


解： M 到 N 中 $\vec{a}_t$ 与 $\vec{v}$ 反向，故速率减小。

【例】质点做斜抛运动，忽略空气阻力，运动中

（1）$\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ 变化否？ （2）$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 变化否？

（3）法向加速度变化否？（4）最大、最小曲率半径



答：（1）$\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{g}$ 不变

（2）$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = a_t = g\sin\theta$ 变　　（3）$a_n = g\cos\theta$ 变

（4）曲率半径 $\rho = \dfrac{v^2}{a_n} = \dfrac{v^2}{g\cos\theta}$

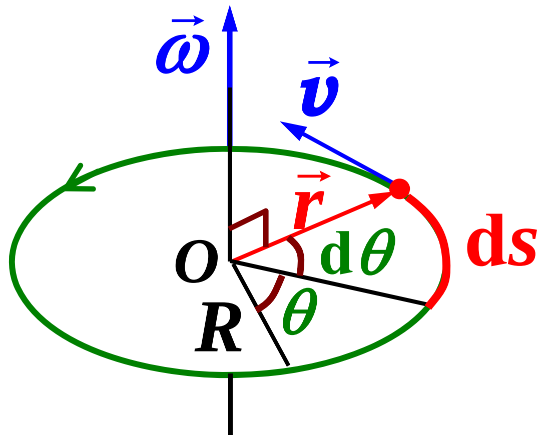
起、落点：$v_0 > v$，$\theta_0 > \theta$　$\rho_{\max} = \dfrac{v_0^2}{g\cos\theta_0}$

最高点：$v = v_0\cos\theta_0$，$\theta = 0$　$\rho_{\min} = \dfrac{v_0^2\cos^2\theta_0}{g}$

三. 圆周运动

1. 角位移

有限大角位移$\Delta\theta$不能定义成矢量，不满足矢量加法。



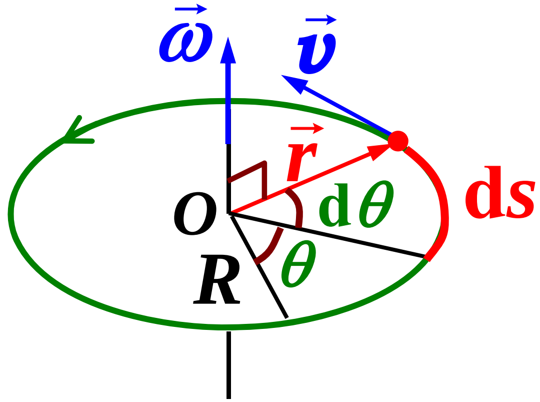
无穷小角位移 $\mathrm{d}\theta$可以定义成矢量，满足矢量加法。

2. 角速度 $\vec{\omega}$

大小：$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}$

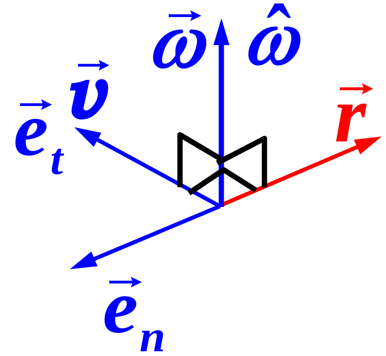
方向：按右手定则判断

3. 角加速度 $\vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$



对圆周运动： $\vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\hat{\omega} = \ddot{\theta}\hat{\omega}$

4. 速度



$$\vec{v} = v\,\vec{e}_t = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t = R\omega\,\vec{e}_t$$

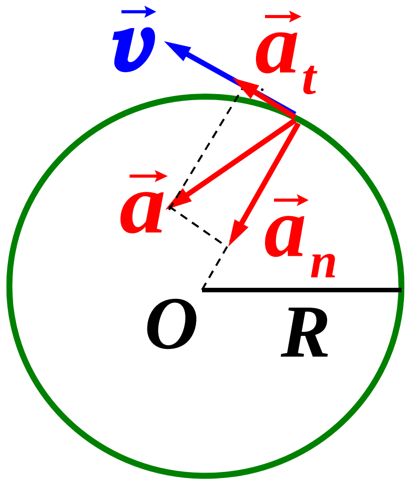
$$= R\omega(\vec{e}_n \times \hat{\omega}) = (R\vec{e}_n)\times(\omega\hat{\omega}) = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} = R\omega\,\vec{e}_t = \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

注意：$\vec{r}$ 端点 O 在转轴上即可

5. 加速度

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + \frac{\upsilon^2}{R}\vec{e}_n}$$



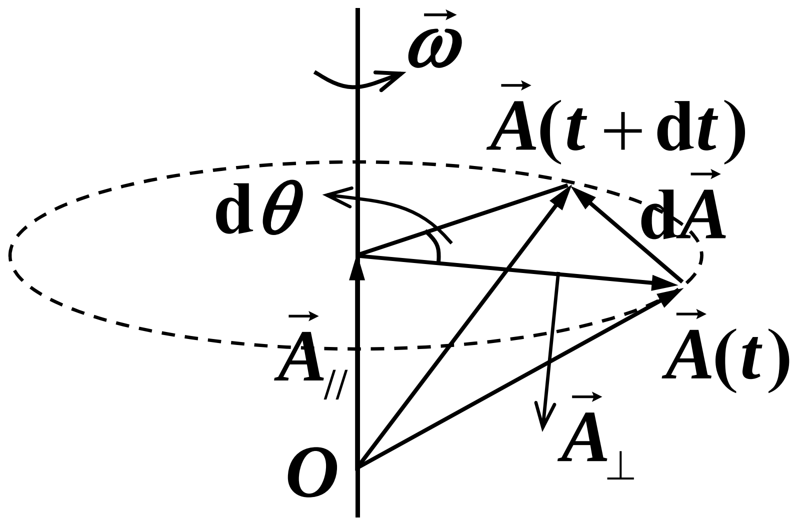
6. 角量与线量的关系（牢记，刚体要用）

$$\text{线量}\left\{\begin{aligned} \upsilon &= R\omega \\ a_t &= \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = R\alpha \\ a_n &= \frac{\upsilon^2}{R} = R\omega^2 \end{aligned}\right\}\text{角量}$$

一个非常重要的公式

设矢量 $\vec{A}$ 的始点在轴上，保持长度不变，以 $\vec{\omega}$ 绕轴瞬时转动，则有：

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{A}}$$



证明： $d\vec{A}=d\theta\left|\vec{A}_{\perp}\right|\hat{\omega}\times\hat{A}_{\perp}$

$$\Rightarrow\ \frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\left|\vec{A}_{\perp}\right|\hat{\omega}\times\hat{A}_{\perp}=(\frac{d\theta}{dt}\hat{\omega})(\left|\vec{A}_{\perp}\right|\times\hat{A}_{\perp})=\vec{\omega}\times\vec{A}_{\perp}$$

$$\Rightarrow\ \frac{d\vec{A}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{A}_{\perp}=\vec{\omega}\times(\vec{A}_{\perp}+\vec{A}_{//})=\vec{\omega}\times\vec{A}$$

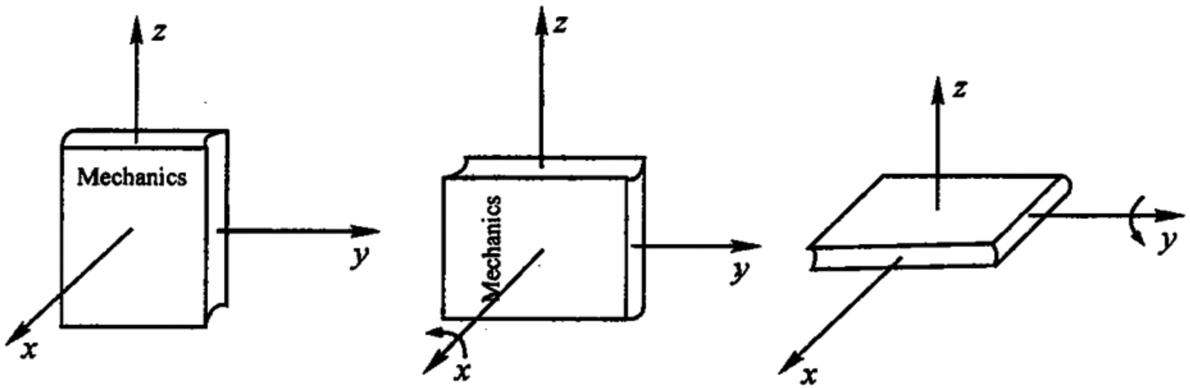
*四. 转动的进一步讨论

1. 角位移能否定义成矢量

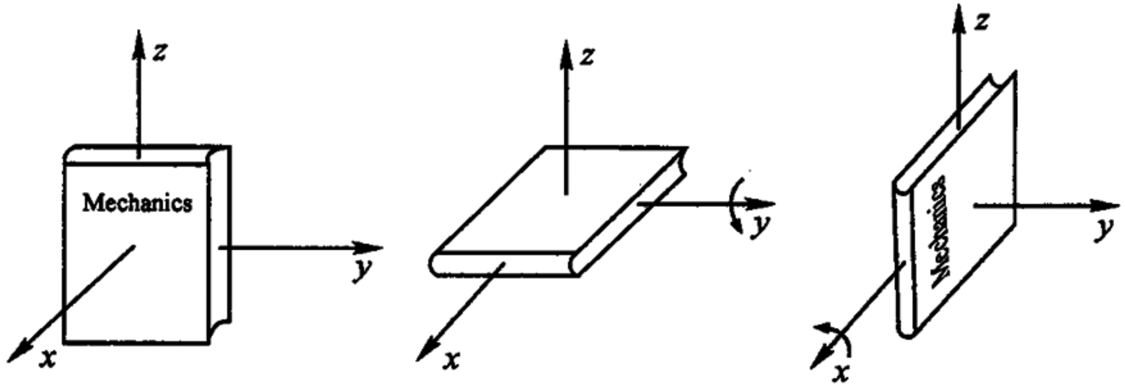
矢量满足加法的交换律。举例：一个物体先位移 $\Delta\vec{r}_1$，再位移 $\Delta\vec{r}_2$，和先位移 $\Delta\vec{r}_2$，再位移 $\Delta\vec{r}_1$，产生的结果即总位移一样：$\Delta\vec{r}_1+\Delta\vec{r}_2=\Delta\vec{r}_2+\Delta\vec{r}_1$。所以位移可以定义成矢量。

角位移表示物体或质点绕某个轴转过一个角度：

(a) 先绕 x 轴转 90°，再绕 y 轴转 90°



(b) 先绕 y 轴转 90°，再绕 x 轴转 90°



(*a*)、(*b*) 结果不同表明：物体绕 **2** 个相交轴相继转过 **2** 个有限角度，结果和 **2** 次转动的次序有关。

这意味着：如果把有限大的角位移定义成矢量 $\Delta\vec{\theta}$，则两个有限大的角位移不满足矢量加法的交换律：

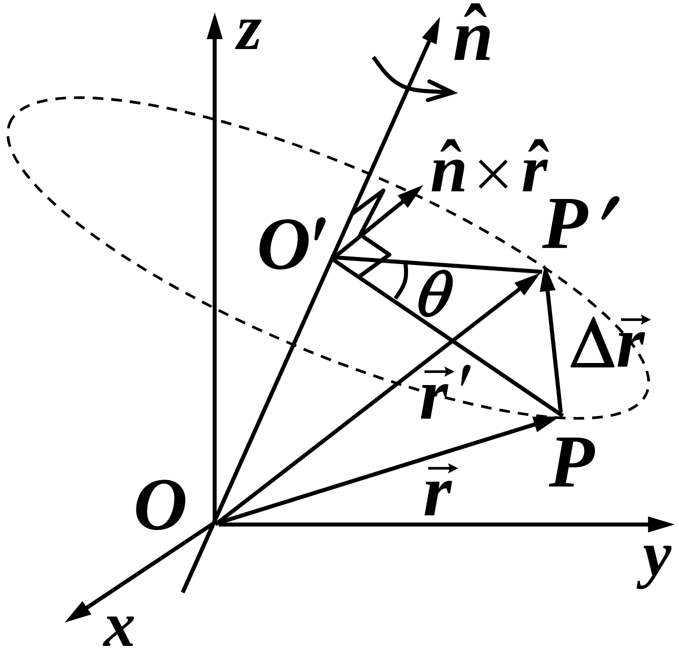
$$\Delta\vec{\theta}_1 + \Delta\vec{\theta}_2 \neq \Delta\vec{\theta}_2 + \Delta\vec{\theta}_1$$

所以有限大的角位移不能定义成矢量。

2. 转动的矩阵表示

问题：刚体绕某个轴转过一个角度后，刚体上的点相对转轴上的原点的位矢变化关系是什么？

坐标系原点 O 要选在转轴上，定义转轴方向 $\hat{n}$，与转动的绕向成右手关系。



要把 $\vec{r}'$ 用 $\vec{r}$、$\hat{n}$、θ 表示出来

$$\vec{r}' = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'}$$

$$\overrightarrow{OO'} = (\vec{r}\cdot\hat{n})\hat{n}$$

$$\overrightarrow{O'P} = \vec{r} - \overrightarrow{OO'} = \vec{r} - (\vec{r}\cdot\hat{n})\hat{n}$$

$$\overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{O'P}\cos\theta + (\hat{n}\times\vec{r})\sin\theta \qquad (O'P' = O'P)$$

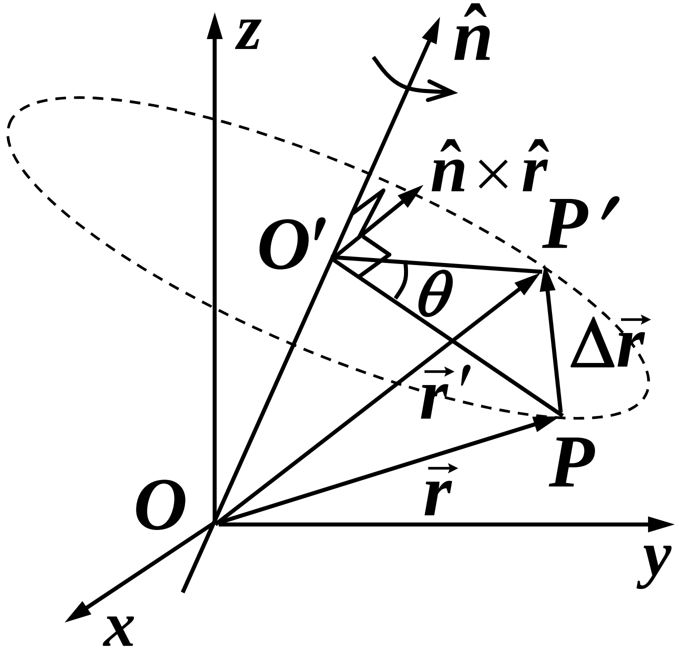
$$\vec{r}\,' = (\vec{r}\cdot\hat{n})\hat{n} + [\vec{r} - (\vec{r}\cdot\hat{n})\hat{n}]\cos\theta + (\hat{n}\times\vec{r})\sin\theta \qquad (1)$$

设： $\vec{r}\,' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\hat{n} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$

α, β, γ 是 $\hat{n}$ 的方向余弦。



(1) 式可以表示为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

记为： $\mathrm{r}' = \mathrm{R}(\hat{n}, \theta)\cdot \mathrm{r}$ 　　R 称为转动矩阵

对刚体：$\left|\vec{r}\,'\right| = \left|\vec{r}\right|$，**R** 是正交矩阵：$\left|\mathbf{R}\right| = 1$

$$R_{11} = \cos^2\frac{\theta}{2} + (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)\sin^2\frac{\theta}{2} \qquad R_{12} = 2\sin\frac{\theta}{2}(\alpha\beta\sin\frac{\theta}{2} - \gamma\cos\frac{\theta}{2})$$

$$R_{13} = 2\sin\frac{\theta}{2}(\alpha\gamma\sin\frac{\theta}{2} + \beta\cos\frac{\theta}{2})$$

$$R_{21} = 2\sin\frac{\theta}{2}(\alpha\beta\sin\frac{\theta}{2} + \gamma\cos\frac{\theta}{2}) \qquad R_{22} = \cos^2\frac{\theta}{2} + (\beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2)\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$R_{23} = 2\sin\frac{\theta}{2}(\beta\gamma\sin\frac{\theta}{2} - \alpha\cos\frac{\theta}{2})$$

$$R_{31} = 2\sin\frac{\theta}{2}(\alpha\gamma\sin\frac{\theta}{2} - \beta\cos\frac{\theta}{2}) \qquad R_{32} = 2\sin\frac{\theta}{2}(\beta\gamma\sin\frac{\theta}{2} + \alpha\cos\frac{\theta}{2})$$

$$R_{33} = \cos^2\frac{\theta}{2} + (\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)\sin^2\frac{\theta}{2}$$

3. 有限角位移非矢量

设有 2 个相交轴，交点是原点 O。刚体绕 2 个轴的转动矩阵分别是 $\mathrm{R}(\hat{\boldsymbol{n}}_1,\theta_1)$、$\mathrm{R}(\hat{\boldsymbol{n}}_2,\theta_2)$，一般情况下：

$$\mathrm{R}(\hat{\boldsymbol{n}}_2,\theta_2)\cdot\mathrm{R}(\hat{\boldsymbol{n}}_1,\theta_1)\neq\mathrm{R}(\hat{\boldsymbol{n}}_1,\theta_1)\cdot\mathrm{R}(\hat{\boldsymbol{n}}_2,\theta_2)$$

说明刚体先绕轴 1 再绕轴 2 转，和先绕轴 2 再绕轴 1 转的结果不同，和转动次序有关。

所以角位移一般不能定义成矢量。

4. 无穷小角位移是矢量

如果角位移无穷小，即转角为 $\mathrm{d}\theta$，对转动矩阵的矩阵元中的$\sin\theta/2$、$\cos\theta/2$ 作泰勒展开，保留到 1 阶项，转动矩阵为：

$$\mathrm{R}(\hat{n},\mathrm{d}\theta)=\begin{bmatrix}1 & -\gamma\mathrm{d}\theta & \beta\mathrm{d}\theta\\ \gamma\mathrm{d}\theta & 1 & -\alpha\mathrm{d}\theta\\ -\beta\mathrm{d}\theta & \alpha\mathrm{d}\theta & 1\end{bmatrix}$$

这时刚体绕两个相交轴连续发生 2 次无穷小转动，转动矩阵满足对易关系：

$$\mathrm{R}(\hat{n}_2,\mathrm{d}\theta_2)\cdot\mathrm{R}(\hat{n}_1,\mathrm{d}\theta_1)=\mathrm{R}(\hat{n}_1,\mathrm{d}\theta_1)\cdot\mathrm{R}(\hat{n}_2,\mathrm{d}\theta_2)$$

说明在无穷小角位移的情况下，刚体先绕轴 1 再绕轴 2 转，和先绕轴 2 再绕轴 1 转的结果相同，和转动次序无关。

所以无穷小角位移可以定义成矢量。

事实上，在无穷小角位移的情况下，根据：

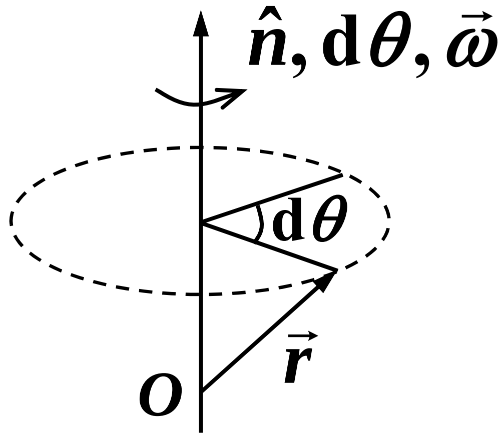
$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}(\hat{n}, \mathrm{d}\theta) \cdot \mathbf{r}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma\mathrm{d}\theta & \beta\mathrm{d}\theta \\ \gamma\mathrm{d}\theta & 1 & -\alpha\mathrm{d}\theta \\ -\beta\mathrm{d}\theta & \alpha\mathrm{d}\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

重新用矢量关系表示为：

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + (\alpha \mathrm{d}\theta\, \vec{i} + \beta \mathrm{d}\theta\, \vec{j} + \gamma \mathrm{d}\theta\, \vec{k}) \times \vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}\theta\, \hat{n}) \times \vec{r}$$



记为： $\mathrm{d}\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{d}\theta} \times \vec{r}$

两边除以dt，得到熟知的关系：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}\theta}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{n} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

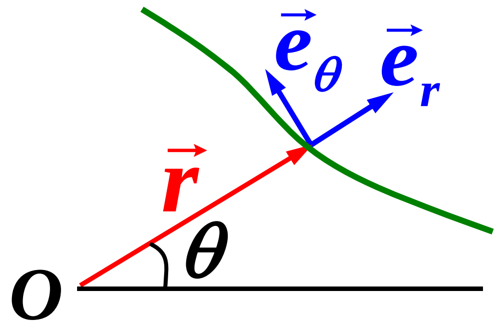
$\overrightarrow{\mathrm{d}\theta} = \mathrm{d}\theta\, \hat{n}$ — 无穷小角位移矢量

$\vec{\omega} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}\theta}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{n}$ — 角速度矢量

$\hat{n}$, $\overrightarrow{\mathrm{d}\theta}$, $\vec{\omega}$ 和转动的绕向成右手关系。

§ 1.5 平面极坐标系

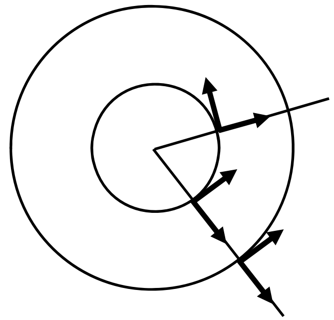
坐标：r，θ（逆时针为正）



基矢量：

径向 $\vec{e}_r$：指向 r 增加方向

横向 $\vec{e}_\theta$：指向 θ 增加方向

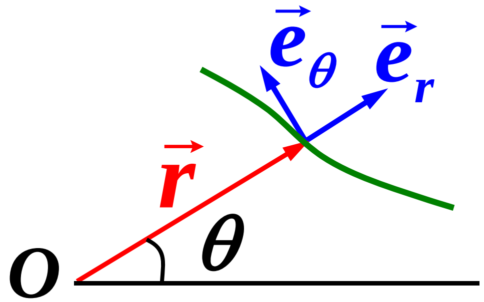


特点：$\vec{e}_r$，$\vec{e}_\theta$ 是 θ 的函数，与 r 无关

$$\mathrm{d}\vec{e}_r = \mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta\,,\quad \mathrm{d}\vec{e}_\theta = -\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_r$$（自己证）

平面极坐标系适合 $\vec{a}$ 指向定点的情况：如有心力场

位矢：$\boxed{\vec{r} = r\vec{e}_r}$



速度：$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$

$$= \frac{\mathrm{d}(r\vec{e}_r)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} \quad (\mathrm{d}\vec{e}_r = \mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta)$$

$$= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

径向速度：$\boxed{v_r = \dot{r}}$

横向速度：$\boxed{v_\theta = r\dot{\theta}}$

加速度： $\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta$

$$a = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta\right)/\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_r + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \left[\mathrm{d}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)/\mathrm{d}t\right]\vec{e}_\theta + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$$

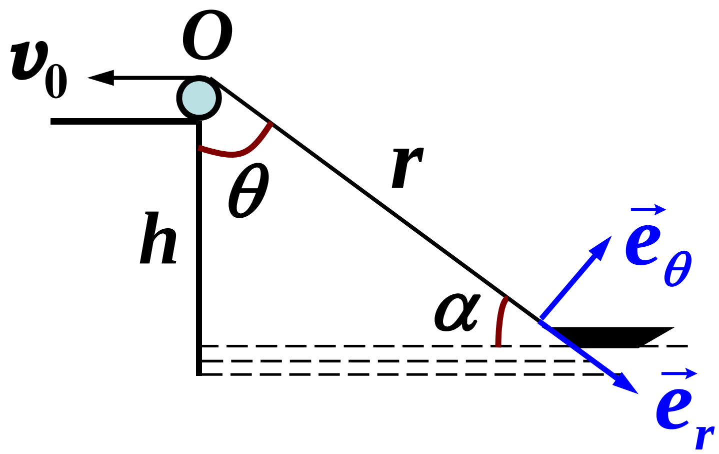
$$(\mathrm{d}\vec{e}_r = \mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta\,, \quad \mathrm{d}\vec{e}_\theta = -\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_r\,)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2}$$

$$\boxed{a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})}$$

【例】绞车恒定速率$\boldsymbol{v}_0$收绳，求：船的速率$\boldsymbol{v}$



解：如图建立极坐标系

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v_0$$

几何关系：$\cos\theta = h/r \quad \Rightarrow \quad \sin\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

$$v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\left(\frac{h}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}v_0$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \frac{v_0}{\sin\theta} = \frac{v_0}{\cos\alpha}$$

§1.6 相对运动

在不同参考系中观察同一物体的运动，它们之间的相互关系如何？

静止参考系：相对观察者静止的参考系 S

运动参考系：相对观察者运动的参考系 S'

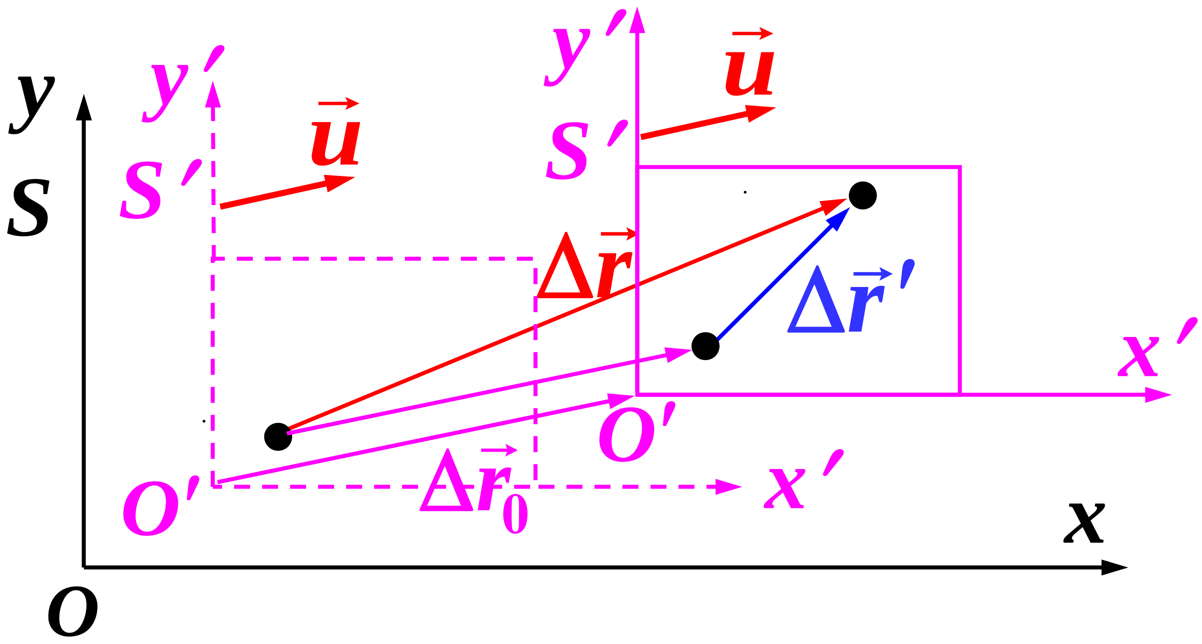
绝对运动：物体相对静止参考系 S 的运动

相对运动：物体相对运动参考系 S' 的运动

牵连运动：运动参考系 S' 相对静止参考系 S 的运动

一. S′系相对 S 系作平动

S′系的参考物相对 S 系作平动



根据绝对时空观可得：

位移变换关系：

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}_0}$$

速度变换关系：

$$\boxed{\vec{v}=\vec{v}'+\vec{u}}$$ —— 伽利略速度变换

$\vec{v}$ —— 绝对速度

$\vec{v}'$ —— 相对速度

$\vec{u}$ —— 牵连速度

A, B, C 间只相对平动

$$\boxed{\vec{v}_{A对B}=\vec{v}_{A对C}+\vec{v}_{C对B}}$$

加速度变换关系： $$\boxed{\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_0}$$

注意：

1. 伽利略速度变换不是速度的合成与分解：

速度的合成与分解是在同一参考系下的数学上的矢量运算，总能成立；

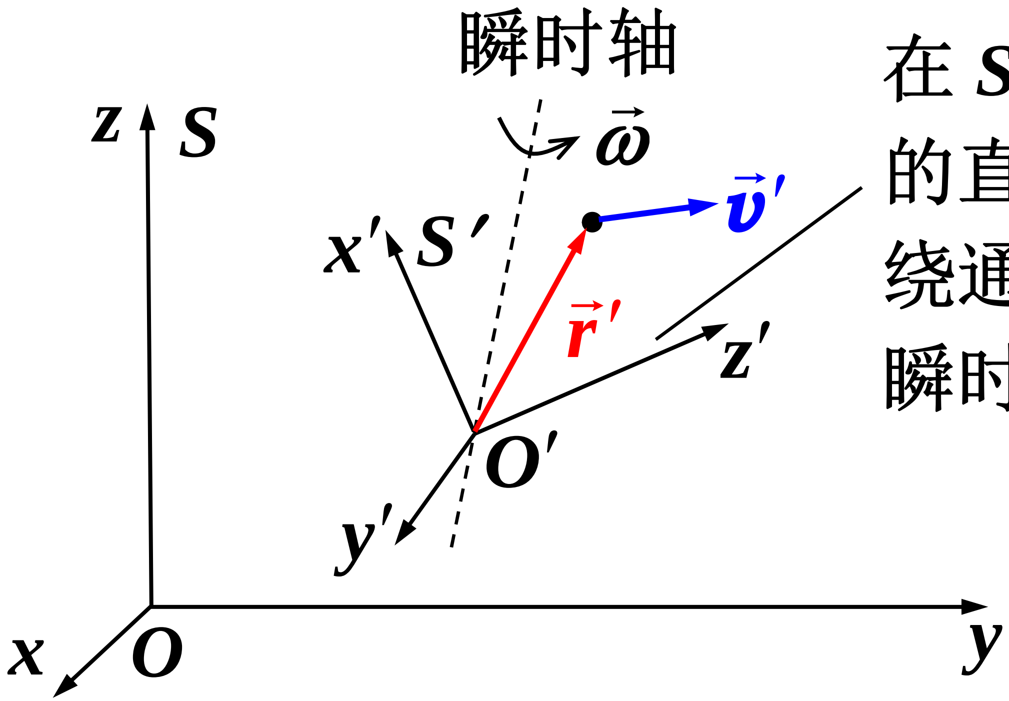
伽利略速度变换是不同参考系下速度的变换关系，反映了时空变换关系，具有深刻的物理含义。

2. 经典力学和相对论都认可相对运动关系：

$$\boxed{\vec{v}_{A对B} = -\vec{v}_{B对A}}$$

二. S'系相对 S 系作转动

S'系的参考物相对 S 系作定点转动，角速度为 $\vec{\omega}$， 角加速度为 $\vec{\alpha}$。



在 S 系，代表 S'系的直角坐标框架 $x'y'z'$ 绕通过固定点 O' 的瞬时轴作定点转动

- 速度变换关系仍满足： $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

- 加速度变换关系： $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \vec{a}_{cor}$

$\vec{a}$ — 绝对加速度

$\vec{a}'$ — 相对加速度

$\vec{a}_0 = \vec{a}_c + \vec{a}_\tau$ — 牵连加速度

($\vec{a}_c = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ $\vec{a}_\tau = \vec{\alpha} \times \vec{r}'$)

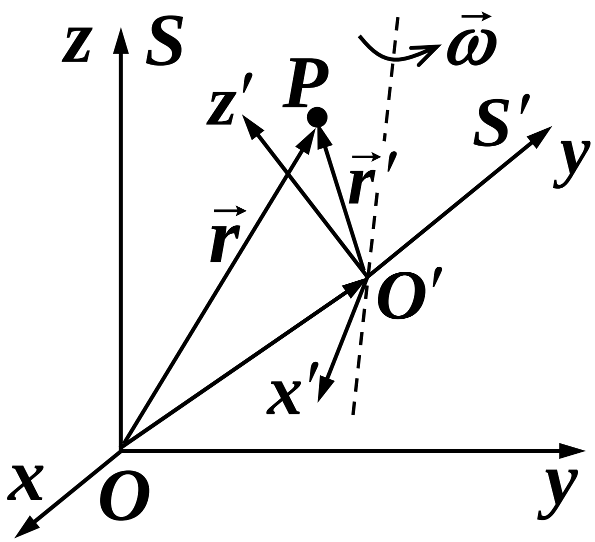
向轴加速度 切向加速度

$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ — 科里奥利加速度

证明

虚线是转动系 S' 的瞬时转轴，代表 S' 系的直角坐标框架 $x'y'z'$ 以角速度 $\vec{\omega}$ 相对 S 系转动。原点 O' 必需选在转轴上，O' 在 S 系不动。

质点 P 相对 S、S' 系的位矢满足：



$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'(t)$$

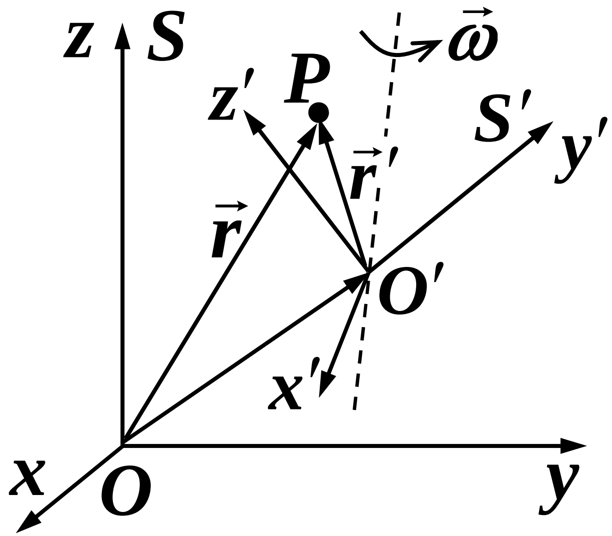
S、S' 系对上式理解不一样：

S 系：

$$x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$= \overrightarrow{OO'} + x'(t)\vec{i}'(t) + y'(t)\vec{j}'(t) + z'(t)\vec{k}'(t) \qquad (1)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \overrightarrow{OO'}$ 是常矢量，$\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ 非常矢量，以角速度 $\vec{\omega}$ 转动。



S′ 系：

$$x(t)\vec{i}(t) + y(t)\vec{j}(t) + z(t)\vec{k}(t)$$

$$= \overrightarrow{OO'} + x'(t)\vec{i}' + y'(t)\vec{j}' + z'(t)\vec{k}'$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \overrightarrow{OO'}$ 非常矢量，在转动，$\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ 是常矢量。

（1）式两边对时间求导：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\vec{i}' + x'\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\vec{j}' + y'\frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\vec{k}' + z'\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t}$$

利用之前学的，对长度保持不变的绕轴旋转的矢量：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{A} \qquad (2)$$

可得： $\vec{v}=\vec{v}'+x'\vec{\omega}\times\vec{i}\,'+y'\vec{\omega}\times\vec{j}\,'+z'\vec{\omega}\times\vec{k}\,'$

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}\,' \qquad (3)$$

从（3）式可知：在静止系 S 中求转动系 S' 中的某矢量 $\vec{A}'=A'_x\vec{i}\,'+A'_y\vec{j}\,'+A'_z\vec{k}\,'$ 对时间的导数，结果是：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{A}'}{\mathrm{d}t}+\vec{\omega}\times\vec{A}' \qquad (4)$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 是静止系 S 中对 t 求导，$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 不变，$\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ 变。

$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}$是转动系 S'中对 t 求导，$\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$ 不变，$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 变。

(3) 式对 t 求导，利用 (4) 式可得：

$$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{\omega}\times\vec{v}'+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times(\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')+\vec{\alpha}\times\vec{r}'+2\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

特例：S'系相对 S 系作匀角速度转动

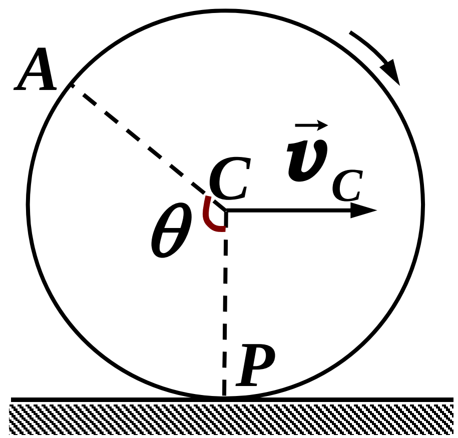
这时 S'系的参考物相对 S 系作匀速定轴转动：

$\vec{\omega}=$常矢量，$\vec{\alpha}=0$，切向加速度为零。

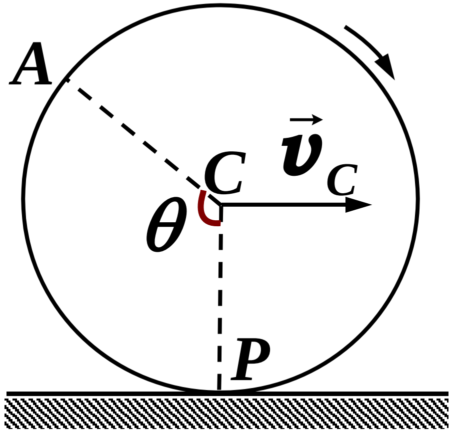
【例】轮子在水平面做无滑滚动：接触点 P 相对水平面速度为零，瞬时静止，轮子心 C 相对水平面的速度为 $\vec{v}_C$ 。

（1）证明 P 点相对 C 点的速度等于 $-\vec{v}_C$ ；

（2）求 A 点相对水平面的速度。



（1）证明 P 点相对 C 点的速度等于 $-\vec{v}_C$



设：$\vec{v}_P$ 是 P 点相对水平面速度

$\vec{v}'_P$ 是 P 点相对 C 点的速度

根据伽利略速度变换有：

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_C$$

无滑动滚动条件： $\vec{v}_P = 0$

所以 $\vec{v}'_P = -\vec{v}_C$

（2）求 A 点相对水平面的速度

设：$\vec{v}_A$ 是 A 点相对水平面速度

$\vec{v}'_A$ 是 A 点相对 C 点速度

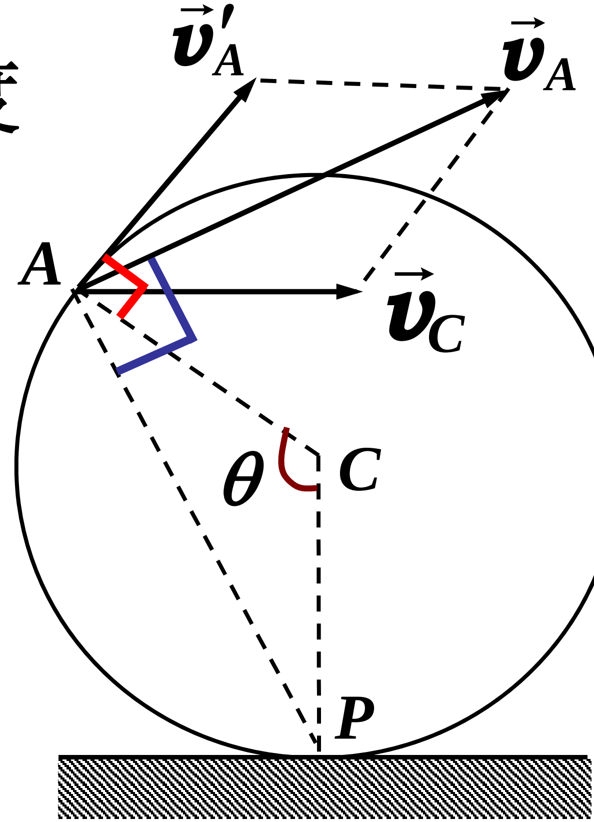
$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}_C$$

$$\vec{v}'_A \perp AC$$

P 点相对水平面静止，

P 点为瞬时转动中心，

$$\therefore \vec{v}_A \perp AP$$



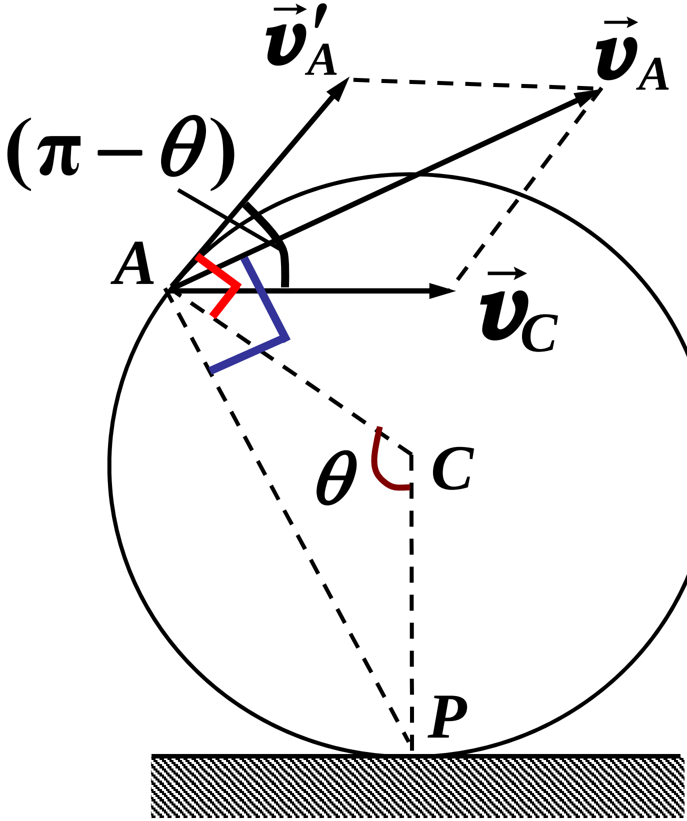
由上面两个垂直关系知：

$$\boldsymbol{v}'_A = \boldsymbol{v}_C$$

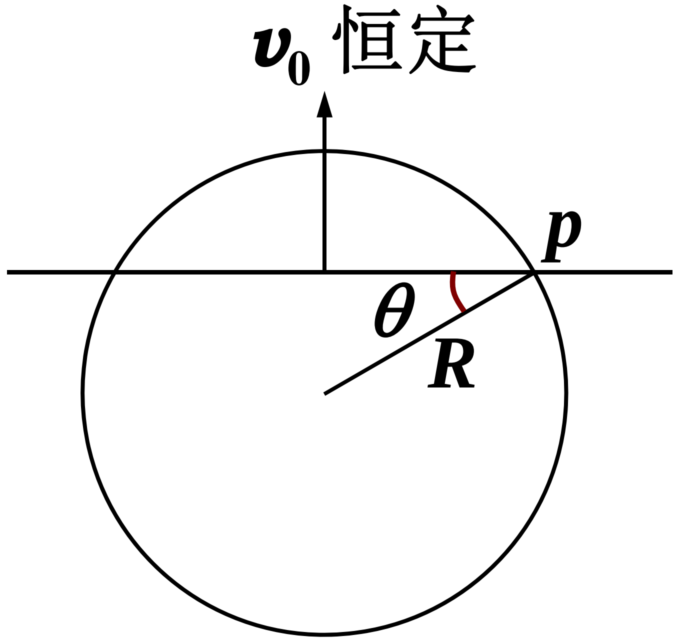
$\vec{\boldsymbol{v}}'_A$ 和 $\vec{\boldsymbol{v}}_C$ 夹角是 $(\pi - \theta)$

A 点 相对水平面的速率：

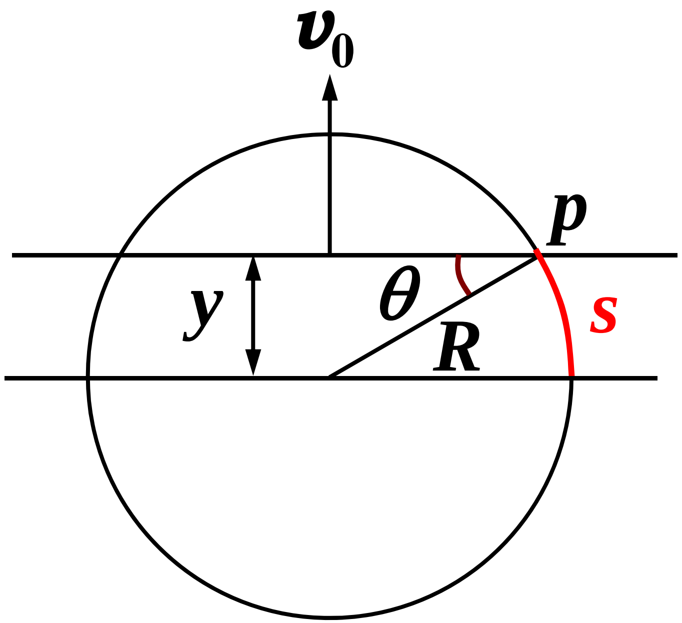
$$v_A = 2v_C \sin\frac{\theta}{2}$$



【例】圆不动，横线以 $\boldsymbol{v}_0$ 恒定运动，求交点 p 的速度和加速度。



求 $\boldsymbol{v}_p$、$\boldsymbol{a}_p$



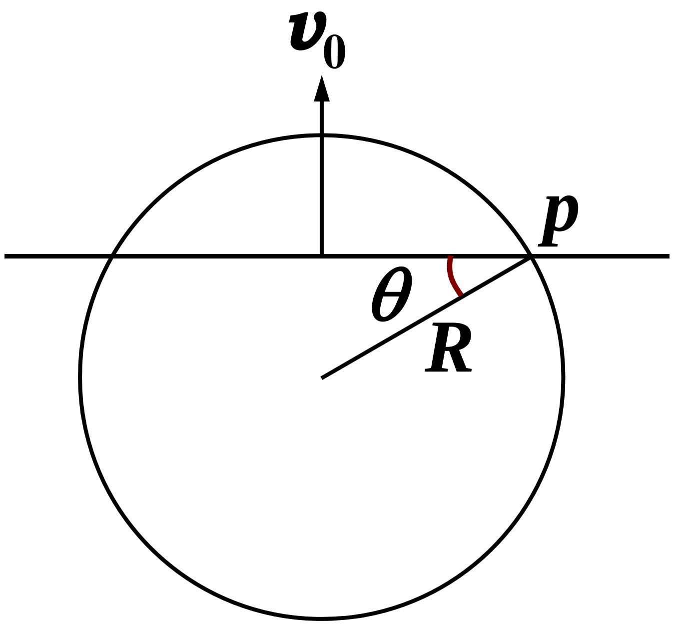
$$y = R\sin\theta \qquad s = R\theta$$

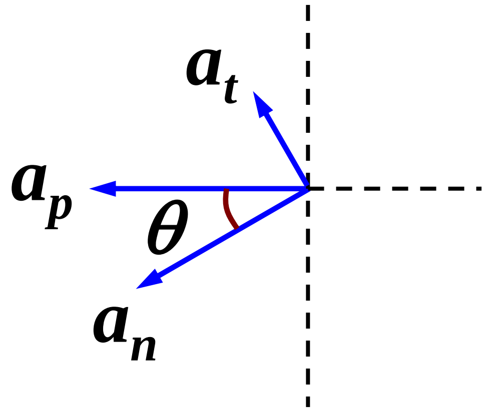
$$\dot{y} = v_0 \quad \Rightarrow R\cos\theta \cdot \dot{\theta} = v_0$$

$$v_p = \dot{s} = R\dot{\theta} = \frac{v_0}{\cos\theta}$$

$$a_t = \dot{v}_p = -\frac{v_0}{\cos^2\theta}(-\sin\theta)\cdot\dot{\theta} = \frac{v_0^2}{R\cos^3\theta}\sin\theta$$

$$a_n = \frac{v_p^2}{R} = \frac{v_0^2}{R\cos^2\theta} \qquad a_p = \frac{v_0^2}{R\cos^3\theta}$$

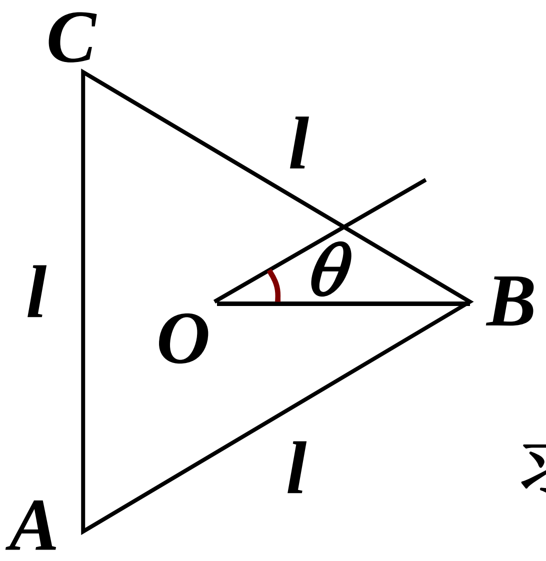




求 a_p 另法：　易知 p 在竖直方向匀速运动，

所以 a_p 应沿水平方向

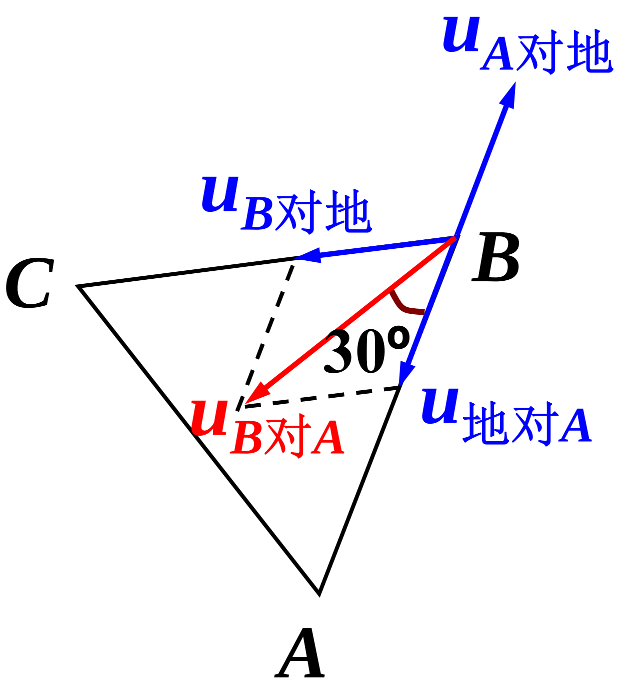
$$a_p = \frac{a_n}{\cos\theta} = \frac{v_p^2}{R\cos\theta} = \frac{v_0^2}{R\cos^3\theta}$$



【例】$t=0$ 时刻，ΔABC是正三角形，A, B, C 保持这样运动：A 向着 B，B 向着 C，C 向着 A 都以相对地的恒定速率 u 运动。

求：（1）相遇时间 Δt 。

（2）以图中 $t=0$ 时刻位置建立的极坐标系，B 的轨迹。



（1）相遇时间 Δt 。

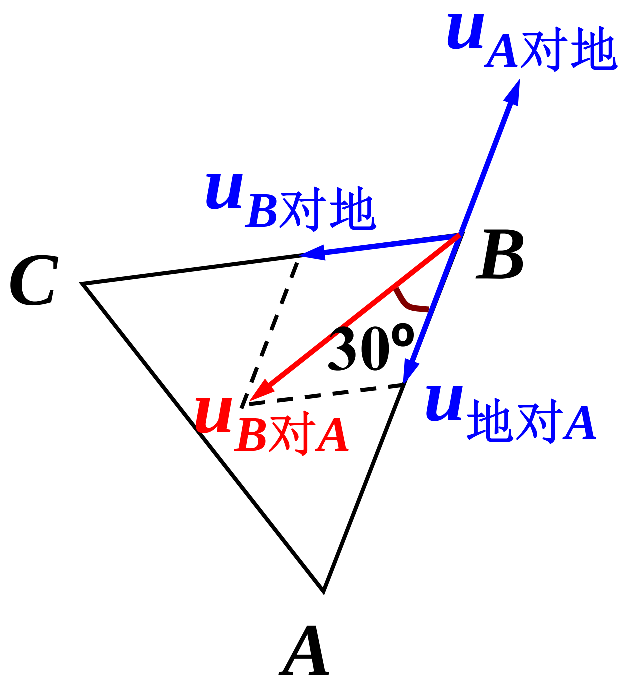
根据对称性，任意时刻 *ABC* 都保持正三角形，任意时刻：

$u_{B对A}$ 与 *A*、*B* 连线夹角 $=30^\circ$

$$u_{B对A}=2u\cos 30^\circ$$

所以相遇时间为：

$$\Delta t=\frac{l}{2u\cos 30^\circ \cos 30^\circ}=\frac{2l}{3u}$$



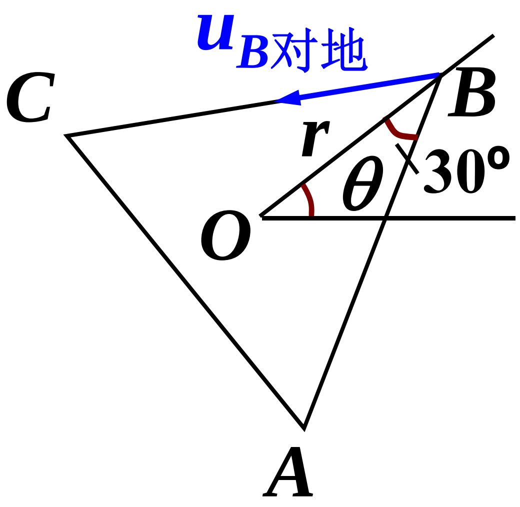
有人会问：$u_{B对A}$ 并不沿 *A*、*B* 连线方向，*A*、*B* 不能相遇。

实际上，以 *A* 为参考系看：

- *B* 仍然作曲线运动，终点是 *A*；
- 以 *A* 为极坐标原点，曲线切线就是 $u_{B对A}$ 方向，与矢径的夹角保持 30° 不变，所以：

$$\Delta t = 初始径向距离 / 径向速度$$

$$= l / 2u\cos30^\circ\cos30^\circ$$



也可在地面系求相遇时间 Δt

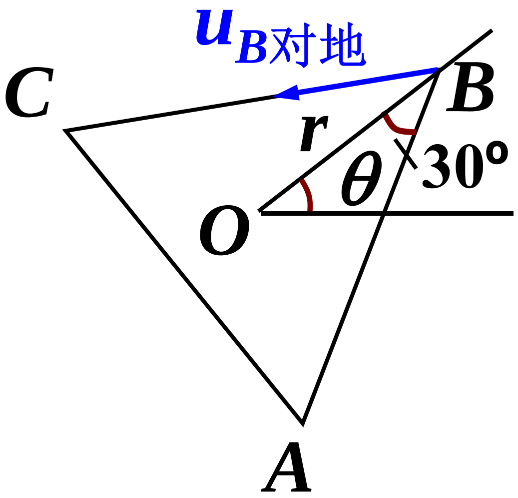
用题中极坐标系，任意时刻：

$u_{B对地}$ 与径向（OB 连线）的夹角不变，等于 30°，则径向速度大小不变，等于 $u\cos30°$ 。

$$\Delta t = \frac{初始OB距离}{u\cos30^\circ} = \frac{\sqrt{3}l/3}{u\cos30^\circ} = \frac{2l}{3u}$$

问题（1）的关键：极坐标系，径向速度为常数，

相遇时间 = 径向距离 / 径向速度



（2）B 的轨迹。

分析同前，可知：

径向速度 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-u\cos 30^\circ$

横向速度 $r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=u\sin 30^\circ$

消去 dt 得 $\dfrac{\mathrm{d}r}{r}=-\sqrt{3}\mathrm{d}\theta$

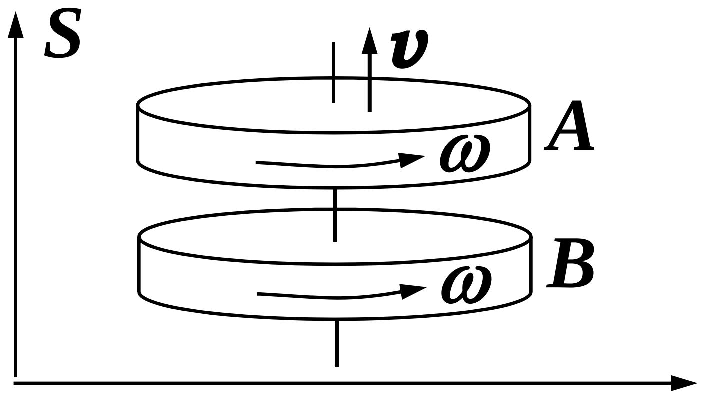
两边积分得 $\displaystyle\int_{\frac{l}{\sqrt{3}}}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r}=-\sqrt{3}\int_{0}^{\theta}\mathrm{d}\theta \Rightarrow r=\frac{l}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}\theta}$

一个重要问题

运动是相对的 $\Rightarrow$ 参考物的运动是相对的

$\Rightarrow$ 参考系是平动还是转动参考系也是相对的

设在静止系 $\boldsymbol{S}$ 中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 绕同轴以相同角速度转动，且 $\boldsymbol{A}$ 沿轴向上移动。



则 $\boldsymbol{A}$ 判定为一般参考系，$\boldsymbol{B}$ 判定为转动系。

若以 $\boldsymbol{B}$ 为静止系，则判定 $\boldsymbol{A}$ 为平动系，$\boldsymbol{S}$ 为一般系或转动系。

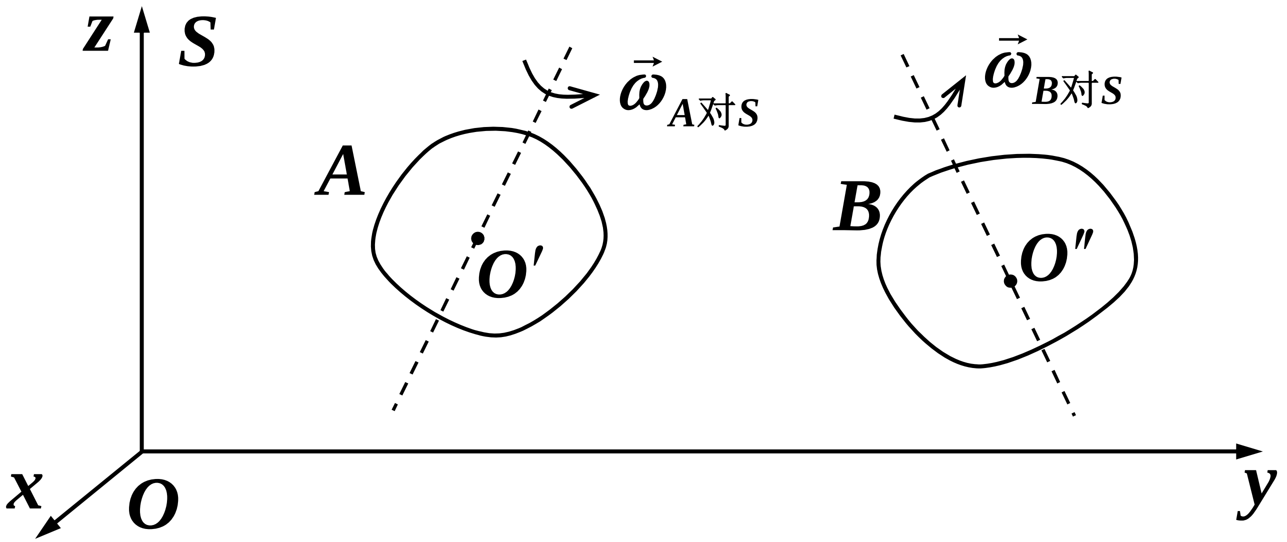
问题：“参考系是相对的”会不会对讨论物体的相对运动产生问题?

事实上，讨论相对运动问题时， 首先需要选择一个“静止系”，这样整个问题的“基准”就定了。

运动学中 “静止系”的选择是任意的，这对讨论物体的相对运动不会带来问题。

但在动力学中，“静止系”选择不再具有任意性，将可能造成严重问题，动力学中参考系选择需要以“惯性系”为基准，这是牛顿定律的要求。

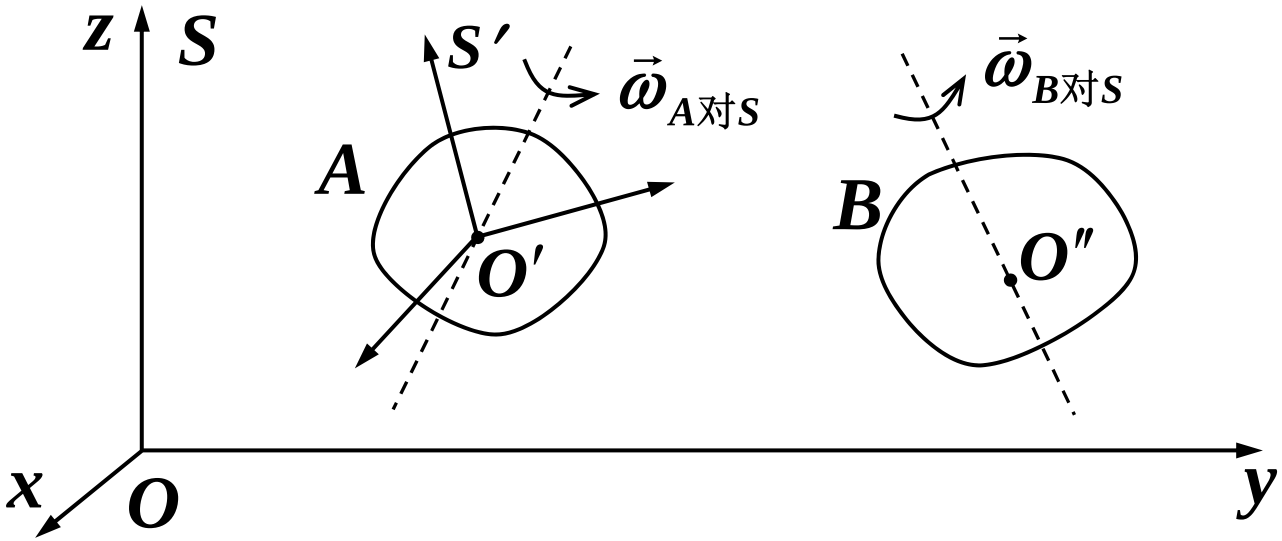
一个重要关系 — 相对角速度



设物体 A、B 在静止系 S 中分别以角速度 $\vec{\omega}_{A对S}$、$\vec{\omega}_{B对S}$ 绕定点 O'、O'' 作定点转动，则物体 B 相对 A 的角速度为:

$$\boxed{\vec{\omega}_{B对A} = \vec{\omega}_{B对S} + \vec{\omega}_{S对A} = \vec{\omega}_{B对S} - \vec{\omega}_{A对S}}$$

注意：经典力学默认相对转动关系 $\boxed{\vec{\omega}_{S对A}=-\vec{\omega}_{A对S}}$

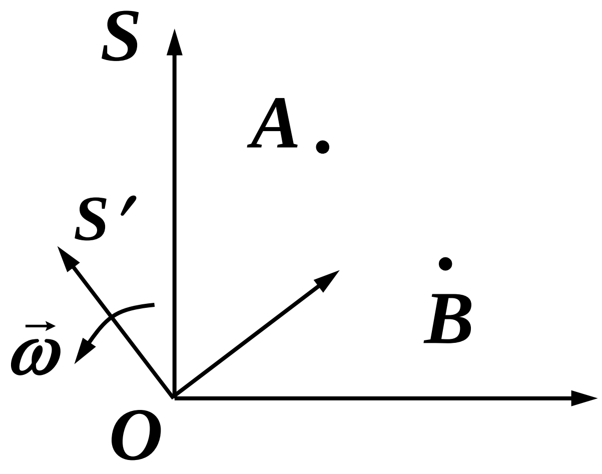


或者，在以 *A* 为参考物的转动系 *S′* 中，物体 *B* 的角速度为：

$$\boxed{\vec{\omega}_{B对S'}=\vec{\omega}_{B对S}+\vec{\omega}_{S\,对S'}=\vec{\omega}_{B对S}-\vec{\omega}_{S'\,对S}}$$

以上关系证明留待学习刚体后。

【思考】



设在静止系 S 中，转动系 S' 以角速度 $\vec{\omega}$ 转动。

两物体 A、B 相对 S 、S'系的速度分别为 $\vec{v}_A$、$\vec{v}_B$ 和 $\vec{v}'_A$、$\vec{v}'_B$。

根据转动系的相对运动关系有：

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A对O} \qquad \vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B对O}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{v}'_A - \vec{v}'_B + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{A对O} - \vec{r}_{B对O})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{A对B} = \vec{v}'_{A对B} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A对B}$$

S 、S'系给出不同的 A 相对 B 的速度！有何问题？