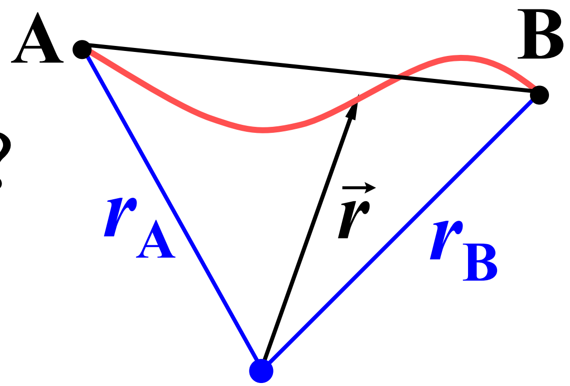
1. 质点沿曲线由A运动到B，$\vec{r}$ 为位矢径，则

$\left|\int_{(A)}^{(B)} \mathrm{d}\vec{r}\right|$、$\int_{(A)}^{(B)} |\mathrm{d}\vec{r}|$ 和 $\int_{(A)}^{(B)} \mathrm{d}r$ 分别代表什么？



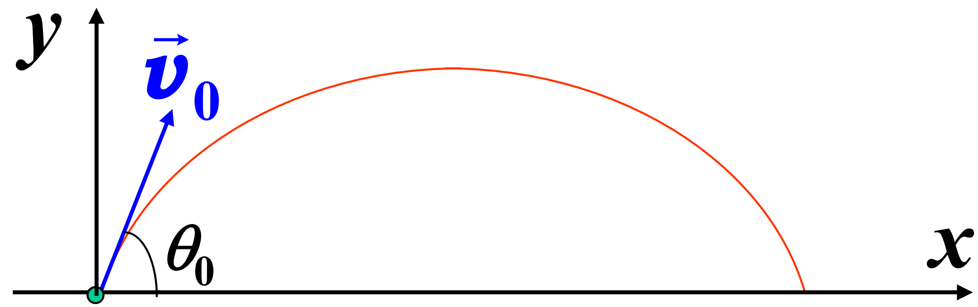
答：

$\left|\int_{(A)}^{(B)} \mathrm{d}\vec{r}\right|$ —— 从A到B总位移的大小（$\overline{AB}$）

$\int_{(A)}^{(B)} |\mathrm{d}\vec{r}|$ —— 从A到B的总路程（$\overset{\frown}{AB}$）

$\int_{(A)}^{(B)} \mathrm{d}r$ —— 末、初位矢大小之差（$r_B - r_A$）

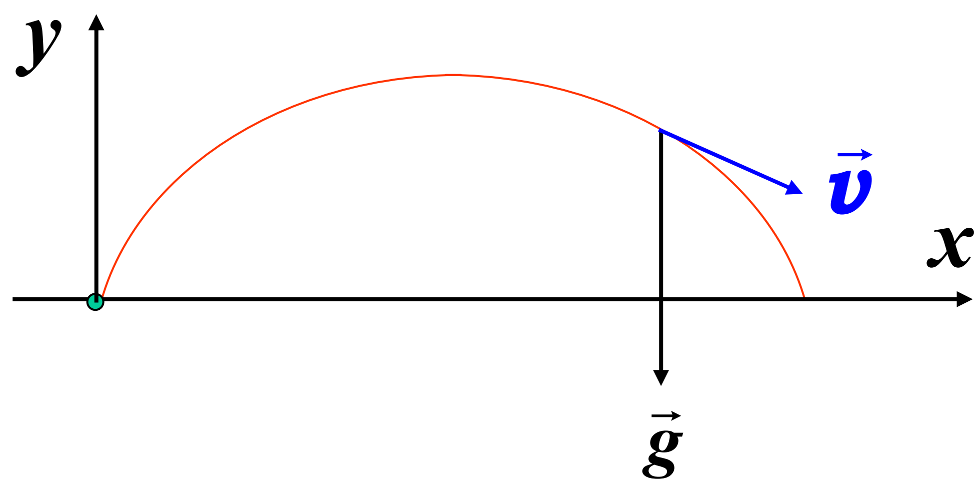
2. 一质点做抛物体运动（忽略空气阻力），回答质点在运动过程中：



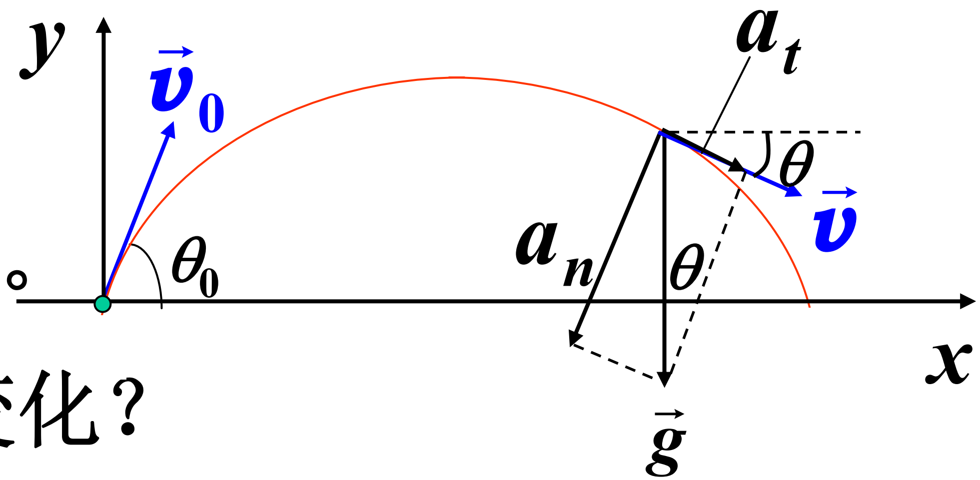
（1）$\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ 是否变化？

答：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{g}=\mathrm{const}.$

不变



（2）$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 是否变化？



答：$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a_t=g\sin\theta$，变化。

（3）法向加速度是否变化？

答：$a_n = g\cos\theta$，变化。

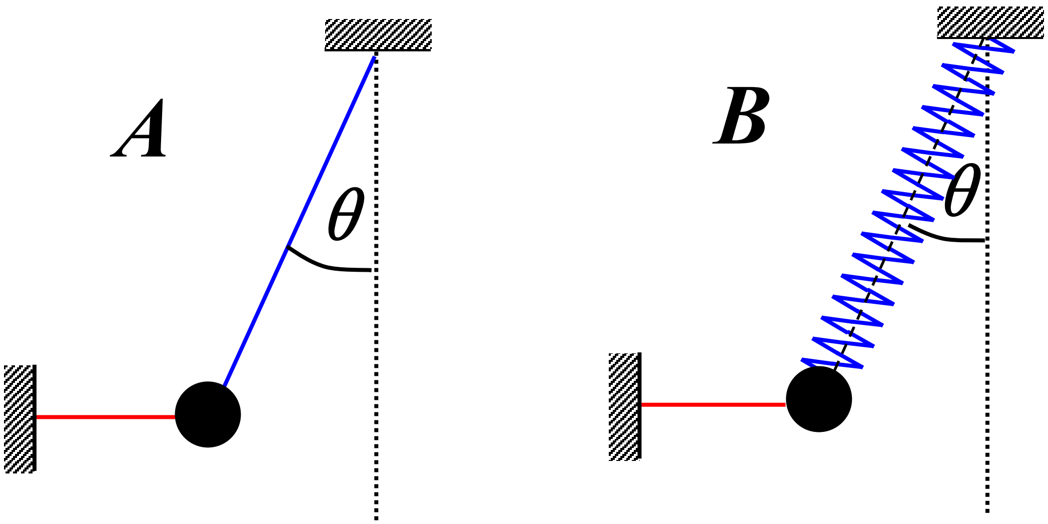
（4）最大和最小曲率半径在何处？各多大？

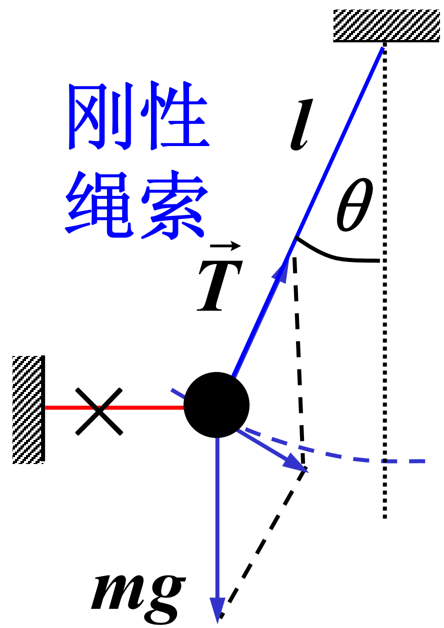
答：曲率半径 $\rho=\dfrac{v^2}{a_n}=\dfrac{v^2}{g\cos\theta}$

起、落点：$v_0 > v$，$\theta_0 > \theta \longrightarrow \rho=\rho_{\max}=\dfrac{v_0^2}{g\cos\theta_0}$

最高点：$v=v_0\cos\theta_0$，$\theta=0 \longrightarrow \rho=\rho_{\min}=\dfrac{v_0^2\cos^2\theta_0}{g}$

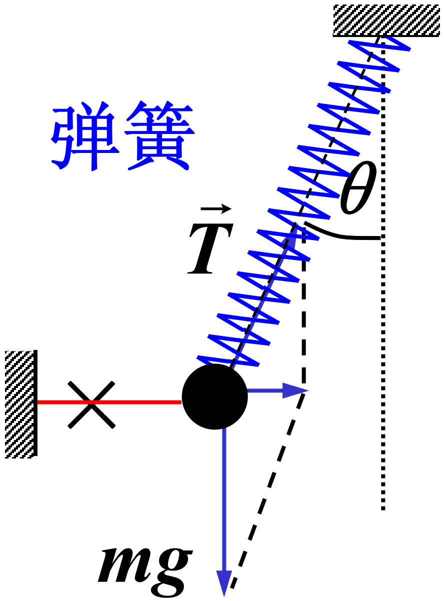
3. 一质量为 m 的小球按如图所示悬挂平衡。A 图是刚性绳索，B 图是弹簧。剪断水平绳索瞬间，两种情况下小球所受拉力多大?





刚性绳索$k\to\infty$，剪断瞬间其形变Δl虽无限小，但$k\Delta l$ 可取某有限值，保证小球沿圆周切线方向运动，小球速度为零，则法向受为零，

合力变成沿切线方向： $T = mg\cos\theta$

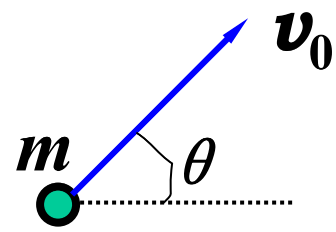


弹簧的k值有限，剪断瞬间形变Δl无限小，

则$k\Delta l$无限小，使合力几乎与剪断前相同：

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

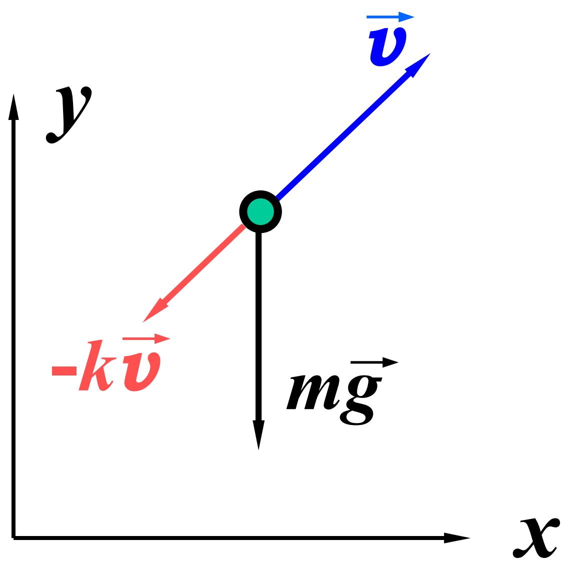
4. 以初速 $\boldsymbol{v}_0$、仰角 θ 斜抛一质量为 m 的小球，设空气阻力 $\vec{f}=-k\vec{v}$，



求： t 时刻小球速度。

解： 列牛顿方程：

$$m\vec{g}+(-k\vec{v})=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$



投影：

$$x:\ -kv_x=m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$y:\ -mg-kv_y=m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

对$\boldsymbol{v}_y$方程分离变量并积分：

$$\int_{v_{0y}}^{v_y}\frac{-\mathrm{d}v_y}{mg+kv_y}=\frac{1}{m}\int_0^t\mathrm{d}t$$

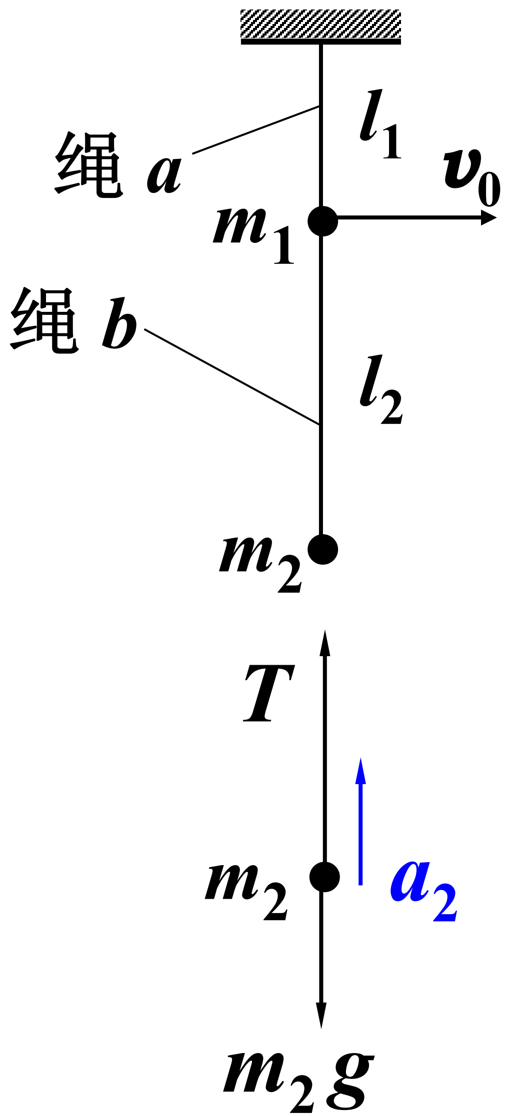
$$v_y=\left(\frac{mg}{k}+v_{0y}\right)e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}$$

对$\boldsymbol{v}_x$方程分离变量并积分：

$$\int_{v_{0x}}^{v_x}\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x}=-\frac{k}{m}\int_0^t\mathrm{d}t \quad\Rightarrow\quad v_x=v_{0x}e^{-\frac{k}{m}t}$$

体现直角坐标系运动描述独立性的优点。

5. 惯性系与非惯性系中牛顿定律的应用



打击 m_1 使之有水平速度 v_0，

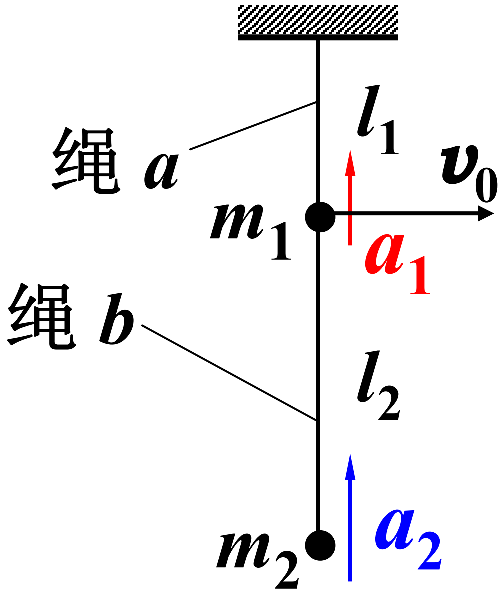
求：绳 b 中张力 T

解：方法一　以悬顶为参考系

打击 m_1 的瞬间 m_2 静止，但 m_2 的加速度 a_2 不一定为零，设其方向竖直向上。

由牛顿第二定律，有

$$T - m_2 g = m_2 a_2 \qquad (1)$$

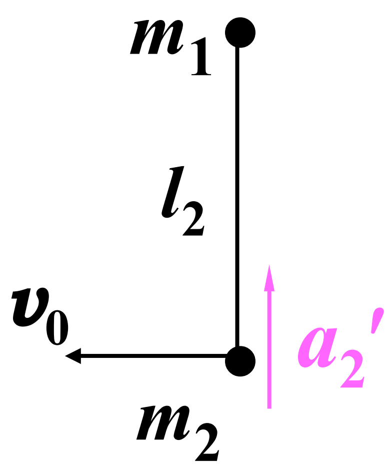


运动学关系：

m_1 加速度 $$a_1 = \frac{v_0^2}{l_1} \quad (2)$$

m_2 相对 m_1 的加速度朝上：

$$a_2' = \frac{v_0^2}{l_2} \quad (3)$$



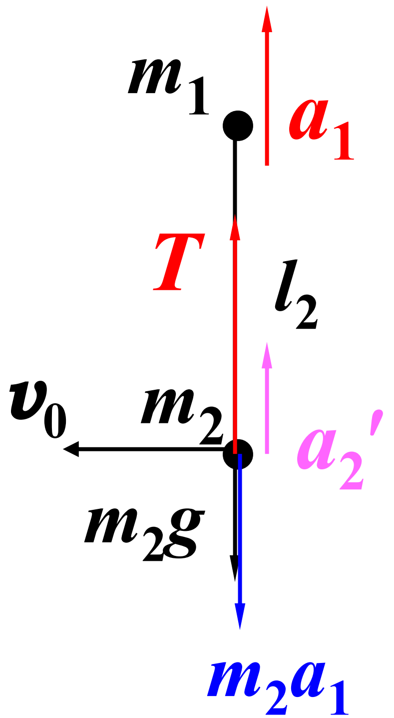
相对运动关系：

$$a_2 = a_2' + a_1 \quad (4)$$

（1）—（4）联立解得：

$$T = m_2\left(\frac{v_0^2}{l_1} + \frac{v_0^2}{l_2} + g\right)$$

方法二 选 m_1 为参考系 — 平动非惯性系



动力学关系：

$$T - m_2g - m_2a_1 = m_2a_2' \qquad (1)$$

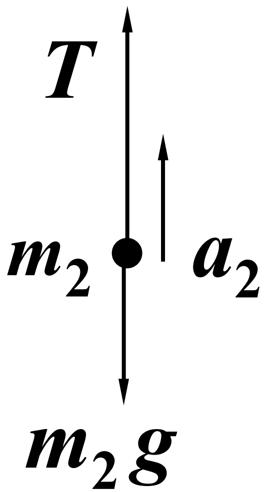
运动学关系： $a_1 = \dfrac{v_0^2}{l_1}$ （2）

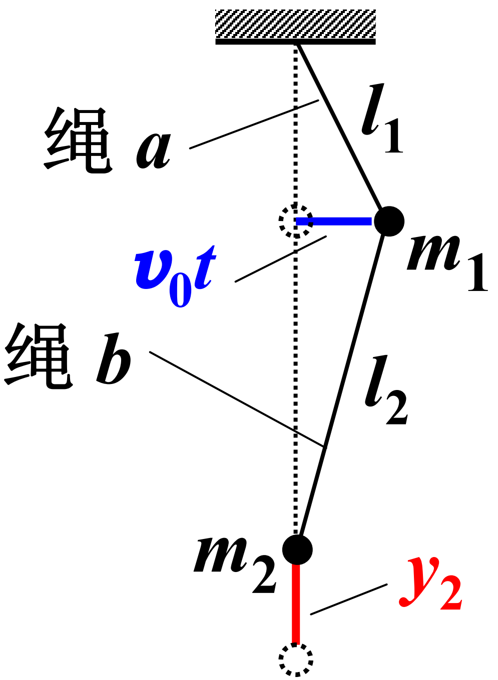
$$a_2' = \frac{v_0^2}{l_2} \qquad (3)$$

（1）—（3）联立解得：

$$T = m_2\left(\frac{v_0^2}{l_1} + \frac{v_0^2}{l_2} + g\right)$$

方法三 从几何约束关系求解





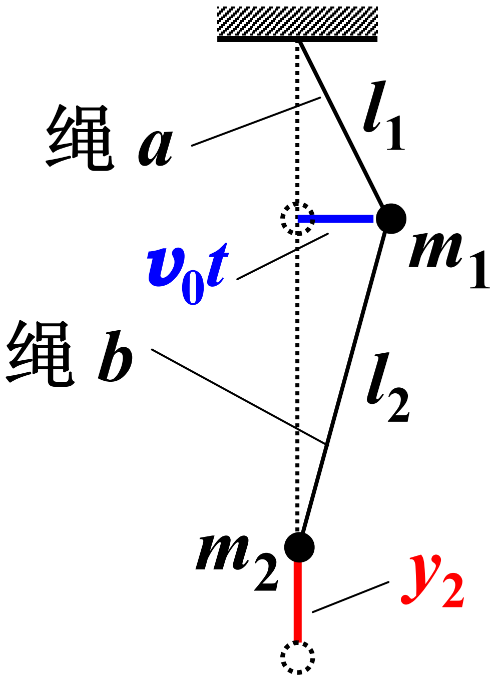
如前面对m_2的分析有：

$$T - m_2 g = m_2 a_2 \qquad （1）$$

设想在极短时间 t 内， m_1水平位移$v_0 t$， m_2竖直位移y_2，

有几何约束关系：

$$y_2 = l_1 - \sqrt{l_1^2 - (v_0 t)^2} + l_2 - \sqrt{l_2^2 - (v_0 t)^2} \qquad （2）$$



因 $v_0 t << l_1, l_2$，对（2）中 $(v_0 t)^2$ 作泰勒展开，保留一次项有：

$$y_2 = \frac{(v_0 t)^2}{2}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$$

m_2 瞬间从静止开始运动，有：

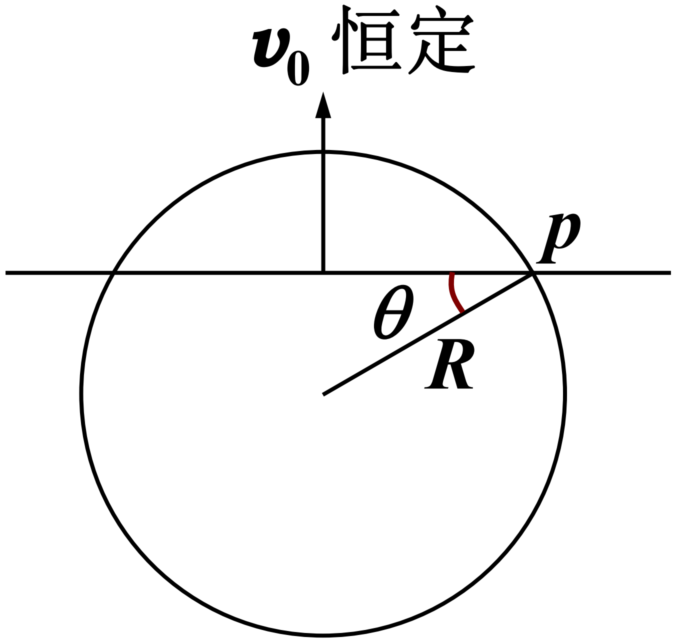
$$a_2 = \frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^2} = v_0^2\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \qquad (3)$$

（3）代入（1）得：

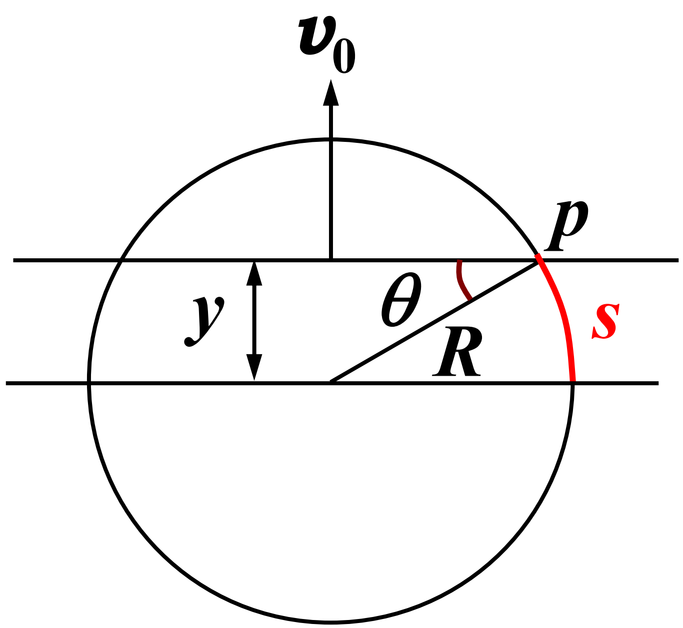
$$T = m_2\left(\frac{v_0^2}{l_1} + \frac{v_0^2}{l_2} + g\right)$$

6. 相对运动问题

圆不动，横线以 $\boldsymbol{v}_0$ 恒定运动，求交点 p 的速度和加速度。



求 $\boldsymbol{v}_p$、$\boldsymbol{a}_p$



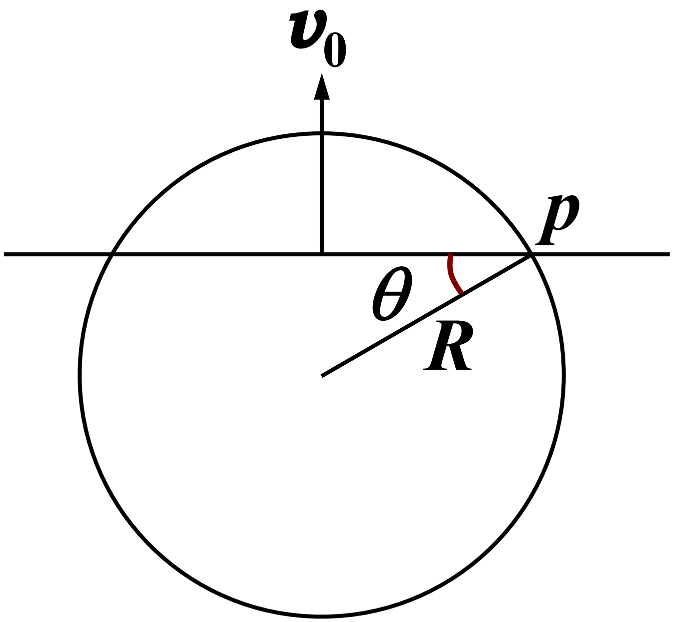
$$y = R\sin\theta \qquad s = R\theta$$

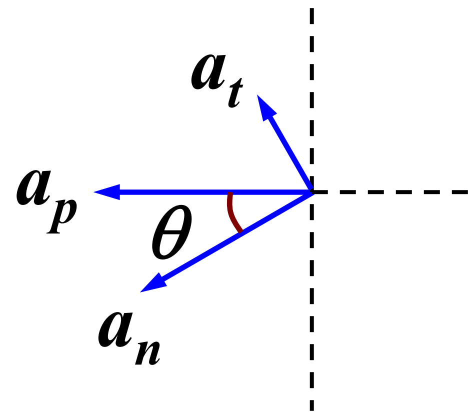
$$\dot{y} = v_0 \Rightarrow R\cos\theta\cdot\dot{\theta} = v_0$$

$$v_p = \dot{s} = R\dot{\theta} = \frac{v_0}{\cos\theta}$$

$$a_t = \dot{v}_p = -\frac{v_0}{\cos^2\theta}(-\sin\theta)\cdot\dot{\theta} = \frac{v_0^2}{R\cos^3\theta}\sin\theta$$

$$a_n = \frac{v_p^2}{R} = \frac{v_0^2}{R\cos^2\theta} \qquad a_p = \frac{v_0^2}{R\cos^3\theta}$$



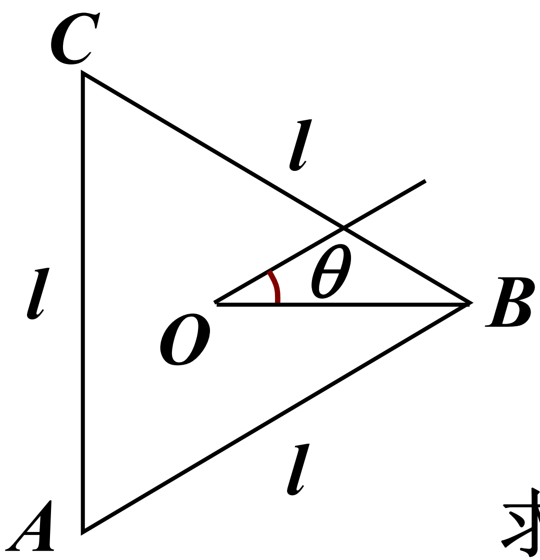


求 a_p 另法：　　易知 p 在竖直方向匀速运动，

所以 a_p 应沿水平方向

$$a_p = \frac{a_n}{\cos\theta} = \frac{v_p^2}{R\cos\theta} = \frac{v_0^2}{R\cos^3\theta}$$

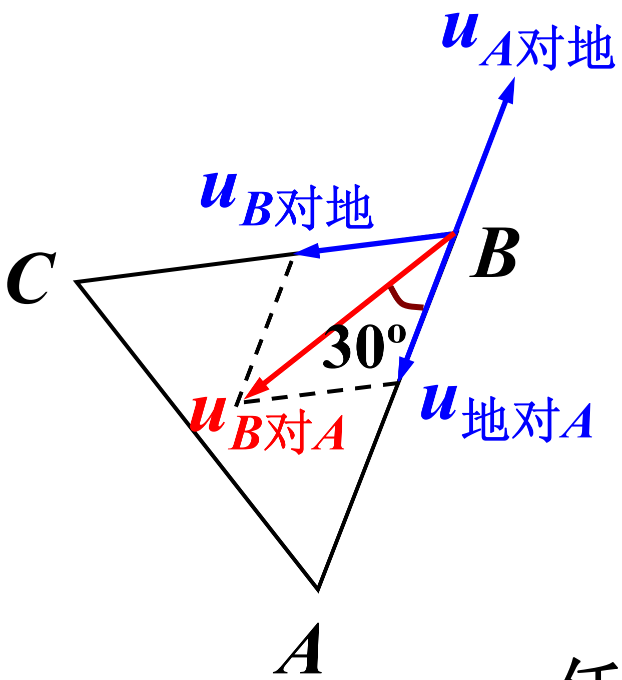
7. 相对运动问题



$t=0$ 时刻，ΔABC是正三角形，A, B, C 保持这样运动：A 向着 B，B 向着 C，C 向着 A 都以相对地的恒定速率 u 运动。

求（1）相遇时间 Δt 。

（2）以图中 $t=0$ 时刻位置建立极坐标系，B 的轨迹。



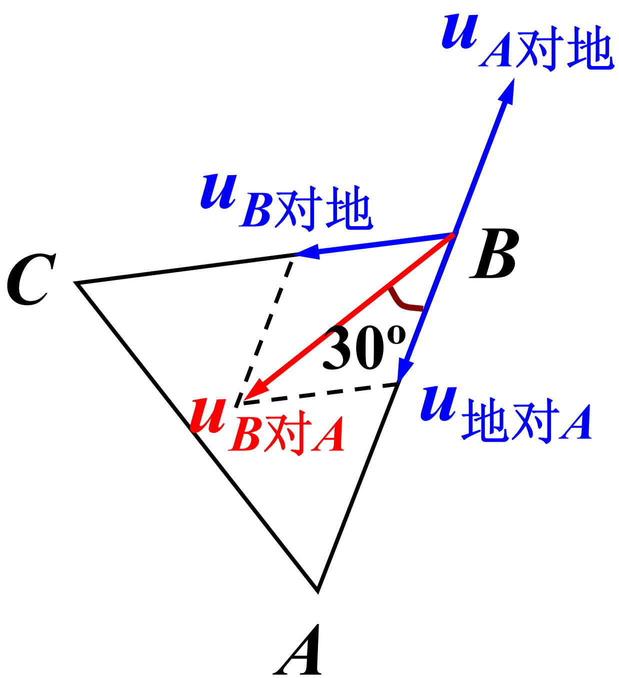
（1）相遇时间 Δt 。

易知任意时刻 ABC 都保持正三角形，设某时刻位形如图。

不难画出 B 和 A 的速度关系，如图示，由此可知：

任意时刻，B 对 A 的速度 $u_{B对A}$ 与 A、B 连线的夹角不变，等于 30°，大小不变，等于 $2u\cos30°$ 。

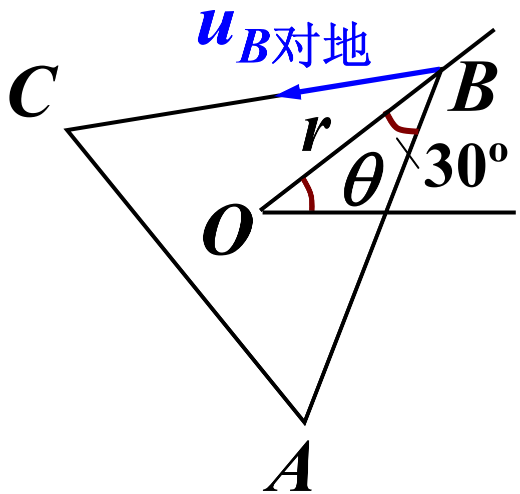
所以相遇时间为：$$\Delta t = \frac{l}{2u\cos 30^\circ \cos 30^\circ} = \frac{2l}{3u}$$



这里要特别注意（同学们课下的问题，此问题很好！）：

由左图看，$u_{B对A}$ 并不沿 A、B 连线方向，这样 A、B 不可能相遇呀！

实际上，以 A 为参考系看：（1）B 同样作一条曲线运动，由题意知曲线终点是 A；（2）该曲线某点处的切线（$u_{B对A}$ 方向）与该点和 A 的连线方向的夹角保持 30° 不变（3）以 A 为极坐标原点，显然时间就等于 A、B 初始距离 l 除以径向速度 $2u\cos30^\circ\cos30^\circ$。



也可在地面系求相遇时间 Δt

采用题中提示的极坐标系。

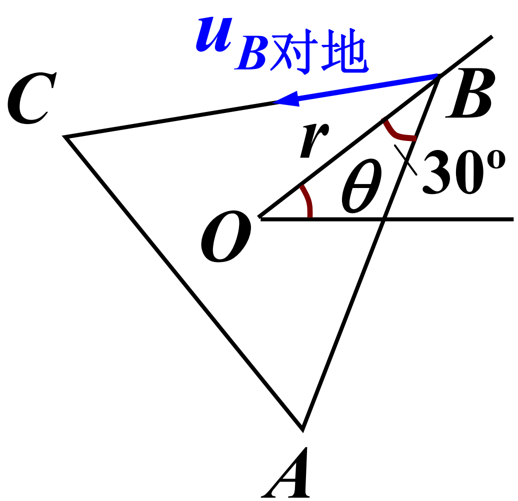
易知 ΔABC 不断旋转变小相遇到 O，当 B 运动到（r, θ）位置时，ΔABC 位置则是左图所示，因为 O 一直是 ΔABC 的中心。

这样，任意时刻，B 对地的速度 $u_{B对地}$ 与极坐标的径向（OB 连线）的夹角不变，等于 30°，所以径向速度大小不变，等于 $u\cos 30°$。

所以时间为：$\Delta t = \dfrac{\text{初始}OB\text{距离}}{u\cos 30^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}l/3}{u\cos 30^\circ} = \dfrac{2l}{3u}$

问题（1）的关键：极坐标系，径向速度为常数，

相遇时间＝ 径向距离/径向速度



（2）B 的轨迹。

分析同前，可知：

径向速度 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -u\cos 30°$

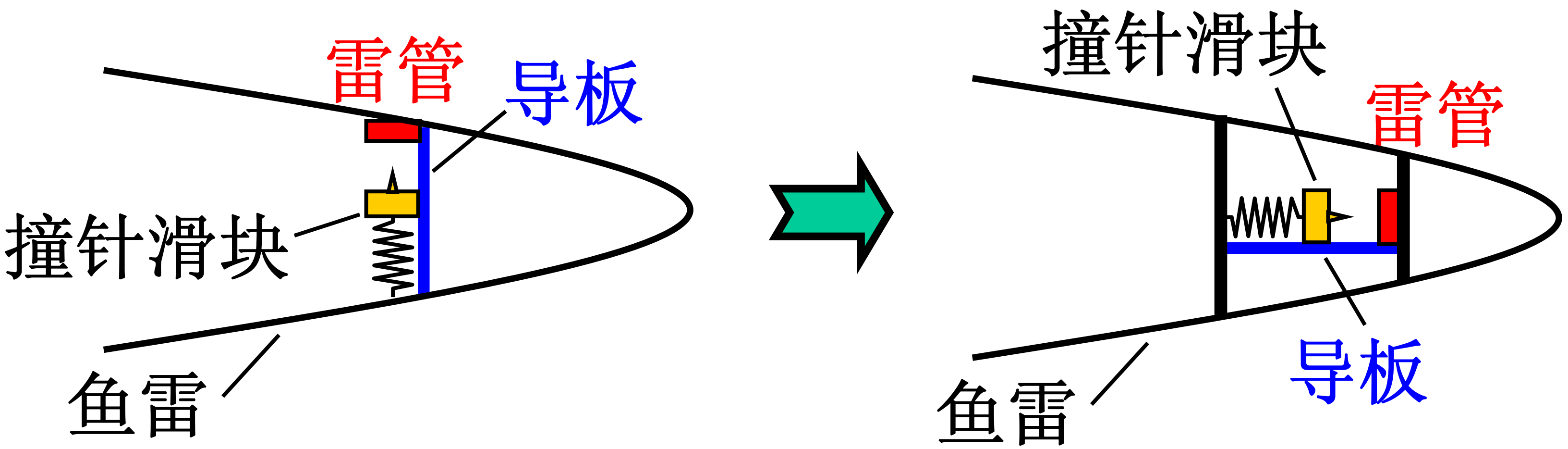
横向速度 $r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = u\sin 30°$

消去 dt 得 $\dfrac{\mathrm{d}r}{r} = -\sqrt{3}\mathrm{d}\theta$

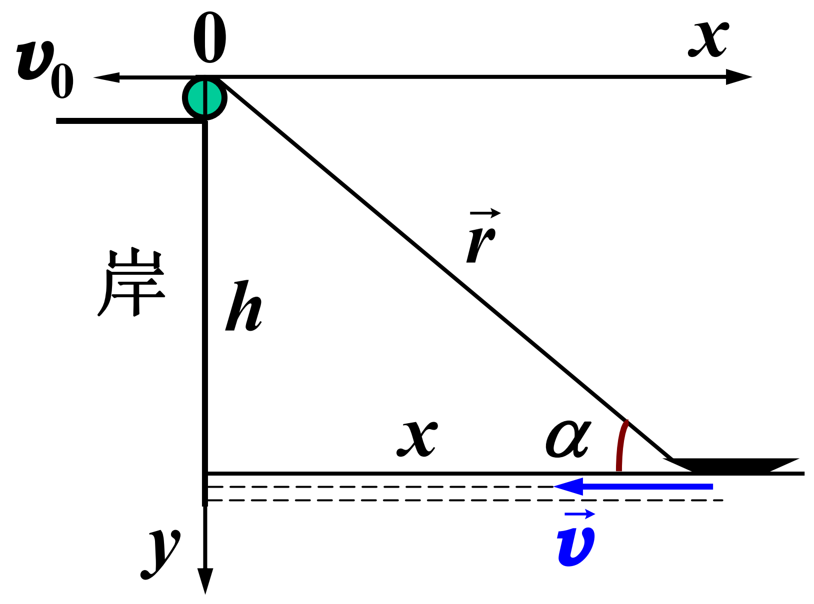
两边积分得 $\displaystyle\int_{\frac{l}{\sqrt{3}}}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\sqrt{3}\int_{0}^{\theta} \mathrm{d}\theta \Rightarrow r = \frac{l}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}\theta}$

8. 在课上曾讲过二战中惯性力影响了鱼雷的触发的事例，试就此提出改进方案。

为避免撞击时惯性力的影响，对触发装置改进如下：



9. 用直角坐标系求船速



坐标系如图，船头位矢：

$$\vec{r} = x\vec{i} + h\vec{j} \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v_0$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\sqrt{r^2 - h^2}}{\mathrm{d}t}\vec{i}$$

$$= \frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)\vec{i} \quad = -\frac{r}{x}v_0\vec{i} \quad = -\frac{v_0}{\cos\alpha}\vec{i}$$

船的加速度

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\frac{r}{x}v_0)\vec{i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0)\vec{i}$$

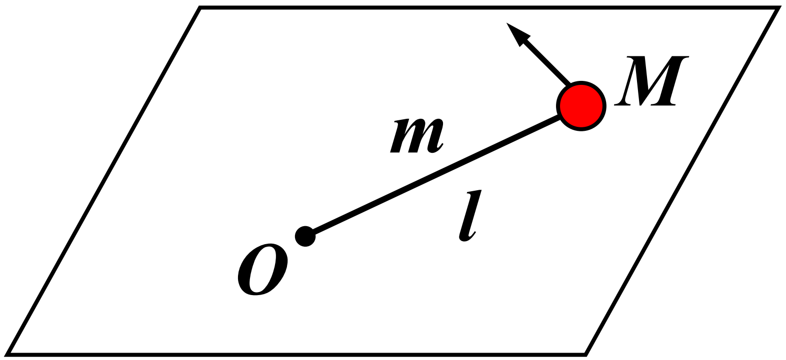
$$=\frac{v_0h^2}{x^2\sqrt{x^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}$$

$$=\frac{v_0h^2}{x^2\sqrt{x^2+h^2}}(-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0)\vec{i}\quad=-\frac{v_0^2h^2}{x^3}\vec{i}$$

$\vec{a}$ 和 $\vec{v}$ 同向，船加速靠岸。

10. 有质量绳的张力问题

长度 l、质量 m 的绳，一端系在轴 O 上，另一端固结质量 M 的物体，它们在光滑水平面上以角速度 ω 匀速转动，求距轴心 r（$r<l$）处的张力 T。

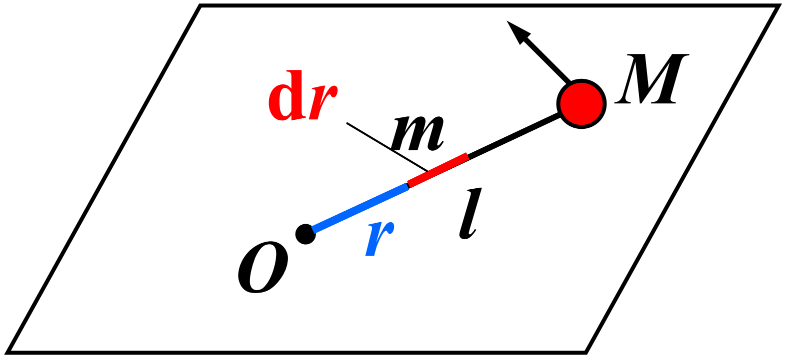


有人认为 $T = M\omega^2 l$ ，对否？

不忽略绳的质量，则绳中各点速度加速度都不相同，

绳整体作转动，不能看成一个质点！

绳的不同位置处，张力是不会相同的。

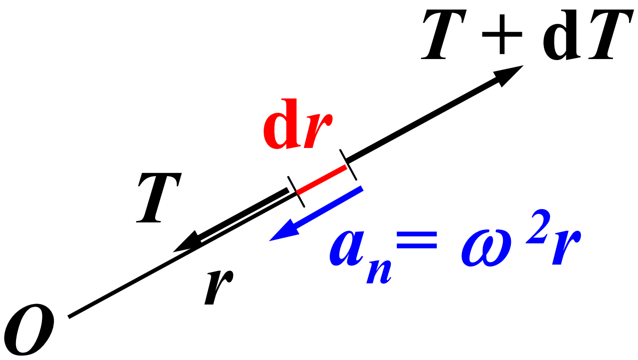


求半径为 r 处的张力 T

取距轴心 r 处，长度 $\mathrm{d}r$ 的一段质元，

质元质量 $\mathrm{d}m = m\dfrac{\mathrm{d}r}{l}$

它作半径为 r、速率为 ωr 的匀速圆周运动。



由牛顿定律有：

$$(T+\mathrm{d}T)-T=\mathrm{d}m\cdot(-\omega^2 r)$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{d}T=\frac{m}{l}\mathrm{d}r(-\omega^2 r)$$

$$\Rightarrow\ \int_T^{T_l}\mathrm{d}T=-\int_r^l m\omega^2 r\frac{\mathrm{d}r}{l}\qquad(T_l=M\omega^2 l)$$

注意：每个质元受力同向，故所有力的矢量和变为标量相加。

$$\Rightarrow\ T=M\omega^2 l+m\omega^2\frac{l^2-r^2}{2l}$$

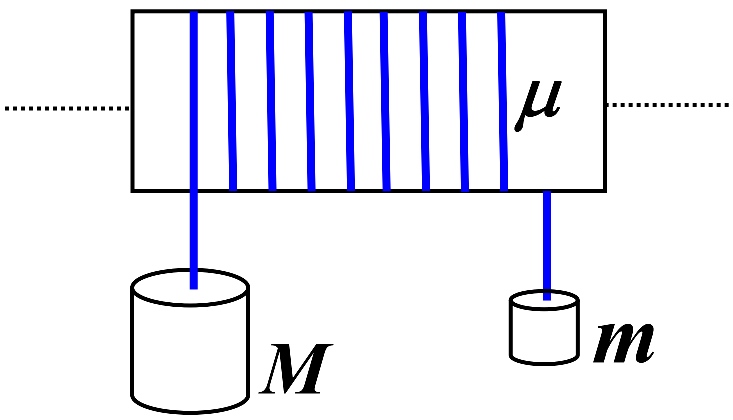
讨论：（1）量纲正确

（2）$r=l$ 时，$T=M\omega^2 l$，　正确

（3）$m=0$ 时，$T=M\omega^2 l$，　正确

11. 绳张力问题

在静止的圆柱体上绕有绳索，绳两端挂大、小两个桶，质量分别为 M 和 m 。绳与圆柱之间静摩擦系数为μ，忽略绳质量。问要使两桶静止不动，绳至少要绕多少圈？

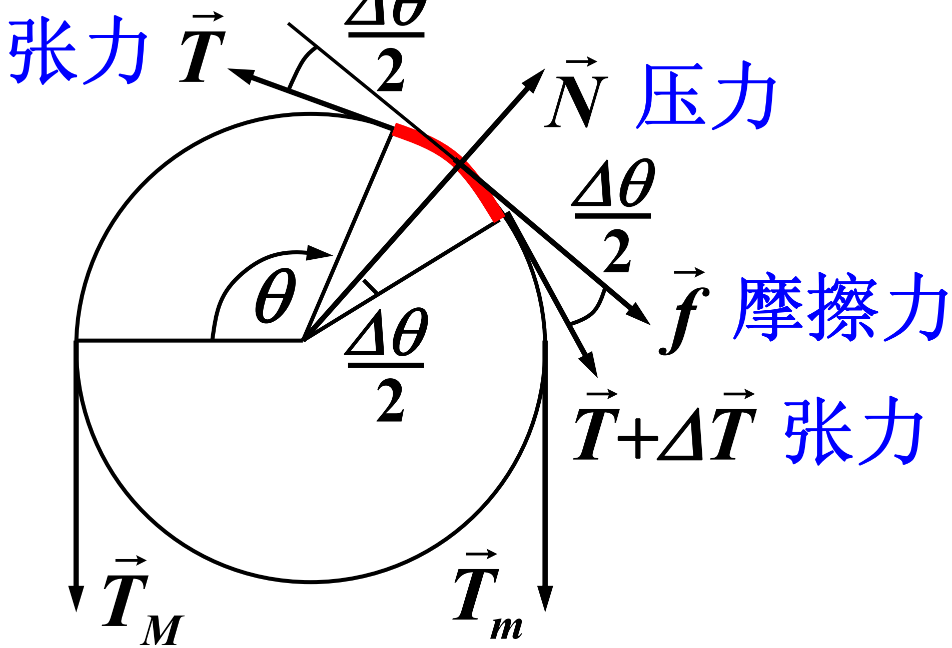


分析： 要想平衡，必须：

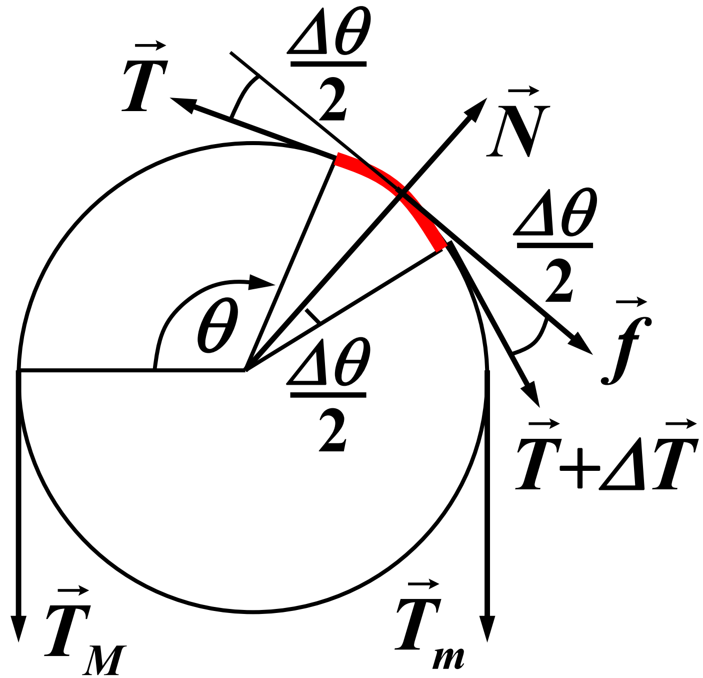
绳柱之间摩擦力＝ $T_M - T_m = Mg - mg$

思路： 将绳分割成小段，由力平衡条件列微分方程求解

分析一小段绳 $\theta \to \theta + \Delta\theta$ 的受力情况



列动力学方程



法向：

$$N=\left(2T+\Delta T\right)\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

$$f=\mu N$$

切向：

$$\left(T+\Delta T\right)\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)+f=T\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

近似关系：

$$\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\approx\frac{\Delta\theta}{2}\qquad\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\approx 1\qquad\Delta T\cdot\Delta\theta\approx 0$$

利用近似关系化简3个方程可得：

$$N = T\Delta\theta \qquad \Delta T + f = 0 \qquad f = \mu N$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta T}{T} = -\mu\Delta\theta$$

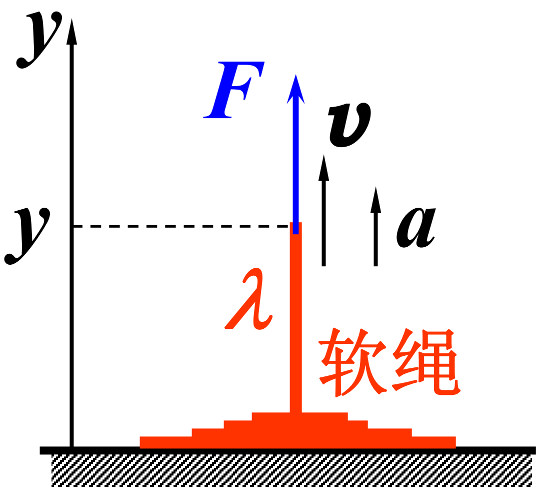
积分得：

$$\int_{T_M}^{T_m} \frac{\mathrm{d}T}{T} = \int_0^{\Theta} -\mu \mathrm{d}\theta, \quad \ln\left(\frac{T_m}{T_M}\right) = -\mu\Theta$$

$$T_M = T_m e^{\mu\Theta} = T_m e^{\mu \cdot n \cdot 2\pi}$$

$$n = \frac{1}{2\pi\mu} \ln\left(\frac{T_M}{T_m}\right)$$

12. 已知：绳的线密度为λ



求：（1）v 恒定，$F=?$

（2）a 恒定，$F=?$

解：方法一 按变质量问题讨论

主体：被拉起的绳，质量在不断增加。

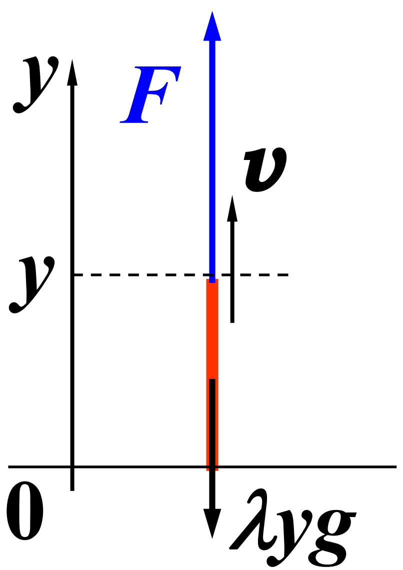
设 t 时刻被拉起的绳长为y，$\mathrm{d}t$ 时间内绳长$\mathrm{d}y$被拉起。以（$y+\mathrm{d}\,y$）为研究系统。

（1）$\boldsymbol{v}$ 恒定

t 时刻系统动量： $\lambda y\cdot \boldsymbol{v}+\lambda \mathrm{d}y\cdot 0=\lambda y\boldsymbol{v}$

$t+\mathrm{d}t$ 时刻系统动量： $\lambda(y+\mathrm{d}y)\cdot\boldsymbol{v}$

在$\mathrm{d}t$ 时间内，系统动量增量为： $\lambda \mathrm{d}y\boldsymbol{v}$



由动量定理有：

$$(F-\lambda y\cdot g)\mathrm{d}t=\lambda \mathrm{d}y\cdot \boldsymbol{v}$$

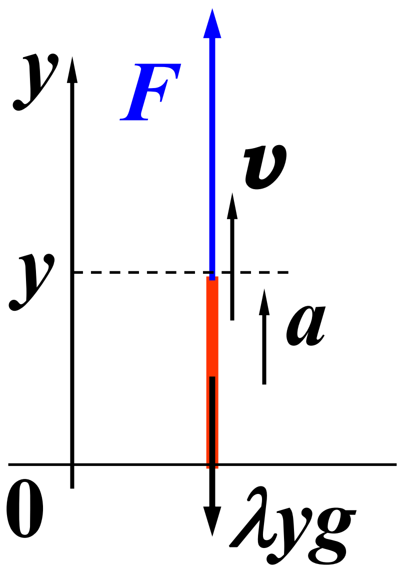
$$F=\lambda yg+\lambda\boldsymbol{v}\underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}_{=\boldsymbol{v}}$$

$$=\lambda yg+\lambda\boldsymbol{v}^2$$

（2）a 恒定

t 时刻系统动量：　$\lambda y\cdot v+\lambda\,\mathrm{d}y\cdot 0=\lambda yv$

$t+\mathrm{d}t$ 时刻系统动量：　$\lambda(y+\mathrm{d}y)\cdot(v+a\mathrm{d}t)$



$$=\lambda yv+\lambda\mathrm{d}y\cdot v+\lambda ya\mathrm{d}t+\cancel{\lambda\mathrm{d}y\cdot a\mathrm{d}t}$$

在$\mathrm{d}t$ 时间内，系统动量增量为：

$$\lambda\,\mathrm{d}y\cdot v+\lambda ya\,\mathrm{d}t$$

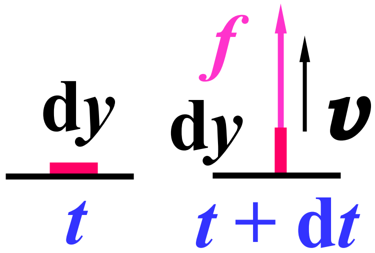
由动量定理有：

$$(F-\lambda y\cdot g)\mathrm{d}t=\lambda\mathrm{d}y\cdot v+\lambda ya\mathrm{d}t$$

$$F=\lambda yg+\lambda v^2+\lambda ya=\lambda yg+3\lambda ay$$

（$v^2=2ay$）

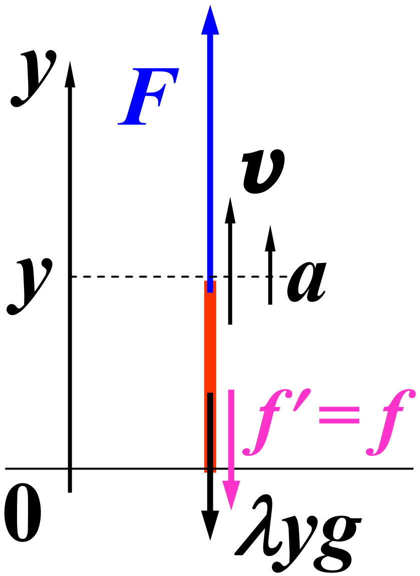
方法二 分别研究 y 段和 dy 段绳



设dy 段被拉起时受的拉力为 f

dy 段：由动量定理有 $f\,\mathrm{d}t=(\lambda\,\mathrm{d}\,y)v$

$$\longrightarrow\quad f=\lambda v\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}=\lambda v^2$$



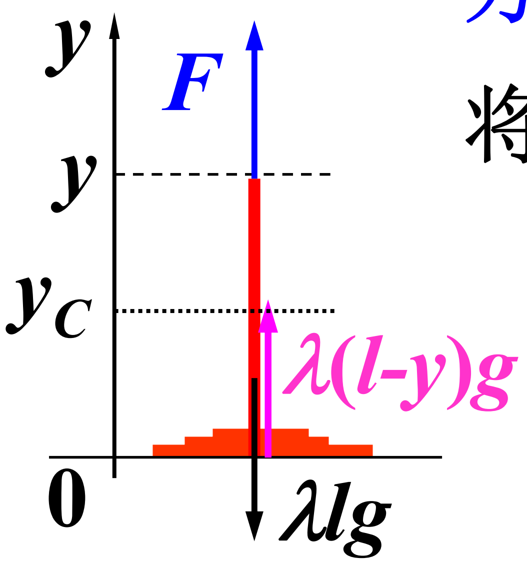
y 段：由牛Ⅱ有 $F-\lambda yg-f=\lambda ya$

$$\longrightarrow\quad F=\lambda yg+\lambda v^2+\lambda ya$$

（1）v 恒定，$a=0$，$\longrightarrow\ F=\lambda yg+\lambda v^2$

（2）a 恒定，$v^2=2ay$，$\longrightarrow\ F=\lambda yg+3\lambda ya$

方法三 质点系动量定理



将绳看成是一个质点系，设绳长 l，

该质点系所受外力：

拉力F，重力λlg，

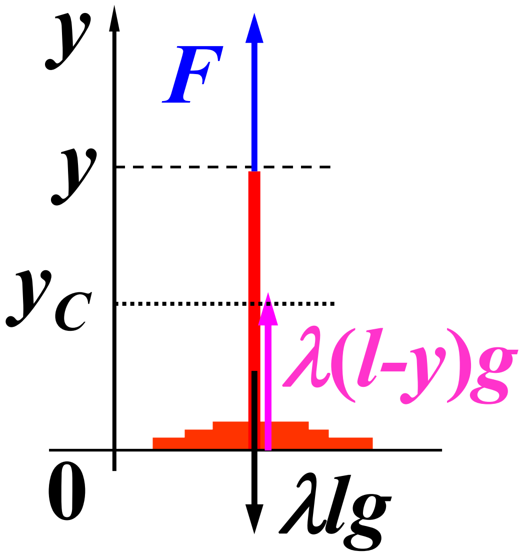
支持力$\lambda(l-y)g$（为何？）

该质点系的总动量：

被拉起的 y 段动量 ＋ 桌面上 $(l-y)$ 段的动量

被拉起的 y 段动量 $= \lambda y v$

桌面上 $(l-y)$ 段的动量 $= 0$



根据质点系动量定理得：

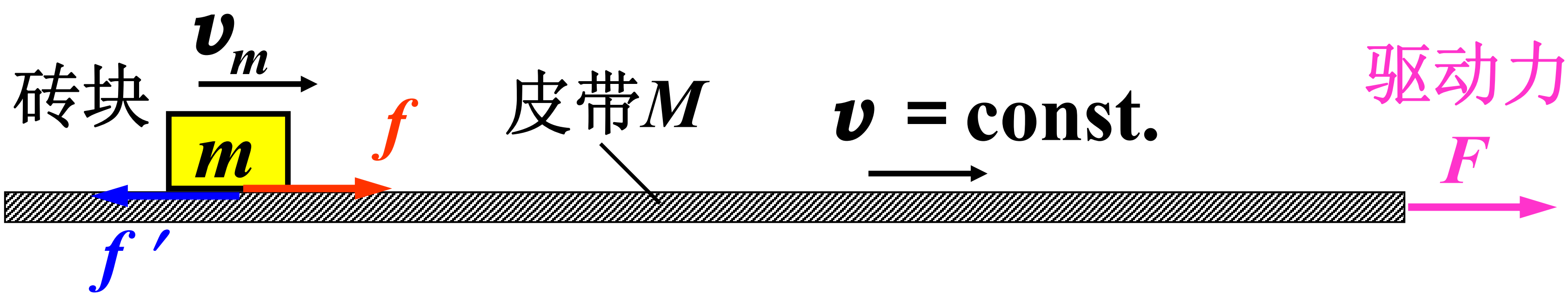
$$F+\lambda(l-y)g-\lambda lg=\frac{\mathrm{d}(\lambda y\boldsymbol{v}+0)}{\mathrm{d}t}$$

$$F=\lambda yg+\lambda y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\lambda\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

（1）$\boldsymbol{v}$ 恒定，$\dot{y}=\boldsymbol{v}$，$\dot{\boldsymbol{v}}=0$，$F=\lambda yg+\lambda\boldsymbol{v}^2$

（2）a 恒定，$\dot{y}^2=2ay$，$\dot{\boldsymbol{v}}=a$，$F=\lambda yg+3\lambda ya$

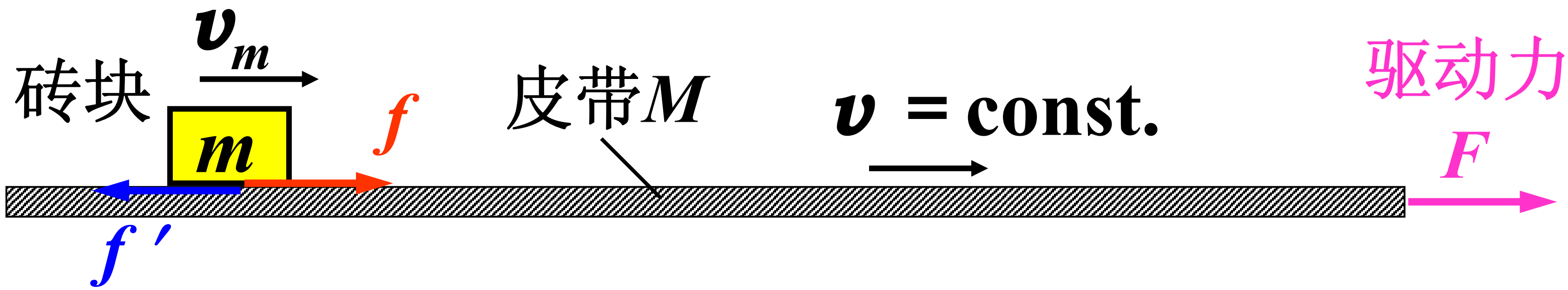
1.



m： $v_m = 0 \longrightarrow v_m = v$ 的动过程中，应该有：

（1）f'对M的功 = –（f对m的功）

答：错。（ m 与 M 间有相对位移）



（2）F 的功 $+ f'$ 的功 $= m$ 获得的动能

答： 错。（ F与 f' 是作用在M上而非m上的）

（3）F 的功 $+ f'$ 的功 $= 0$

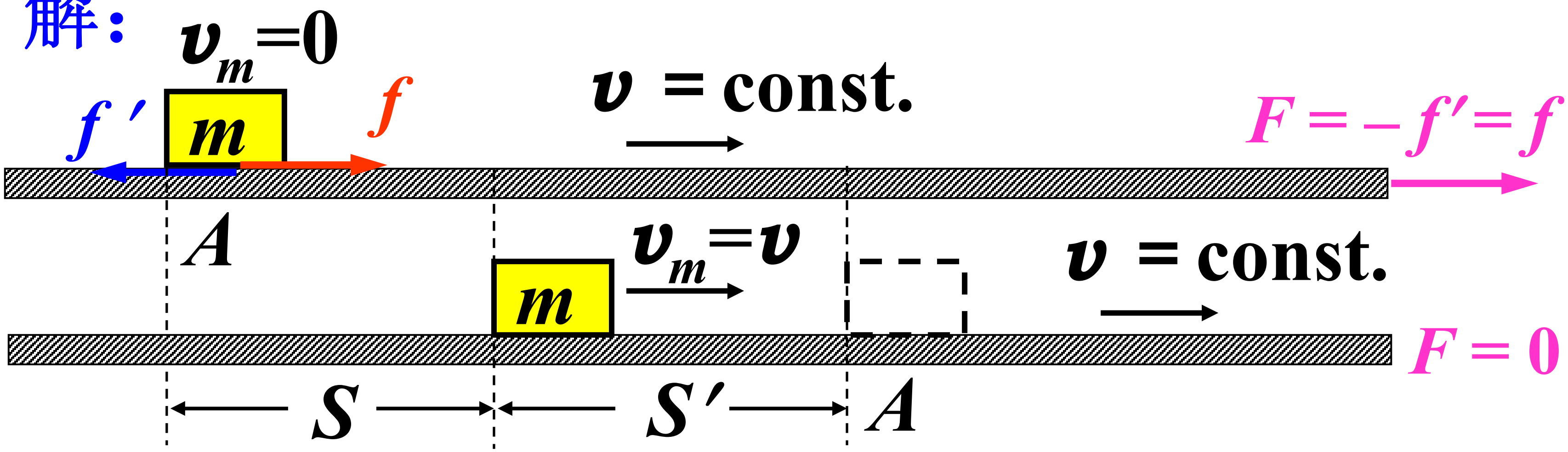
答：对。（M 匀速，动能不变）

（4）F 的功 $= m$ 获得的动能

答：错。（F 是作用在 M 上的）

问：$v_m=0 \longrightarrow v_m=v$ 的动过程中， F 的功 =?

解：



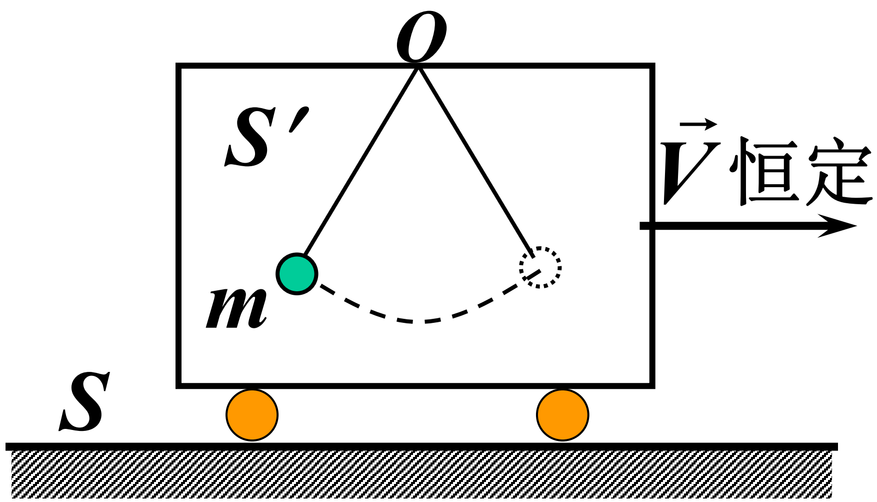
$$W_F = F\cdot(S+S') = \underline{f\cdot S} - \underline{[f\cdot(-S')]}$$

地面上看　皮带上看（减速后退）

（动能定理）$=\frac{1}{2}mv^2 - (-\frac{1}{2}mv^2)$

$\longrightarrow S'=S$

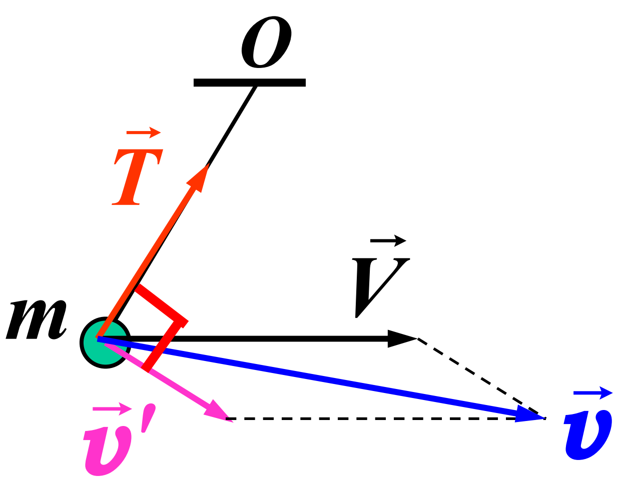
2.



在 S'和 S 系中，小球＋地球 的机械能是否守恒？

S'：单摆，只保守内力作功，机械能守恒。

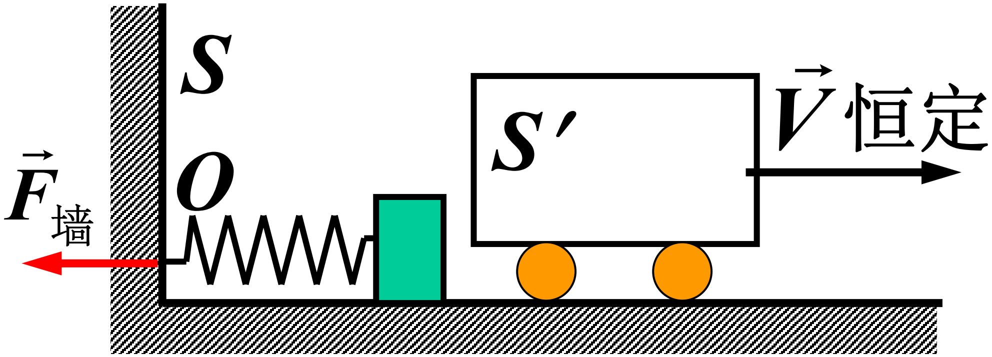
S:



$$\vec{v} \not\perp \vec{T} \quad (\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V})$$

$$W_{外} = W_T \neq 0$$

机械能不守恒。



在S'和S系中，弹簧振子的机械能是否守恒？

S： 只有保守内力作功，机械能守恒。√

S'： 因是惯性系，而且只有保守内力作功，故机械能守恒。×

S： 墙对弹簧有作用力$\vec{F}_{墙}$，但作用点O不动，不作功。

S'： 作用点O以速度$-\vec{V}$运动，$\vec{F}_{墙}$作功。

3.

（1）不受外力作用的系统，其动量和动能必然同时守恒。

答： 错 （若$W_{内}\neq 0$，则 E_k 不守恒）

（2）内力都是保守力的系统，当它所受的合外力为零时，它的机械能必然守恒。

答： 错 （外力作功的和不一定为零）

（3）只有保守内力的系统，它的动量和机械能必然都守恒。

答： 对（只有$F_{保内}\rightarrow W_{外}=0$，$W_{非保内}=0$）

4. 如果一个系统在一个惯性系 S 中动量和机械能均守恒，那么该系统在其它任何一个惯性系 S' 中是否动量和机械能也均守恒？

答：在其它惯性系 S' 中动量和机械能均守恒。

证：（1）由于 S' 是惯性系，仍满足 $\sum \vec{F}_{外i} = 0$

故动量仍守恒。

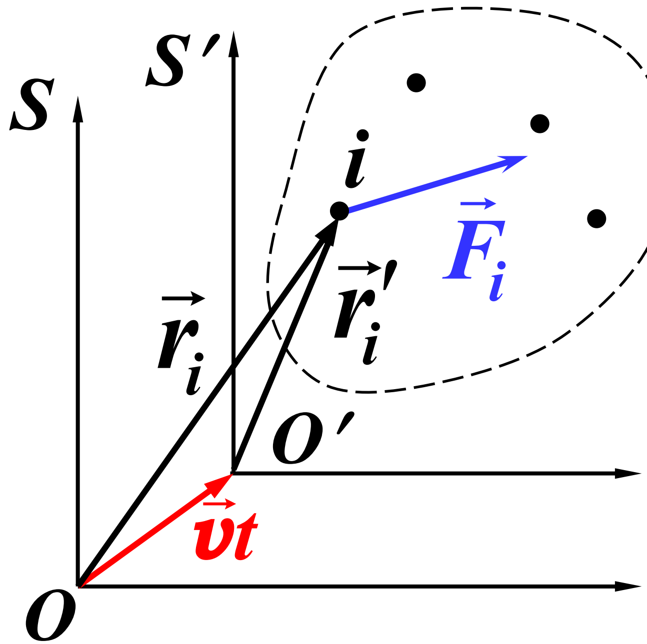
（2）证明在惯性系 S' 中机械能仍守恒。

在惯性系 S 中机械能守恒给出：

$$\mathrm{d}W_{外} = 0, \quad \mathrm{d}W_{非保内} = 0$$

设惯性系 S' 相对 S 的速度是 $\vec{v}$（必为常矢量）

如图，设 $t=0$ 时刻 O 和 O' 重合。



$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{\upsilon}t$$

$$\rightarrow \mathrm{d}\vec{r}_i' = \mathrm{d}\vec{r}_i - \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}W'_{外} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i'$$

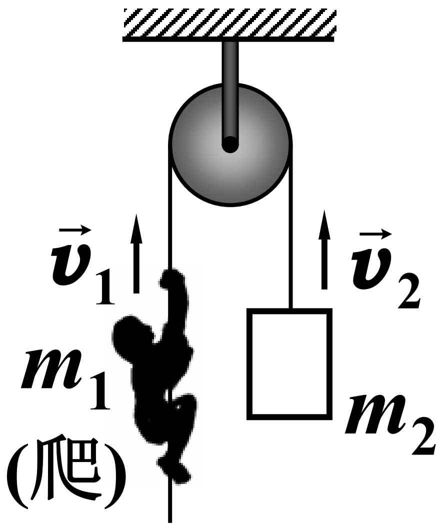
$$= \sum_i \vec{F}_i \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_i - \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t)$$

$$= \sum_i \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i - (\sum_i \vec{F}_i) \cdot \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{d}W_{外} + 0 = 0$$

又 $\mathrm{d}W'_{非保内} = \mathrm{d}W_{非保内} = 0$，故$S'$中机械能仍守恒。

5.



如图，人和物同重（$m_1 = m_2$），人抓着跨过滑轮的轻绳的一端从静止上爬。忽略滑轮的质量和轴的摩擦，问人和物哪个向上的速度快？

讨论：人+物+绳在过程中对轮轴角动量守恒

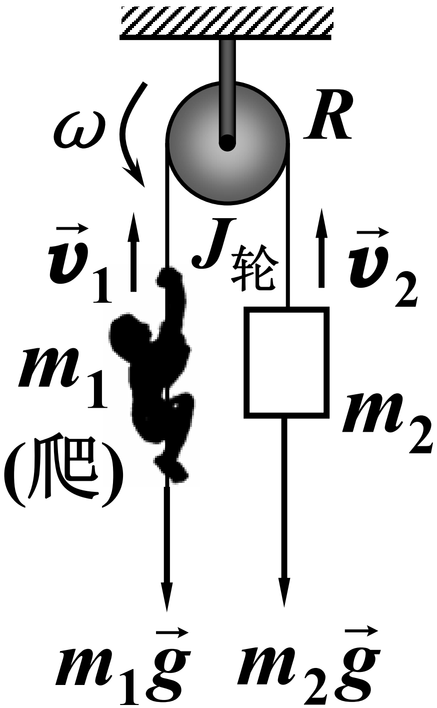
设滑轮半径为R，角动量顺时针为正：

$m_1 R v_1 - m_2 R v_2 = 0 \quad \rightarrow v_1 = v_2$ 一样快！

用动量守恒也得到同样结果，巧合！

思考　若滑轮的质量不能忽略情况如何？

（设仍有$m_1 = m_2$）



系统：人＋物＋轮＋绳

对轴 $M_{外} = m_2 gR - m_1 gR = 0$，

系统角动量守恒：

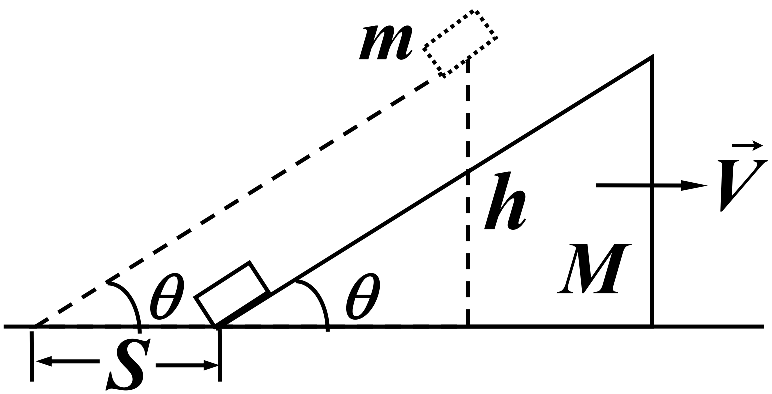
$$m_1 v_1 R - m_2 v_2 R - J_{轮}\omega = 0$$

$$\rightarrow m_1 v_1 R - m_2 v_2 R > 0$$

$$\rightarrow v_1 > v_2$$

6.

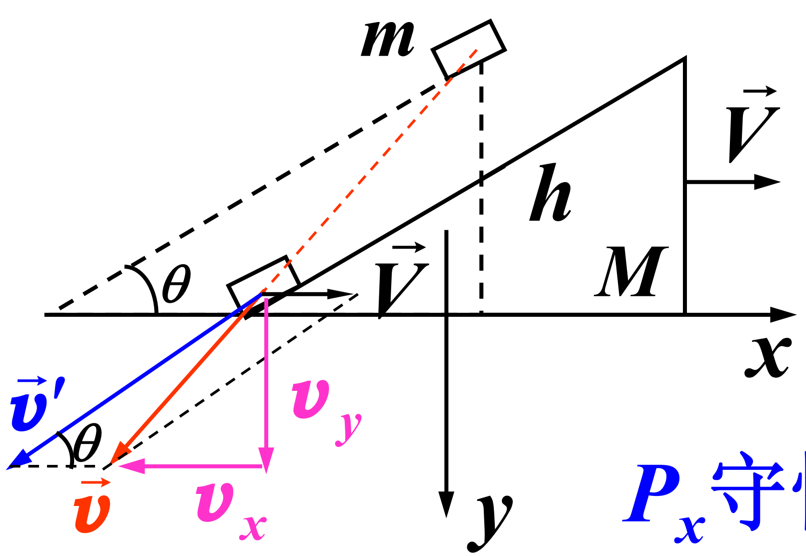
水平面上有一质量M、倾角θ的楔块，质量为m 的小滑块从高h 处由静止下滑到底面。



求：m 对 M 作的功 W 及 M 后退距离S。

（忽略所有摩擦）

解： 动量守恒＋机械能守恒＋相对运动



对M： $W = \frac{1}{2}MV^2 \cdots(1)$

对$m+M$： $F_x = 0$

P_x守恒： $MV + mv_x = 0 \cdots(2)$

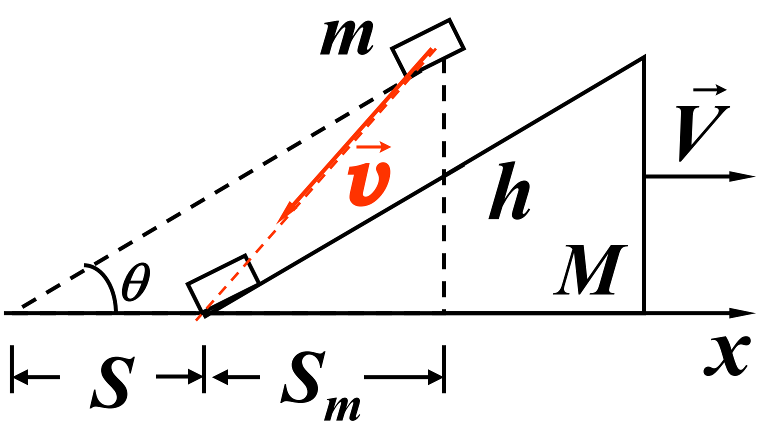
对$m+M$+地球：m—M间一对压力作功和为零

E守恒： $\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}MV^2 = mgh \cdots(3)$

相对运动 $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$： $\frac{v_y}{V + (-v_x)} = \mathrm{tg}\,\theta \cdots(4)$

（1—4）解得：$W = \dfrac{Mgh\cos^2\theta}{(1+M/m)(M/m+\sin^2\theta)}$

设下滑时间为T，对P_x守恒式（2）式积分：



$$M\int_0^T V\,\mathrm{d}t + m\int_0^T \upsilon_x\,\mathrm{d}t = 0$$

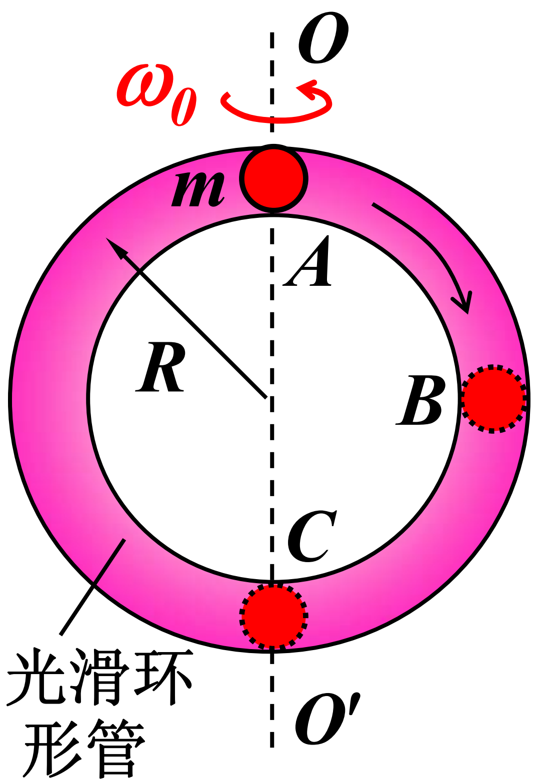
$$MS + mS_m = 0 \cdots (5)$$

位移关系：$\dfrac{h}{S - S_m} = \mathrm{tg}\,\theta \cdots (6)$

（5—6）解得：$S = \dfrac{h}{(1+M/m)\,\mathrm{tg}\,\theta}$

(5) 式也可由 m＋M 质心在x 方向不动得到!

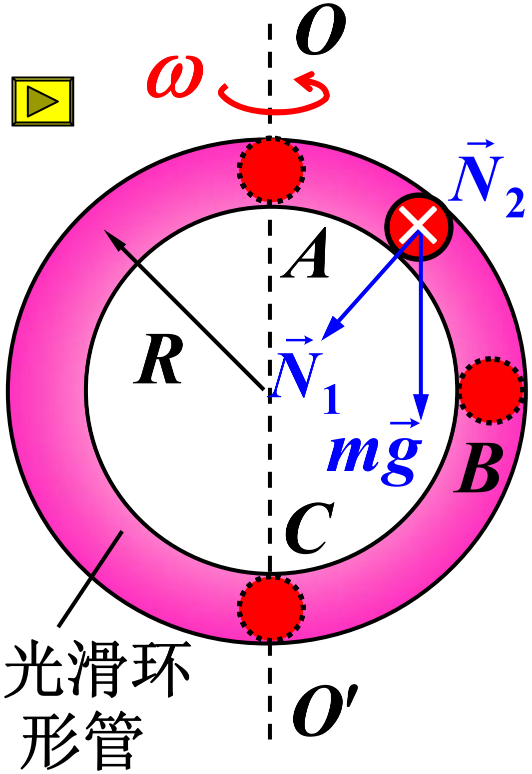
7.



已知：如图示，环形细管绕竖直光滑固定轴 OO'转动，转动惯量为J，环半径为R，初始角速度为ω_0， 质量为m的小球从A由静止开始下滑。

求：小球分别滑到B 、C时，环的角速度多大？小球相对环的速度多大？

思考 滑落中小球对OO'轴的角动量守恒否？



有人分析小球受力为：

$$\vec{N}_1 + m\vec{g}$$

它们对OO'轴的力矩$=0$，

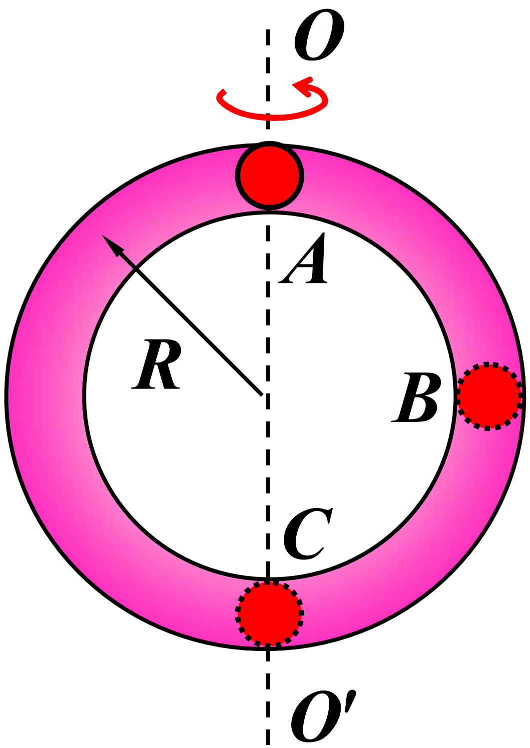
因而小球角动量守恒。

还受垂直环面的压力$\vec{N}_2$

它对OO'轴的力矩$\neq 0$！

$\therefore$ 小球的角动量不守恒！

解：系统 — 小球＋环



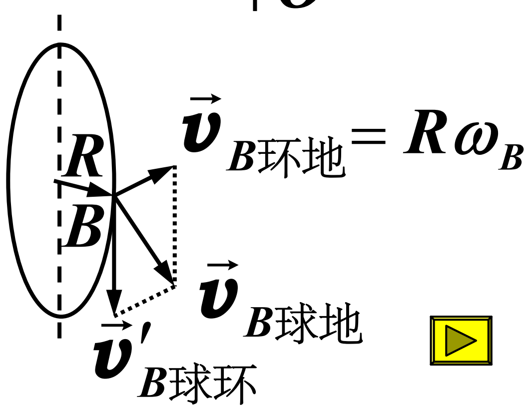
轴力和重力对轴力矩为零，

$\Sigma M_{外i}=0$， 系统角动量守恒。

$A \to B$： $J\omega_0 = (\underbrace{J + mR^2}_{\text{非同一刚体}})\omega_B$

$$\omega_B = \frac{J\omega_0}{J + mR^2} \quad (\omega_B < \omega_0)$$

小球获得角动量，环转动变慢



$A \to C$： $J\omega_0 = J\omega_C$

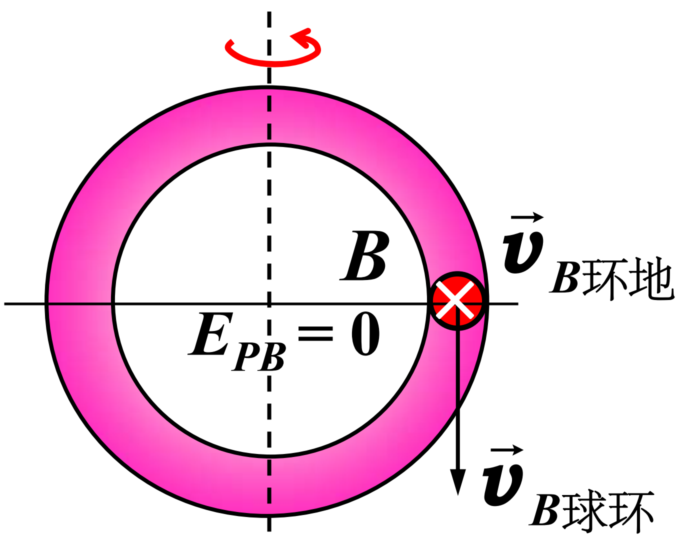
$$\omega_C = \omega_0$$

系统 — 小球＋环＋地球

小球与环的内力 ⊥ 相对位移，没有摩擦和外力作用，即 $W_{非保内}=0$，$W_{外}=0$

∴ 系统机械能守恒。（小球＋地球怎样？）

取通过环心的水平面重力势能 $E_{PB}=0$。



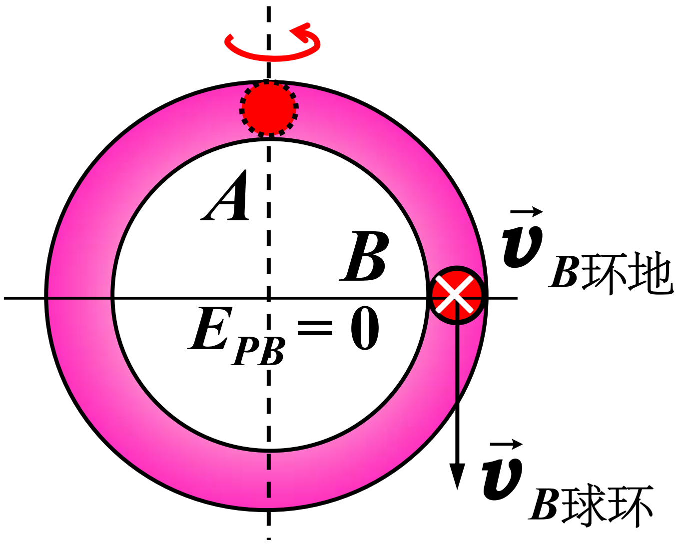
B 点速度：

$$\vec{v}_{B球地}=\vec{v}_{B球环}+\vec{v}_{B环地}$$

$$\vec{v}_{B球环}(//\ 轴)\perp\vec{v}_{B环地}$$

$A \to B$:

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2}J\omega_B^2 + \frac{1}{2}m(v_{B球环}^2 + v_{B环地}^2)$$

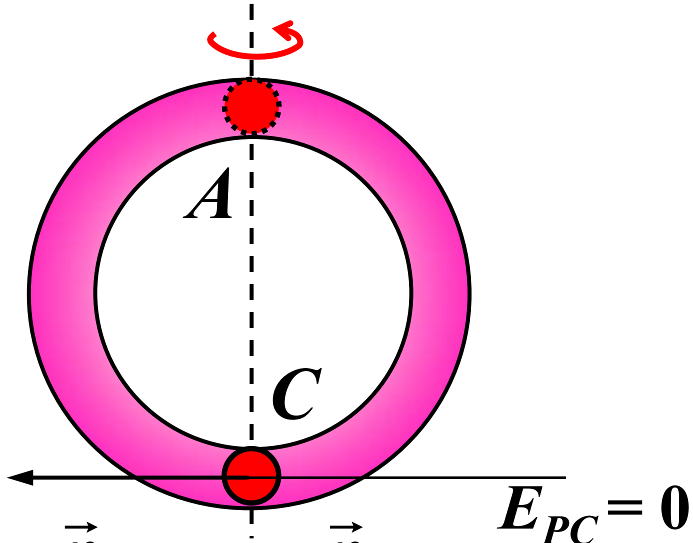


$$= \frac{1}{2}J\omega_B^2 + \frac{1}{2}m(v_{B球环}^2 + \omega_B^2 R^2)$$

$$v_{B球环} = \sqrt{2gR + \frac{J\omega_0^2 R^2}{J + mR^2}}$$

检验：（1）量纲 √

（2）当 $\omega_0 = 0$ 时，$v_{B球环} = \sqrt{2gR}$ √



$$\vec{v}_{C球地}=\vec{v}_{C球环}$$

C 点速度：

$$\vec{v}_{C球地}=\vec{v}_{C球环}+\underbrace{\vec{v}_{C环地}}_{=\,0}$$

$$=\vec{v}_{C球环}$$

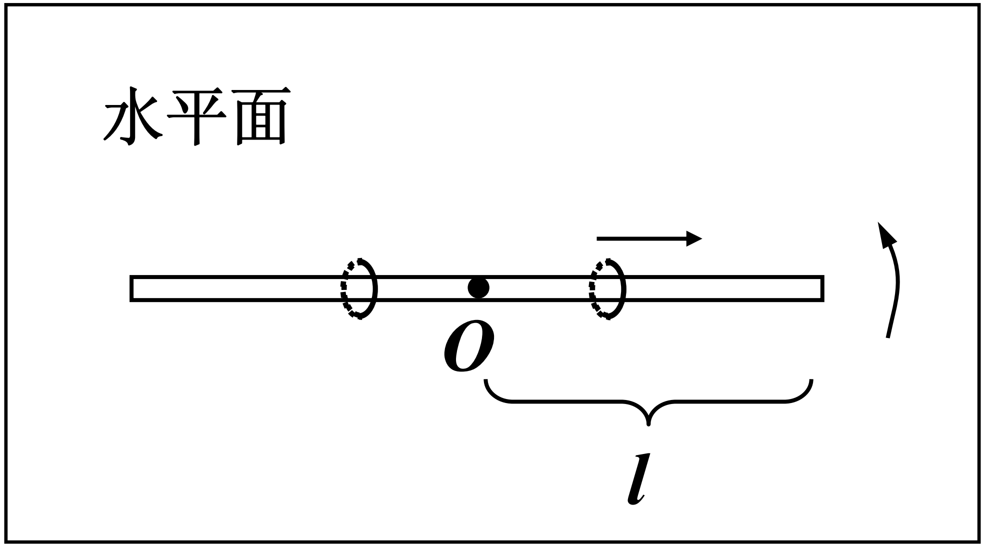
$A\rightarrow C$：

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2+mg(2R)=\frac{1}{2}J\omega_C^2+\frac{1}{2}mv_{C球环}^2$$

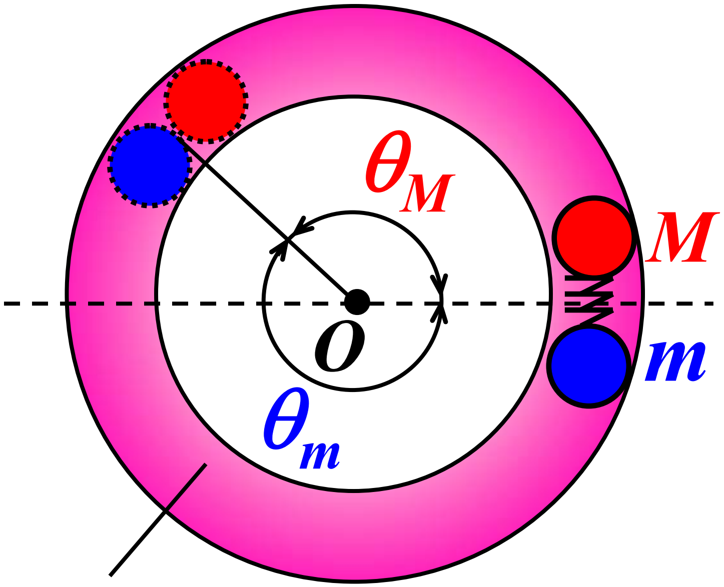
$$v_{C球环}=2\sqrt{gR}$$

扩展：质量 M、长 $2l$ 的杆可在水平面上绕固定中心 O 转动，杆上套两个质量为 m 的小珠。开始时，小珠对称的放在距离中心 $l/3$ 处，使杆获得一个初始角速度ω_0，且此时小珠相对杆静止。设所有接触都是光滑的，

求：小珠刚滑出杆时，杆的角速度和小珠的速度。



8.



如图示，已知：M、m，轻弹簧，压缩势能U_0。弹簧未与两小球固结。M、m从静止弹开。

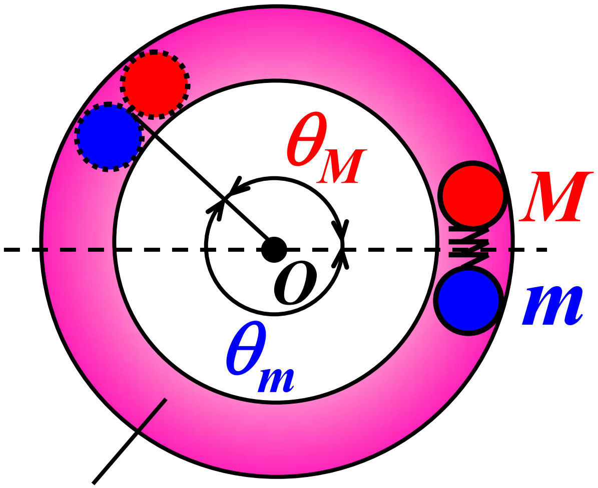
求：（1）相碰时θ_M=?

（2）从弹开到相碰，经过的时间Δt=?

解：（1） 系统 — $m+M$

弹出瞬间：对O轴，弹簧弹力的力矩和＝0；

重力、槽底支持力 // O轴，无力矩；



槽壁侧压力过O轴，无力矩；

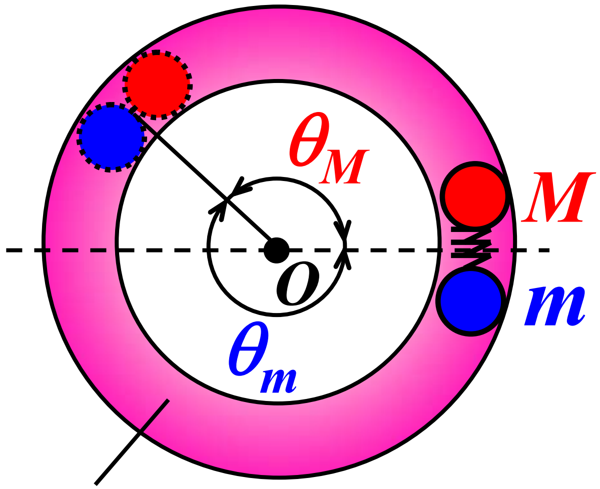
$\sum M_{外i}=0$，角动量守恒

设 m，M 弹开瞬间获得的角速度为 ω_m、ω_M，有：

$$J_m\omega_m + J_M\omega_M = (mR^2)\omega_m + (MR^2)\omega_M = 0$$

$$\therefore \quad m\omega_m = -M\omega_M \qquad (1)$$

沟槽光滑，m、M作匀角速圆周运动。



由 (1) 有：

$$m\omega_m \Delta t = -M\omega_M \Delta t$$

$$m\theta_m = -M\theta_M \qquad (2)$$

$$\theta_M + (-\theta_m) = 2\pi \qquad (3)$$

(2)(3)联立得： $$\theta_M = \frac{2\pi m}{M+m} \qquad (4)$$

（2） 系统 — $m+M$

弹出瞬间：只有弹力作功，机械能守恒。

$$\frac{1}{2}(mR^2)\omega_m^2 + \frac{1}{2}(MR^2)\omega_M^2 = U_0 \qquad (5)$$

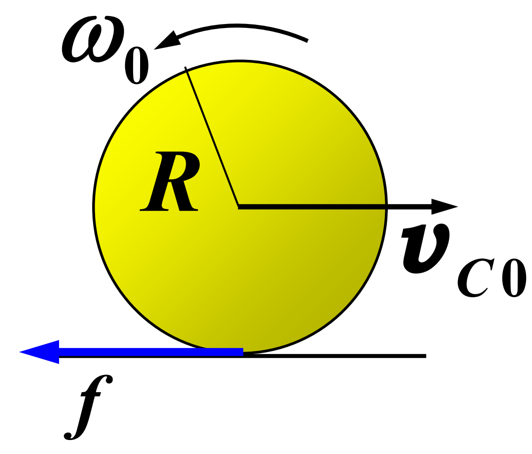
由 (1)(5) 得

$$\omega_M = \sqrt{\frac{2mU_0}{M(M+m)R^2}} \qquad (6)$$

由 (4)(6) 得 $\Delta t = \dfrac{\theta_M}{\omega_M} = \sqrt{\dfrac{2\pi^2 mMR^2}{(M+m)U_0}}$

思考 弹开瞬间和运动中系统动量是否守恒？

9. 如图， 在桌面上搓动乒乓球使其具有初始的ω_0和$\boldsymbol{v}_{C0}$，乒乓球会前进一段距离后自动返回。



讨论：出现这种现象的原因和条件（乒乓球看成匀质球壳）。

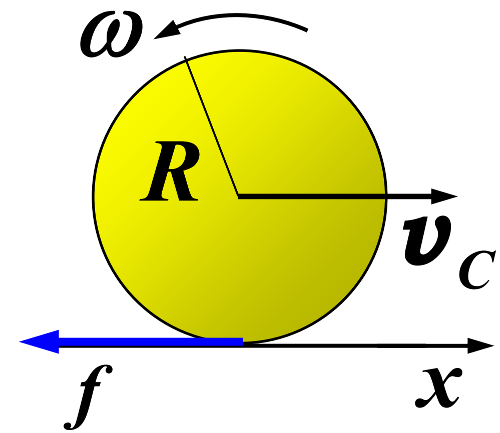
解：分析前进阶段的运动状态：又滑又滚；

前进阶段受力：与$\boldsymbol{v}_C$方向相反的滑动摩擦力

摩擦力f的作用 $\begin{cases} \text{使质心速度 } \boldsymbol{v}_C \text{ 减小} \\ \text{使转动的角速度 } \omega \text{ 减小} \end{cases}$

能自动返回的条件： $\boldsymbol{v}_C = 0$，但 $\omega > 0$

质心运动方程：设x方向为正



$$-f = ma_C$$

$$v_C = v_{C0} + a_C t$$

对过质心基轴的转动方程：设逆时针为正

$$-fR = J_{C轴}\alpha \quad (J_{C轴} = 2mR^2/3)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

利用返回的条件：$v_C = 0$，但 $\omega > 0$

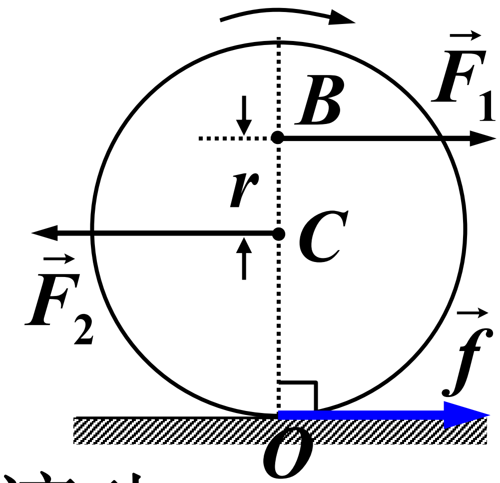
得： $\omega_0 > \dfrac{3v_{C0}}{2R}$

【思考】

（1）前进阶段滑动摩擦力做功都转化为热吗？

（2）在返回阶段，乒乓球最终达到纯滚动状态，这时它还受摩擦力作用吗？

10. 如图， 圆柱体受沿水平方向相反的两个力$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$，作用点是B 和C ，C是质心，$BC = r$，BC 连线沿竖直方向。圆柱体质量m，半径R，沿顺时针方向作纯滚动。



求：接触点O处的静摩擦力。

解：设摩擦力向右，根据质心运动定理有：

$$F_1 - F_2 + f = ma_C \qquad (1)$$

设顺时针方向为正，根据对质心的转动定理有：

$$F_1 r - fR = J_C \alpha = \frac{1}{2} mR^2 \alpha \qquad (2)$$

纯滚动条件：$a_C = R\alpha$ (3)

(1) (2) (3) 解出：

$$f=-\frac{R-2r}{3R}F_1+\frac{1}{3}F_2$$

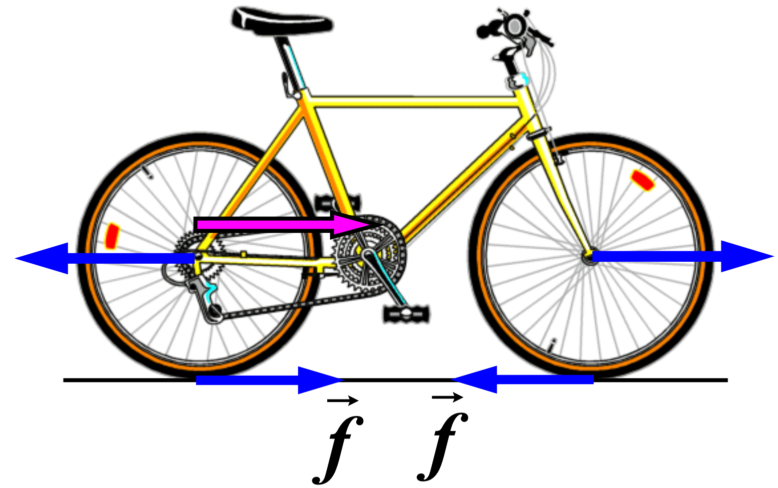
▲ 当 $F_1=F_2=0$， $f=0$，

质心匀速运动，圆柱体绕质心匀速转动。

▲ 当 $F_2=0$，且 B 点在 C 之上，有：

$$f=\begin{cases}\text{当 } r>\dfrac{R}{2}, & f>0\\ \text{当 } r=\dfrac{R}{2}, & f=0\\ \text{当 } r<\dfrac{R}{2}, & f<0\end{cases}$$

$$f=-\frac{R-2r}{3R}F_1+\frac{1}{3}F_2$$



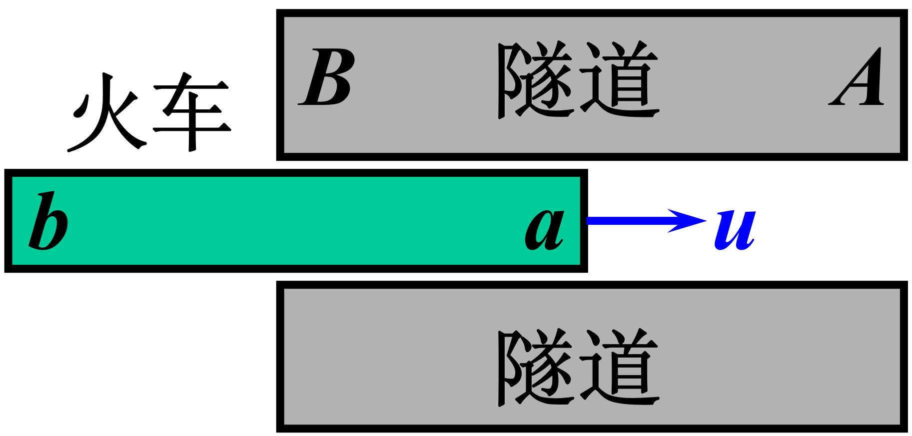
▲ 当 $F_2=0,\quad r=0,\ f=-\frac{F_1}{3}<0,$

自行车前轮所受静摩擦力大致如此。

▲ 当 $F_1=F_2,\ f=\frac{2rF_1}{3R}=\frac{2rF_2}{3R}>0,$

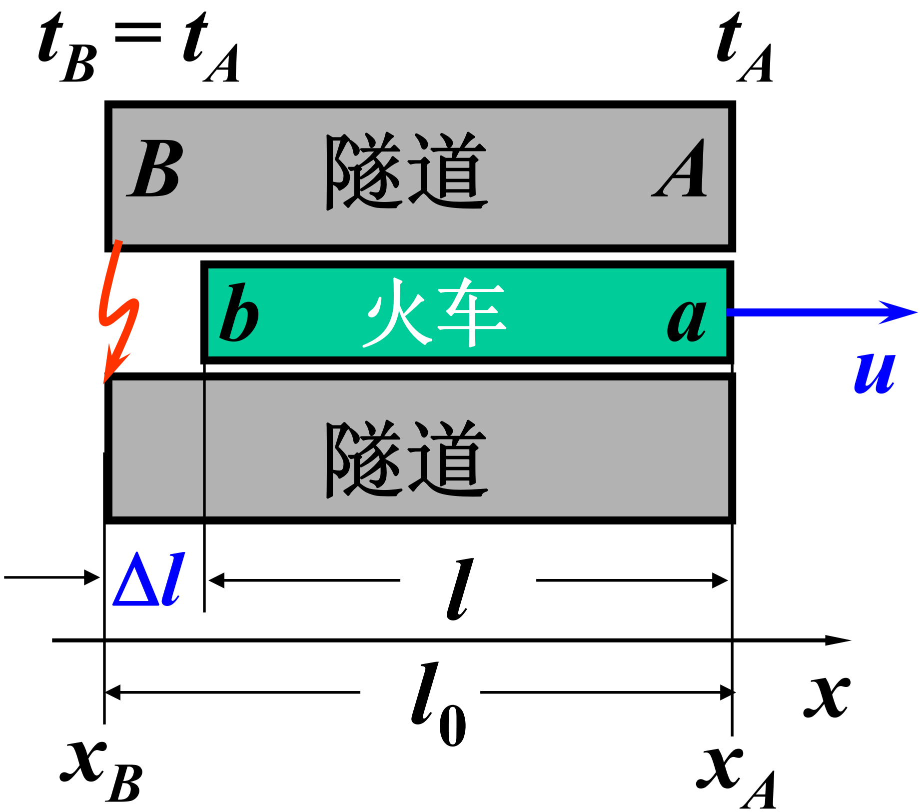
自行车后轮所受静摩擦力大致如此。

1. 如图示：一列火车以恒定速度 $\vec{u}$ 通过隧道，火车与隧道的静长均为 l_0。从地面上看，当火车的前端 a 到达隧道的前端 A 的同时，有一个闪电正击中隧道的末端 B。



问：分别从地面系和火车系看，此闪电能否在火车的尾端 b 留下痕迹？

分析： 在地面上看， 火车的长度要缩短为



$$l = l_0\sqrt{1-u^2/c^2} = \frac{l_0}{\gamma}$$

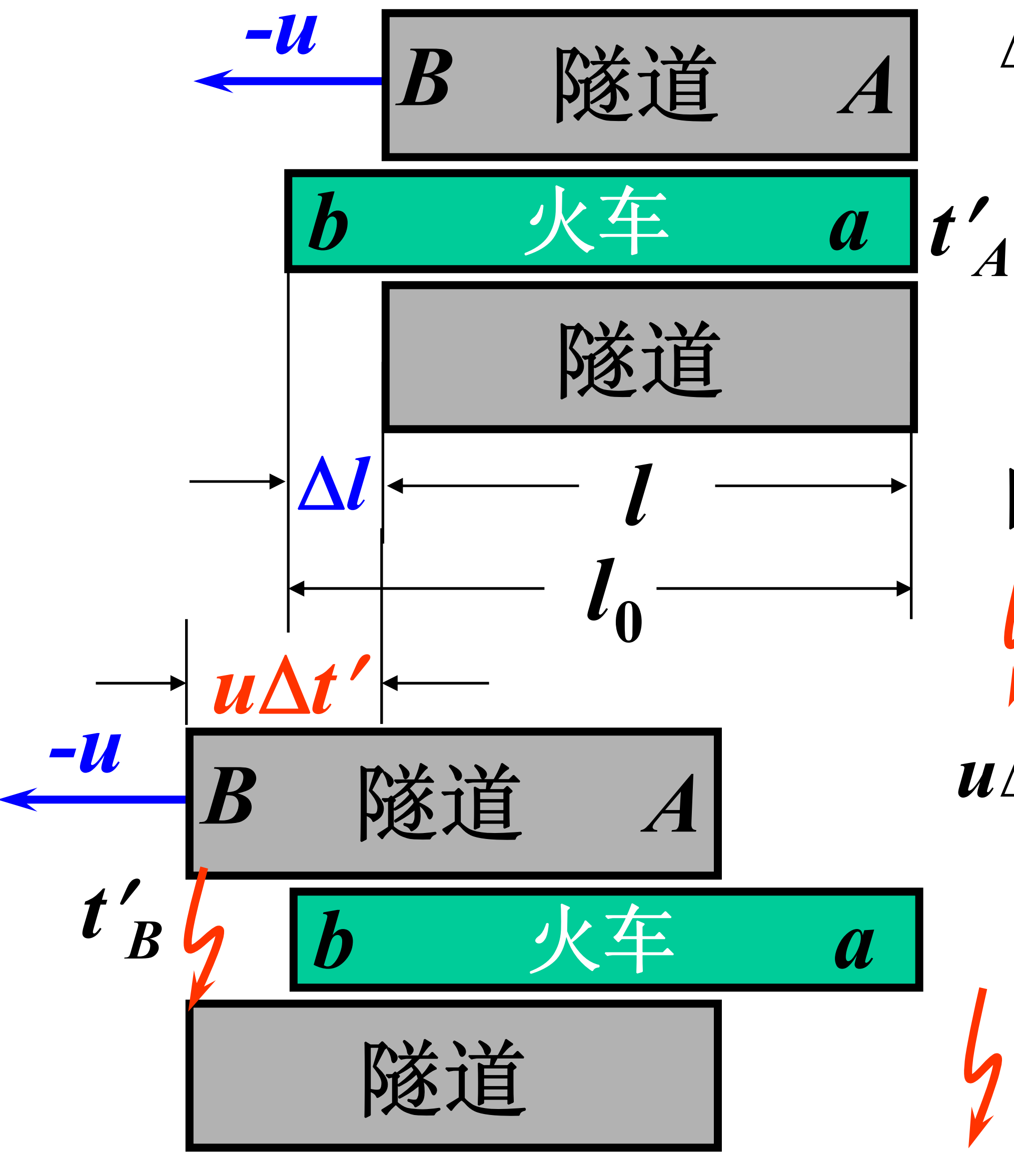
a 到达 A时，车尾 b 已进入隧道， 缩进：

$$\Delta l = l_0 - l$$

$$= l_0(1-\frac{1}{\gamma}) > 0$$

击不中b。

在火车上看，a 遇 $A(t'_A)$在先，B处 (t'_B)在后。



$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$$

$$\left.\begin{matrix}\Delta t = 0\\ \Delta x = -l_0\end{matrix}\right\} = \gamma\frac{u}{c^2}l_0 > 0$$

隧道缩短到 l，a 遇 A 时，车尾在隧道外Δl；

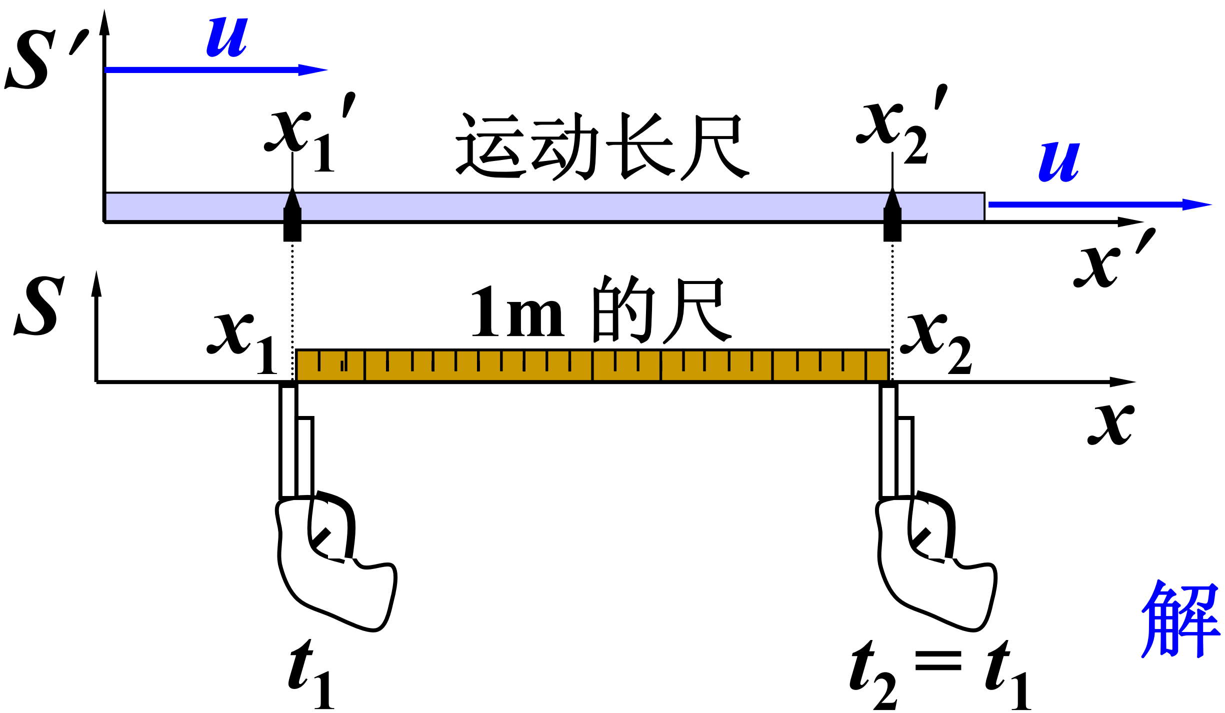
时，隧道后退 $u\Delta t'$。

$$u\Delta t' - \Delta l = \gamma\frac{u^2}{c^2}l_0 - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)l_0$$

$$= l_0(\gamma - 1) > 0$$

也是击不中b。

2.



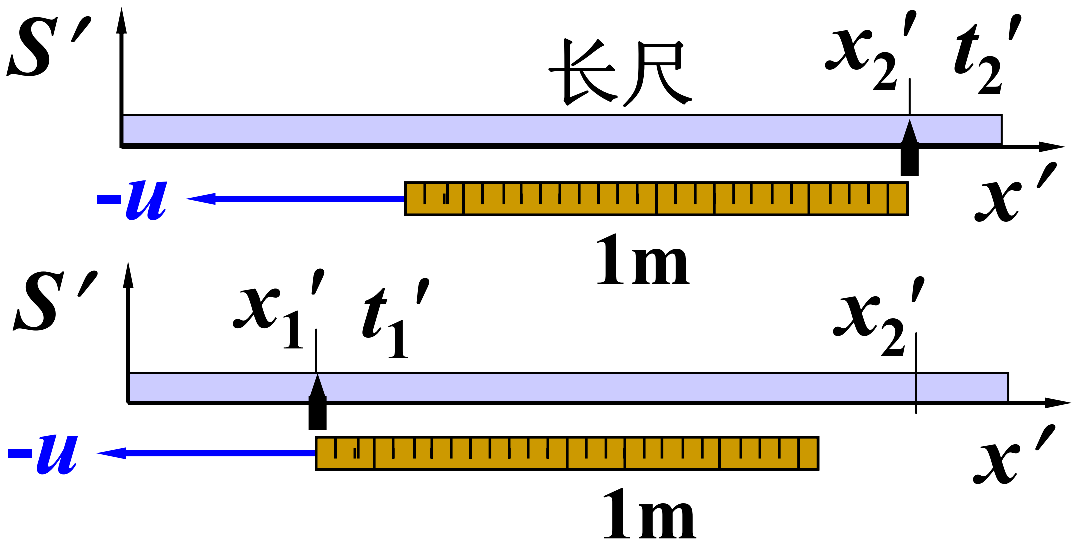
如图示，

问： $x_2'-x_1'$ 与1m比，哪个长？

解法一：在 S 看

$\because\ t_2=t_1$， $\therefore\ x_2-x_1=1\text{m}$ 是运动着的尺上两弹痕的距离，$\therefore$ 是动长， $x_2'-x_1'$是其静长。

$$x_2'-x_1'=\frac{1\text{m}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}>1\text{m}$$



解法二：在S'看

分析： $t_2 = t_1$

$\longrightarrow$ $t_2' < t_1'$
（先）（后）

$x_2' - x_1' =$ S' 系中1m的尺子长度（<1m）
＋ S' 系中1m的尺子运动距离

$$x_2' - x_1' = \Delta l' + u\,|t_2' - t_1'| = \frac{\Delta l}{\gamma} + u\,|\gamma(\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\underline{\Delta t}} - \frac{u}{c^2}\underset{\substack{\parallel \\ \Delta l}}{\underline{\Delta x}})|$$

$$= \gamma\Delta l(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{u^2}{c^2}) = \gamma\Delta l$$

3.

已知：S 系同一地点 x 发生两事件，时间间隔 $\Delta t=4\text{s}$，在 S'系的时间间隔 $\Delta t'=5\text{s}$。

求：（1）S'系对 S 系的速度 u

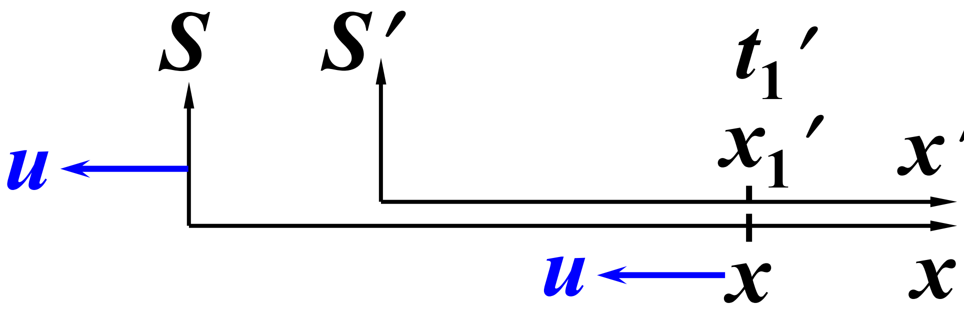
（2）S'系中两事件的空间间隔 l

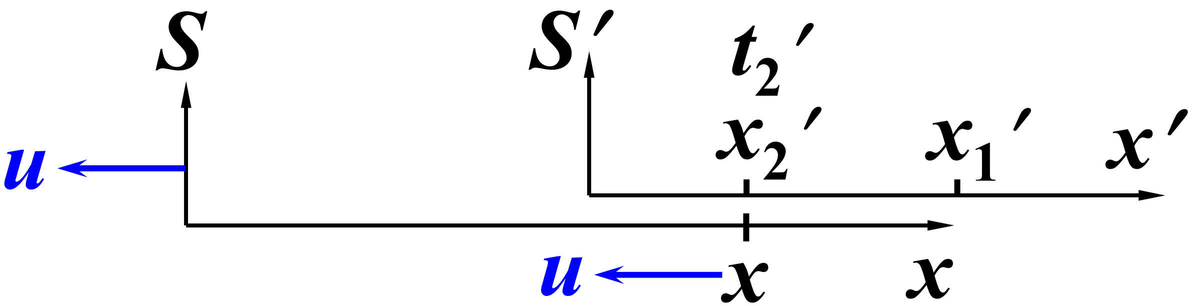
解：（1）$\Delta t=4\text{s}$是原时，$\Delta t'=5\text{s}$是非原时，

$$\Delta t=\Delta t'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \longrightarrow 1-\frac{u^2}{c^2}=\left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

解得 $u=\dfrac{3}{5}c$

（2） 在 S'系中 x 点的速度为 $u=-\frac{3}{5}c$





$$l=|x_2'-x_1'|=|u\Delta t'|=\frac{3}{5}c\cdot 5\mathrm{s}=9\times 10^8\mathrm{m}$$

也可由间隔不变性求得

$$c^2\Delta t_{21}'^2 - \Delta x_{21}'^2 = c^2\Delta t_{21}^2 - \Delta x_{21}^2 = c^2\Delta t_{21}^2$$

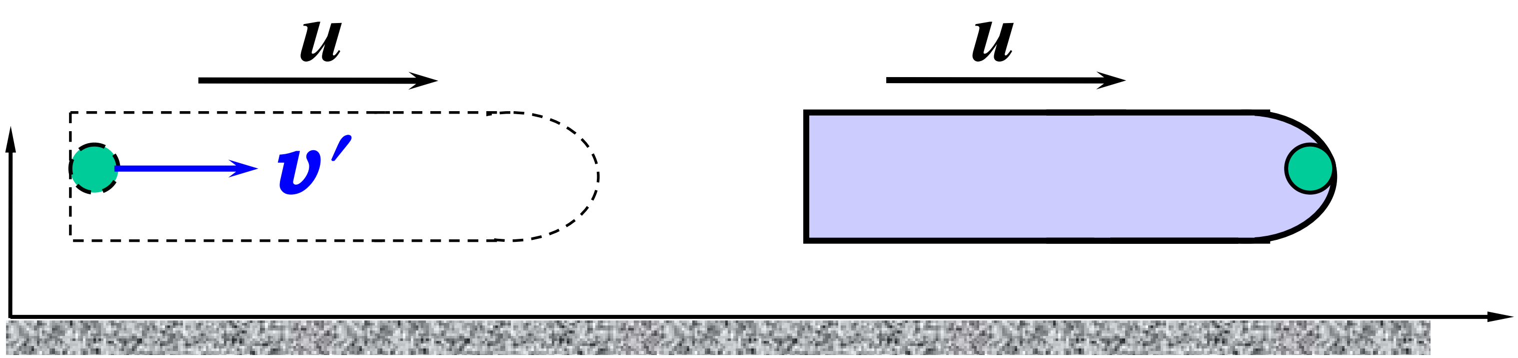
$$|x_2' - x_1'| = \Delta x_{21}' = c\sqrt{\Delta t_{21}'^2 - \Delta t_{21}^2} = 3c = 9\times 10^8\,\mathrm{m}$$

也可由洛仑兹变换求得

$$\left|x_2' - x_1'\right| = \left|\frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right| = \left|\frac{\underbrace{0}_{S\text{系同地}} - \underbrace{\tfrac{3}{5}c}_{S'\text{系速度}}\cdot 4\,\mathrm{s}}{\sqrt{1-(3/5)^2}}\right| = 9\times 10^8\,\mathrm{m}$$

4.

已知：宇宙飞船静长为 L'，以速度 $\vec{u}$ 相对地面作匀速直线运动。有一小球从飞船尾部运动到飞船头部，小球对飞船的速度为 v' 。



求：（1）宇航员测得的小球飞行时间 $\Delta t'$

（2）地面观察者测得的小球飞行时间 Δt

解：（1）在飞船系中测得的飞行时间

飞船长为 L'，小球对飞船飞行的速度为 v'

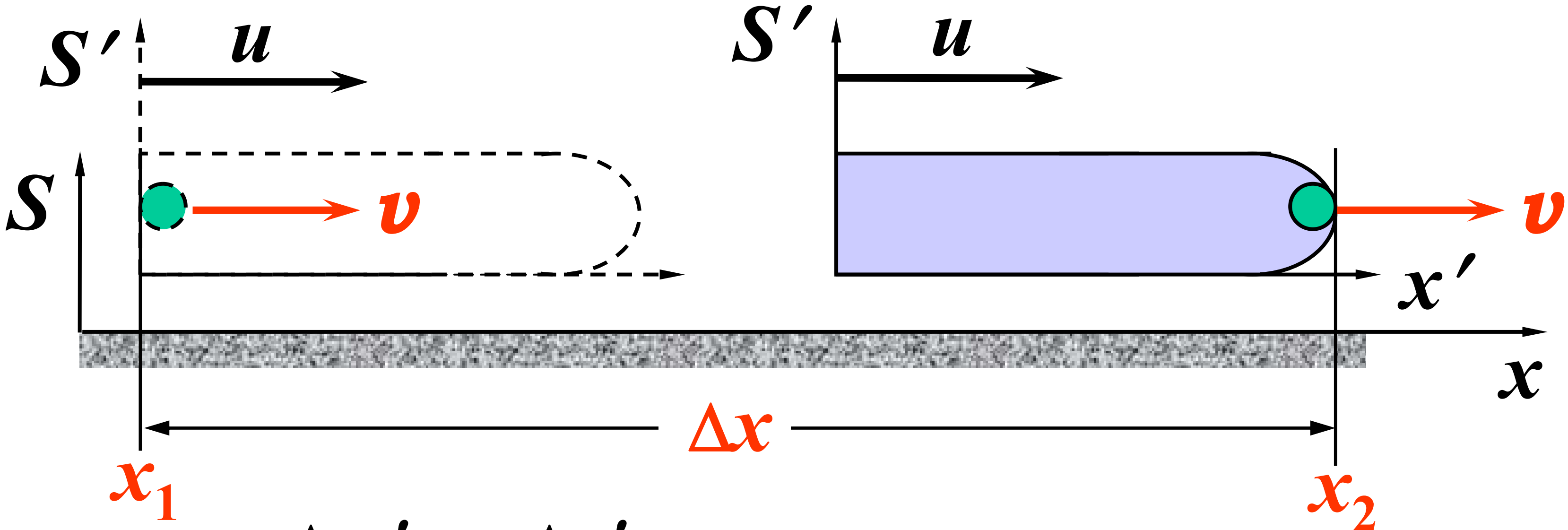
显然有 $$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{v'} = \frac{L'}{v'}$$

（2）在地面系中测得的飞行时间

解法一：直接用洛仑兹时间变换（最简单）

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{L'}{v'} + \frac{u}{c^2}L'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{L'\left(\frac{1}{v'} + \frac{u}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

解法二：分别用洛仑兹坐标变换和速度变换



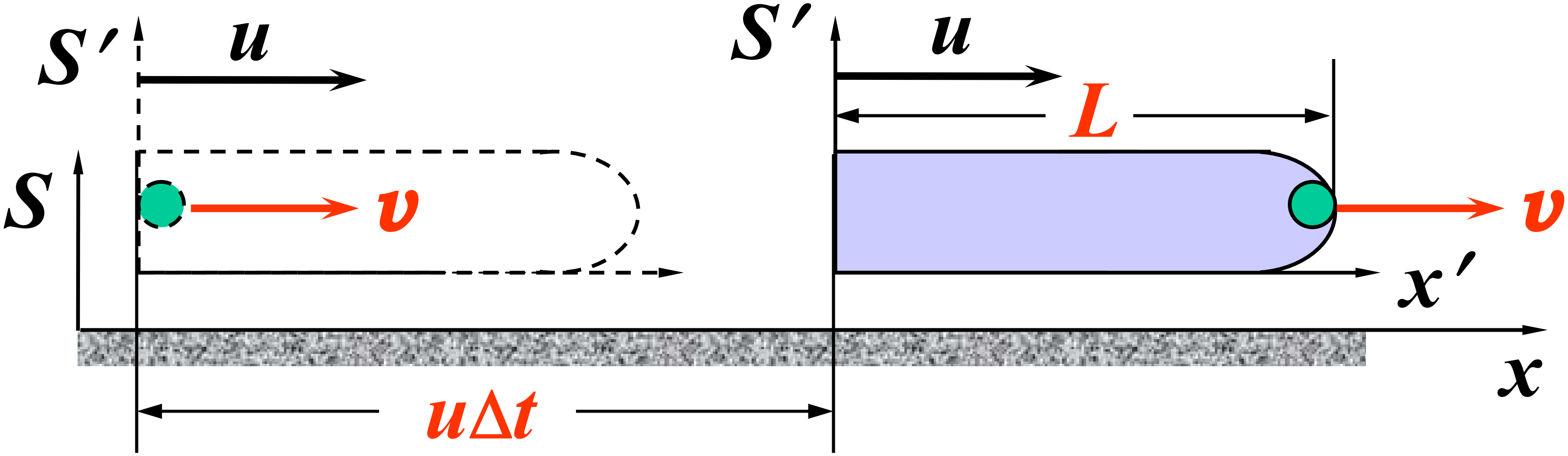
$$\Delta x = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

$$v = \frac{v' + u}{1 + \dfrac{u}{c^2}v'}$$

$$\begin{cases} \Delta x' = L' \\ \Delta t' = L'/v' \end{cases}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{L'\left(\dfrac{1}{v'} + \dfrac{u}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

解法三：　用运动长度缩短和速度变换



S系中飞船长度为 $L = L'\sqrt{1-u^2/c^2}$

S系中小球运动距离 $u\Delta t + L = v\Delta t$

$$\therefore \quad \Delta t = L/(v-u)$$

S系中小球运动速度 $v = \dfrac{v'+u}{1+uv'/c^2}$

解出：$$\Delta t=\frac{L'\sqrt{1-u^2/c^2}}{\dfrac{v'+u}{1+uv'/c^2}-u}=L'\left(\frac{1}{v'}+\frac{u}{c^2}\right)\Bigg/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

解法四：　用间隔不变性

S系中飞船长度为 $L=L'\sqrt{1-u^2/c^2}$

S系中小球运动距离 $u\Delta t+L$

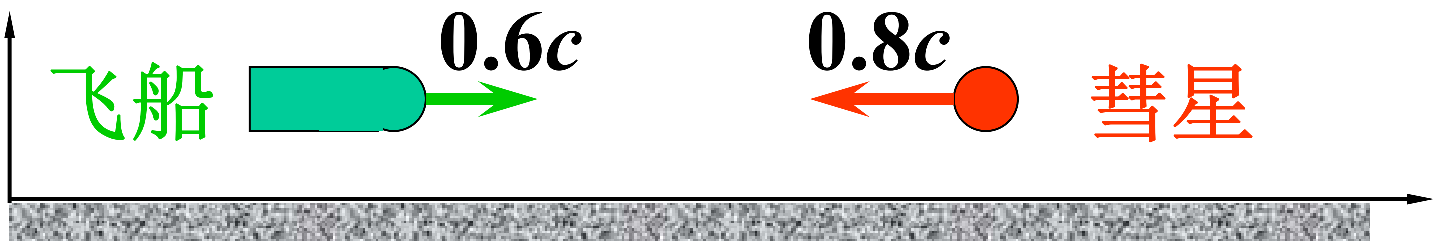
S'系中飞行时间 $\Delta t'=L'/v'$

$$c^2\Delta t^2-(u\Delta t+L)^2=c^2\Delta t'^2-L'^2$$

$$\Delta t=L'\left(\pm\frac{1}{v'}+\frac{u}{c^2}\right)\Bigg/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$ 不好判断正负

5.

已知：在地面上同时发现一艘飞船和一颗彗星，它们相对地面分别以0.6*c*、0.8*c* 速度相向而行。在地面上观察，再有 5 秒两者就要相撞。

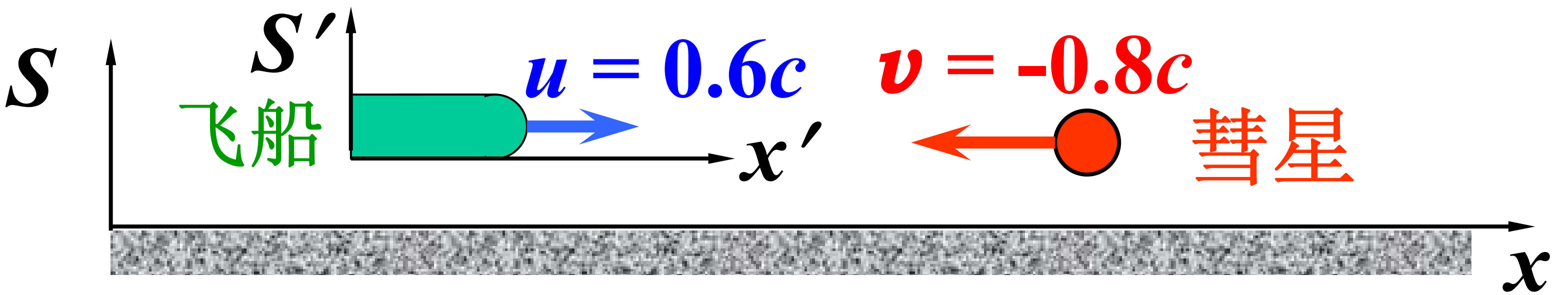


求在飞船上看：（1）彗星的速度多大?

（2）设飞船一经被发现立即得到地面的警示，问此后再经过多少时间飞船将要和彗星相撞?

解：（1）在飞船上看彗星的速度：

设地面为 S 系，飞船为 S' 系



根据洛仑兹速度变换

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2} v} = \frac{-0.8c - 0.6c}{1 + \frac{0.6c}{c^2} \times 0.8c} \approx -0.946c$$

（沿 $-x'$ 方向）

小于光速 c

（2）飞船上看，再经过多少时间相撞？

事件1：飞船被地面上观察到并得到警示

事件2：飞船与彗星相撞

解法一：利用“原时”和“两地时”的关系

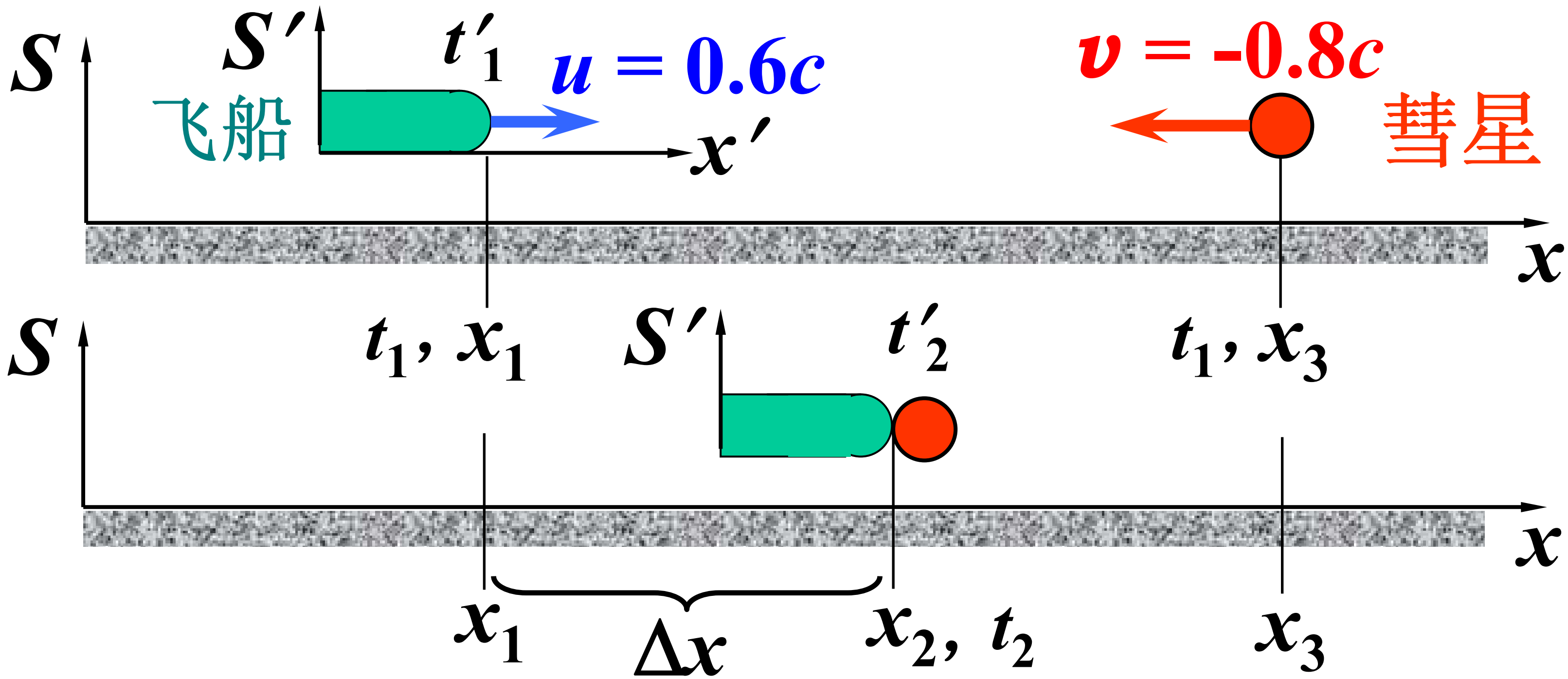
这两事件在飞船上的时间间隔是原时 $\Delta t'$，

在地面上看是两地时 Δt 。

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-u^2/c^2} = 5\sqrt{1-(0.6c/c)^2}$$

$$= 5\times 0.8 = 4\,\mathrm{s}$$

解法二：利用洛仑兹变换

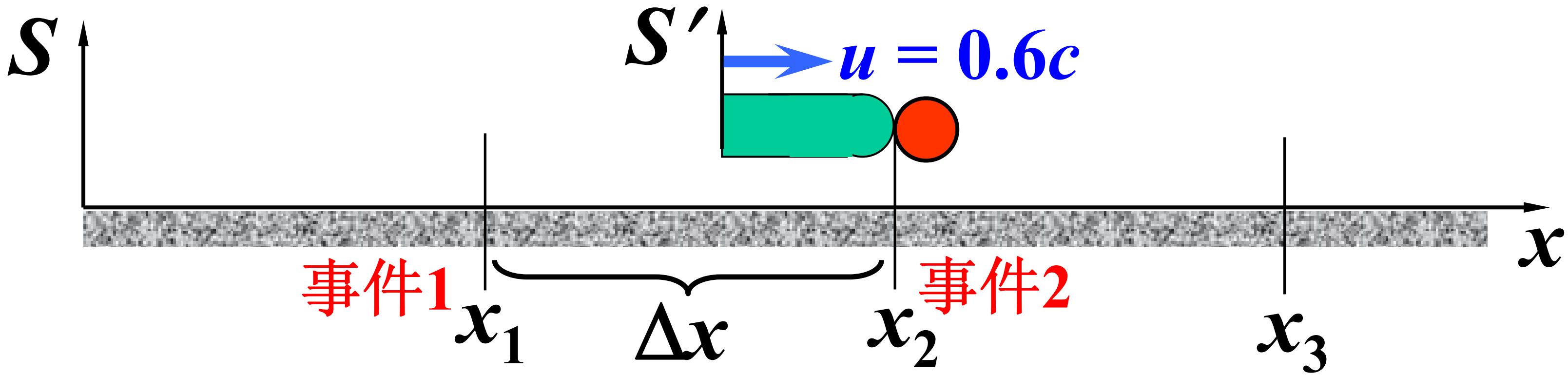


$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \dfrac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{5-\dfrac{0.6c}{c^2}\times 0.6c\times 5}{\sqrt{1-\left(\dfrac{0.6c}{c}\right)^2}} = 4\,\text{s}$$

解法三：利用“时空间隔ΔS”是不变量

事件1：飞船被地面上观察到并得到警示

事件2：飞船与彗星相撞



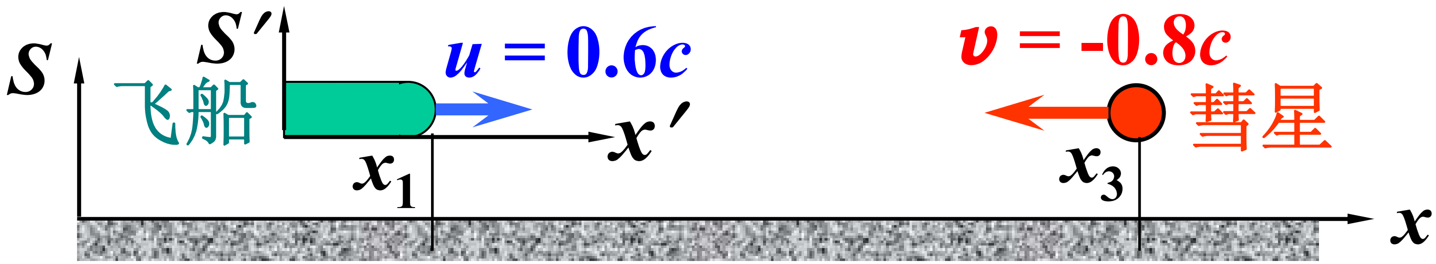
S：$\Delta t = 5\mathrm{s}$，$\Delta x = u\Delta t$

S'：$\Delta t'$未知，$\Delta x' = 0$

$$(c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

$$\Delta t' = 4\,\mathrm{s}$$

问题：有人这样做（解法四），如何？



事件1：地面发现飞船；事件3：地面发现彗星

在地面系中，事件1、3的空间距离是：

$$l = \Delta x_{31} = x_3 - x_1 = (0.6c + 0.8c) \cdot 5\,\text{s} = 7c \cdot \text{s}$$

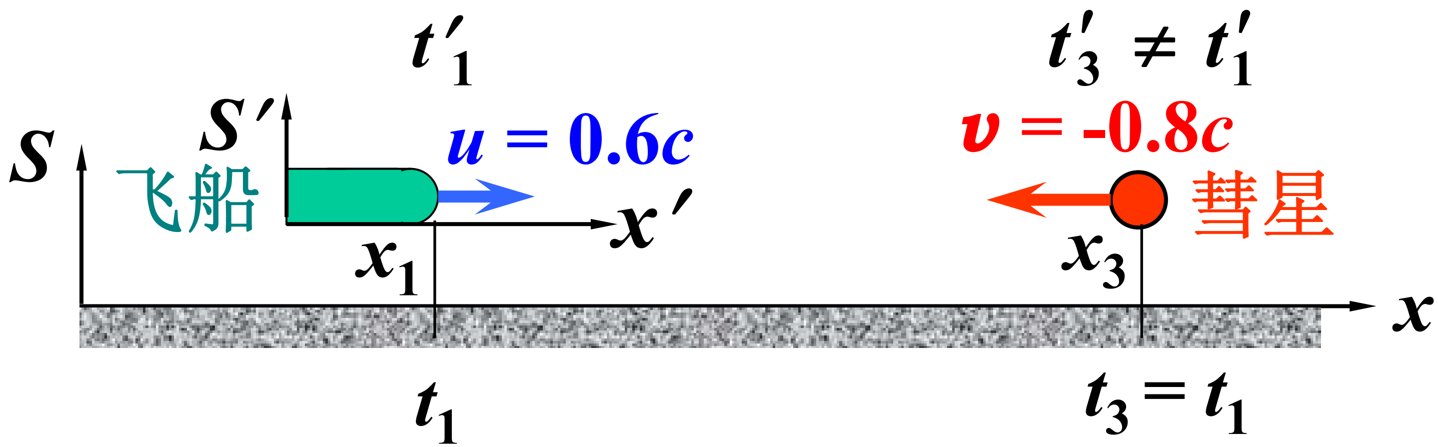
在飞船系中看，这段距离是 l 的动长：

$$l' = \Delta x'_{31} = l \cdot \sqrt{1 - u^2 / c^2} = 7c \times 0.8 = 5.6c \cdot \text{s}$$

在飞船系中彗星的速度是：$v' = -0.946c$

$$\therefore \quad \Delta t' = l' / |v'| \approx 5.6c \cdot \text{s} / 0.946c \approx 5.92\,\text{s} \neq 4\,\text{s}$$

这种理解是错的，因为在飞船系中，事件1、3 并非同时，故 $\Delta x'_{31}$ 不是 Δx_{31} 的动长。



另有人认为 $\because t_1 = t_3$， $\therefore \Delta x_{31}$ 是动长，在飞船系中，彗星和飞船的距离 $\Delta x'_{31}$ 是静长：

$$\Delta x'_{31} = \gamma \Delta x_{31} = \gamma l = \gamma 7c \cdot \mathrm{s} = 8.75c \cdot \mathrm{s}$$

$$\therefore \quad \Delta t' = \Delta x'_{31} / |\upsilon'| = 9.25\,\mathrm{s} \neq 4\,\mathrm{s}$$

这种理解也是错的，$\Delta x'_{31}$不是飞船系中彗星和飞船的距离，因为两个运动物体间的距离必须是它们同时所在位置的空间间隔。

在飞船系，事件1、3并非同时，时间差为：

$$\Delta t'_{31}=\gamma(\Delta t_{31}-\frac{u}{c^2}\Delta x_{31})=-\gamma\frac{u}{c^2}\Delta x_{31}=-5.25\ \mathrm{s}$$

即在飞船系看，地面发现彗星（事件3）在先，比地面发现飞船并发出警示（事件1）早5.25s。

∴飞船得到警示时，它与彗星的距离应为：

$$l'=\Delta x'_{31}-|\Delta t'_{31}|\cdot|v'|$$

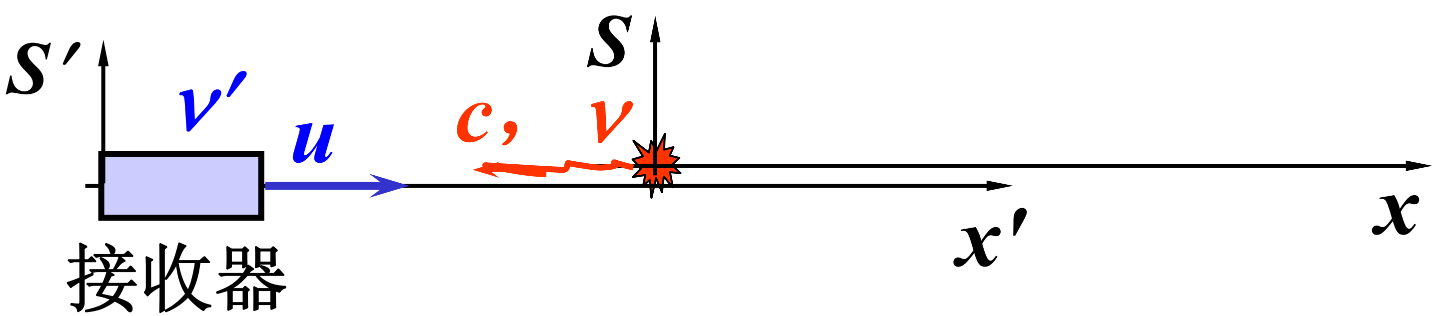
$$\Delta t'=l'/|v'|=9.25-5.25=4\ \mathrm{s}$$ （同前）

6. 在光源静止的参考系中，光的频率为 ν，接收器以速率 u 沿二者连线向着光源匀速运动，

求： 接收器接收到的光的频率 ν'。

解： 设光源参考系为 S 系，如图。

设与接收器相对静止的参考系为 S'，



方法一：用洛仑兹变换

把光源发光一个周期的始、末作为事件1、2

设：S 系中，光的周期为 $t_2 - t_1 = T$

S' 系中，光的周期为 $t'_2 - t'_1 = T'$

说法 1： S 系中事件1、2发生是在同一地点，

T 应是原时，$\therefore$ S' 系中测量周期为 $T' = \gamma T$ 。

说法 2： S' 系中接收光波是在同一地点，

T' 应是原时，$\therefore$ S' 系中测量周期为 $T' = T/\gamma$ 。

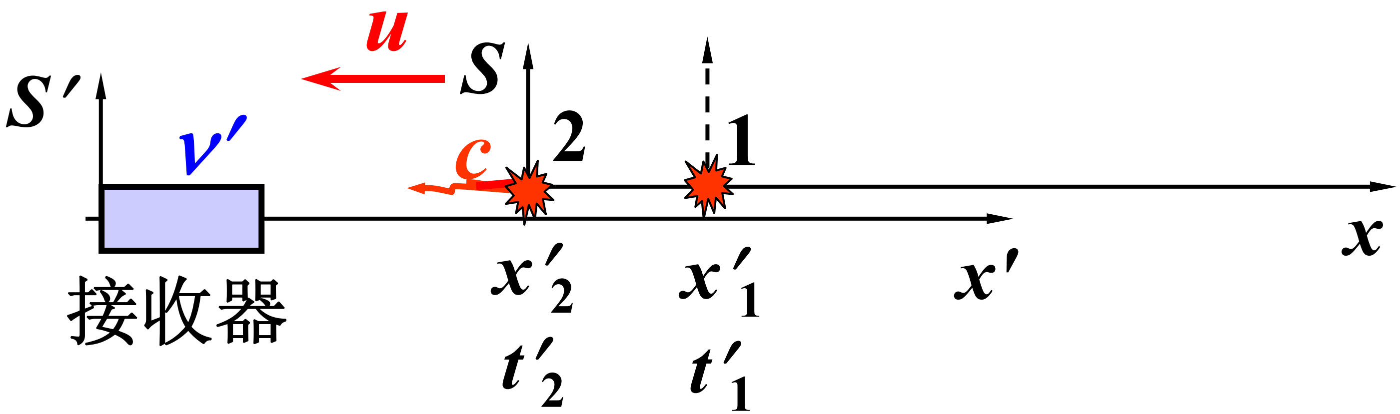
两种说法那种对？

答：两种说法都不对。

S 系中光源发光一个周期的始末2事件，与S'系中接收器相继接收光的一个周期的始末 2 事件，不是相同的2事件，这两个周期之间不是简单的原时与非原时的关系。

正确解法：在 S'系中，事件1、2的时间差为

$$\Delta t'_{21} = \gamma(\underbrace{\Delta t}_{=T} - \frac{u}{c^2}\underbrace{\Delta x_{21}}_{=0}) = \gamma\, T$$



如图，在S'系中，事件1、2的空间距离为

$$\left|\Delta x'_{21}\right| = u\,\Delta t'_{21}$$

事件1、2发的光先后到达接收器的时间差才是周期T'。对光源和接收器相接近的情况有：

$$T' = \frac{\left|\Delta x'_{21}\right|}{c} = \frac{u}{c}\Delta t'_{21}$$ 对吗？ ×

$$T' = \frac{\underline{\Delta t'_{21} c} - \left|\Delta x'_{21}\right|}{c} = \underset{\substack{\| \\ \gamma T}}{\underline{\Delta t'_{21}}}(1 - \frac{u}{c}) = \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}\, T$$

（事件1的光传播的距离）

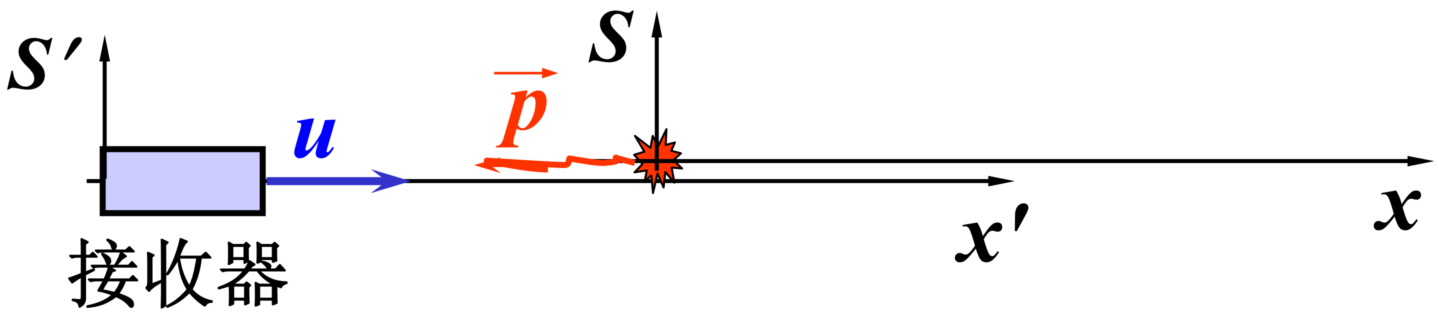
根据频率和周期的倒数关系有：

$$\nu' = \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}\,\nu = \sqrt{\frac{c + u}{c - u}}\,\nu > \nu$$

思考 光源和接收器相互远离结果又如何？

当光源和接收器有相对运动时，测量的频率不同于发射频率的现象称为“多普勒效应”。

*方法二：用光子的能量和动量变换



S 系中：光子动量方向沿 $-x$，由光子的动量能量关系，有：
$$p_x = -\frac{E}{c}\,;\ p_y = p_z = 0$$

S'系中：由动量、能量变换关系，得光子能量为：

$$E' = \gamma(E - up_x) = \gamma(E + \frac{uE}{c}) = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}E$$

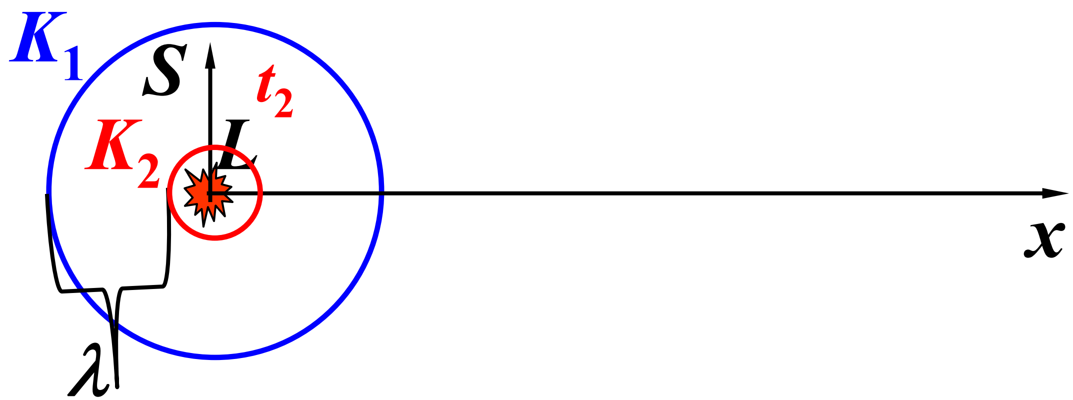
又 $E = h\nu$，$E' = h\nu'$，$\therefore \nu' = \sqrt{\dfrac{c+u}{c-u}}\nu > \nu$

补充：下面再深入讨论一下光波的产生和接收

1. 地面*S*系中静止光源的光波的产生

t_1时刻静止光源*L*开始发光，结果是产生波阵面K_1

t_2时刻静止光源*L*前一次发光结束，新一次发光开始，结果是产生波阵面K_2，而波阵面K_1扩大到一定程度（以光速*c*）

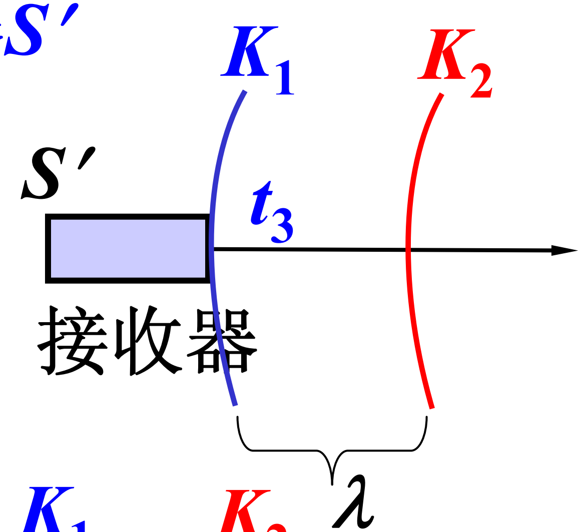


波阵面K_1与K_2是以光源*L*为中心的同心球（注意光源*L*相对*S*是静止的），它们之间的距离就是波长λ，而t_2-t_1就是周期*T*。

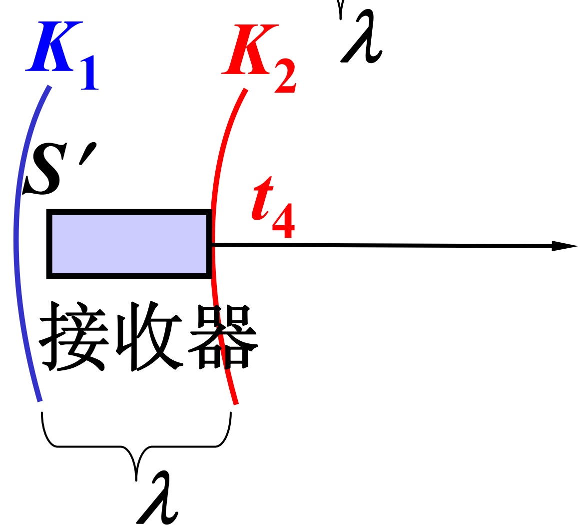
2. 地面S系中静止光源产生光波的传播和接收

假设地面S系有一个静止的接收器S'

经过一段时间后，在时刻t_3波阵面K_1先到达接收器S'，引起一个物理响应。



又经过一段时间后，在时刻t_4波阵面K_2到达接收器S'，又引起一个物理响应。



两个物理响应的时间差$t_4 - t_3$就是接收器检测到的周期 T，且这种情况下 $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$

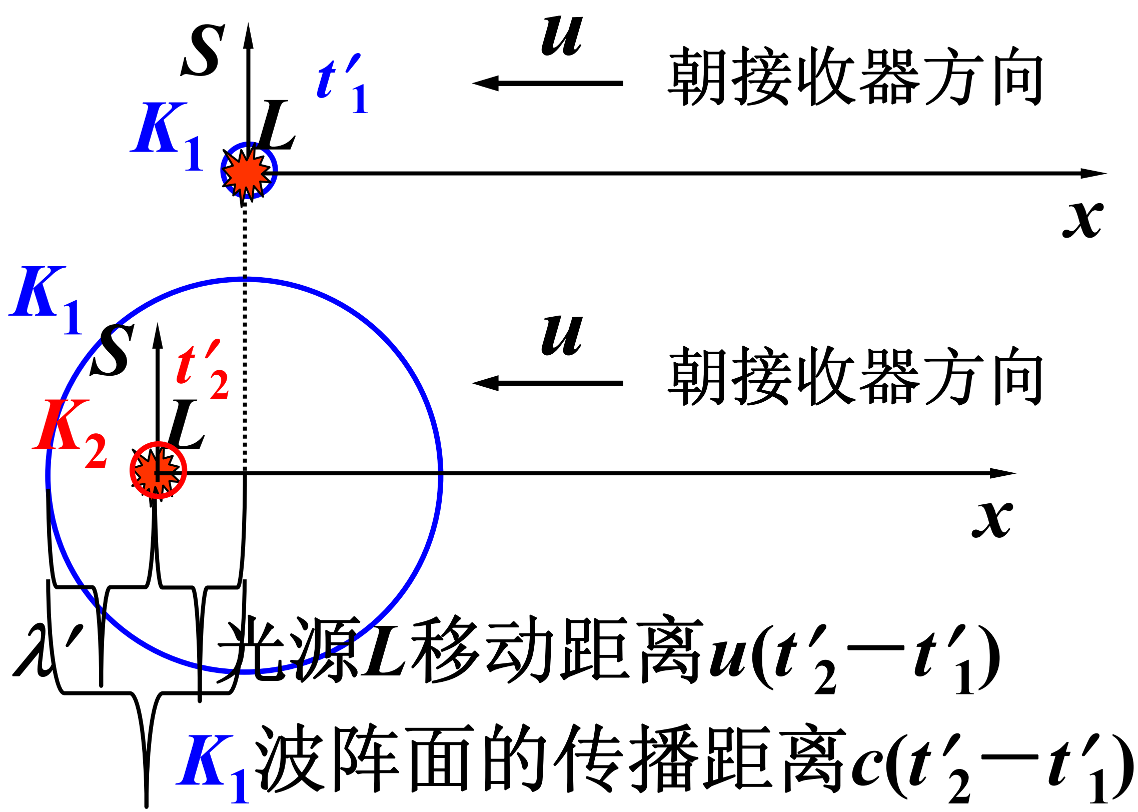
但如果接收器S'是运动的，如向右运动会怎么样？

3. 运动接收器S'系中光波的产生

在运动接受器S'中观察，（1）光源L不再静止，而是以速度u运动；（2）K_1和K_2的产生由“S中的同地、不同时”变为这里的不同地、不同时，且K_1的产生仍在K_2之前，（因果关系），综合结果就是：

- t'_1时刻，K_1产生，
- t'_2时刻，K_2产生，
- 而这段时间内光源L运动了一段距离$u(t'_2-t'_1)$，K_1波阵面传播了一段距离$c(t'_2-t'_1)$，因此：

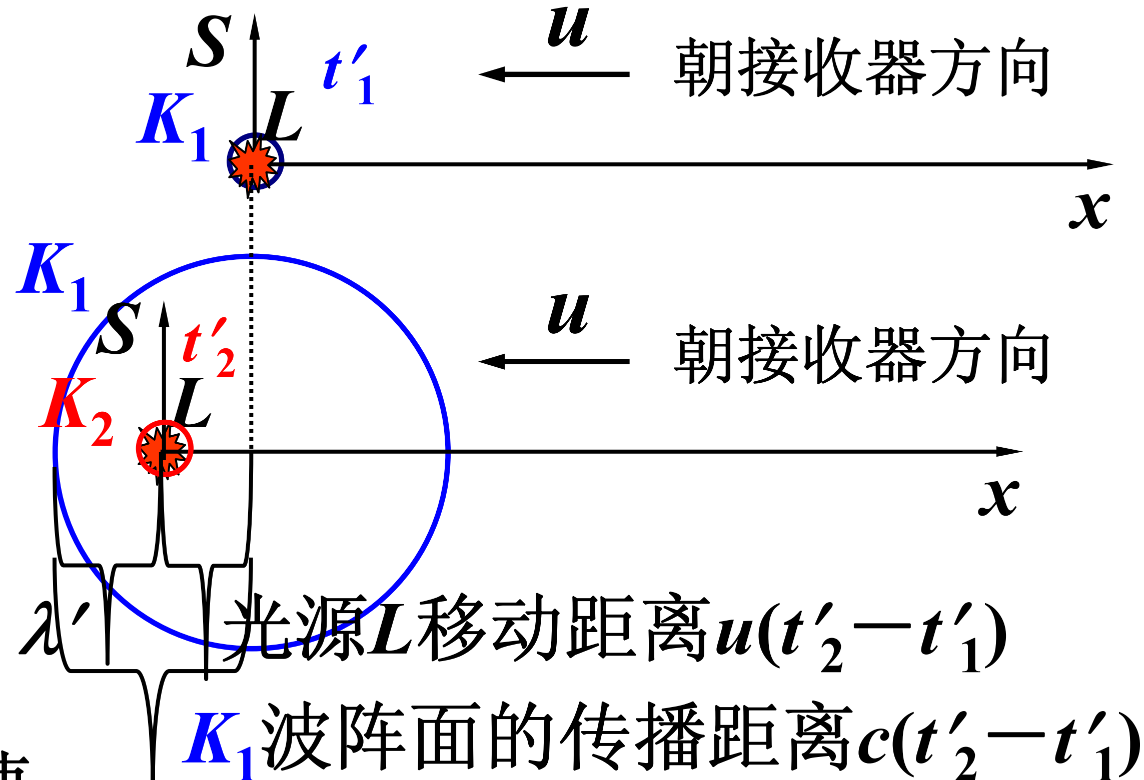
$$\lambda' = (c-u)(t'_2-t'_1)$$



4. 运动接收器S'系中光波的传播和接收

注意：由于光源L的运动，使得K_1和K_2波阵面不再是同心球，包括随后产生的其它波阵面K_i，都不是同心球，但其领先地位却是：

$K_1, K_2, \ldots K_i, \ldots,$



因为光源速度小于光速。

（对于声波，则存在声源速度大于声速情况，波阵面领先次序颠倒，这就是超音速现象，产生破坏力极大的冲击波）

所有光波阵面的传播速度（c）一样，所以其间距即波长λ'是不变的。接收仍分两个时刻，接收波长λ'的光子。

5. 运动接收器S'系中接收的光波频率

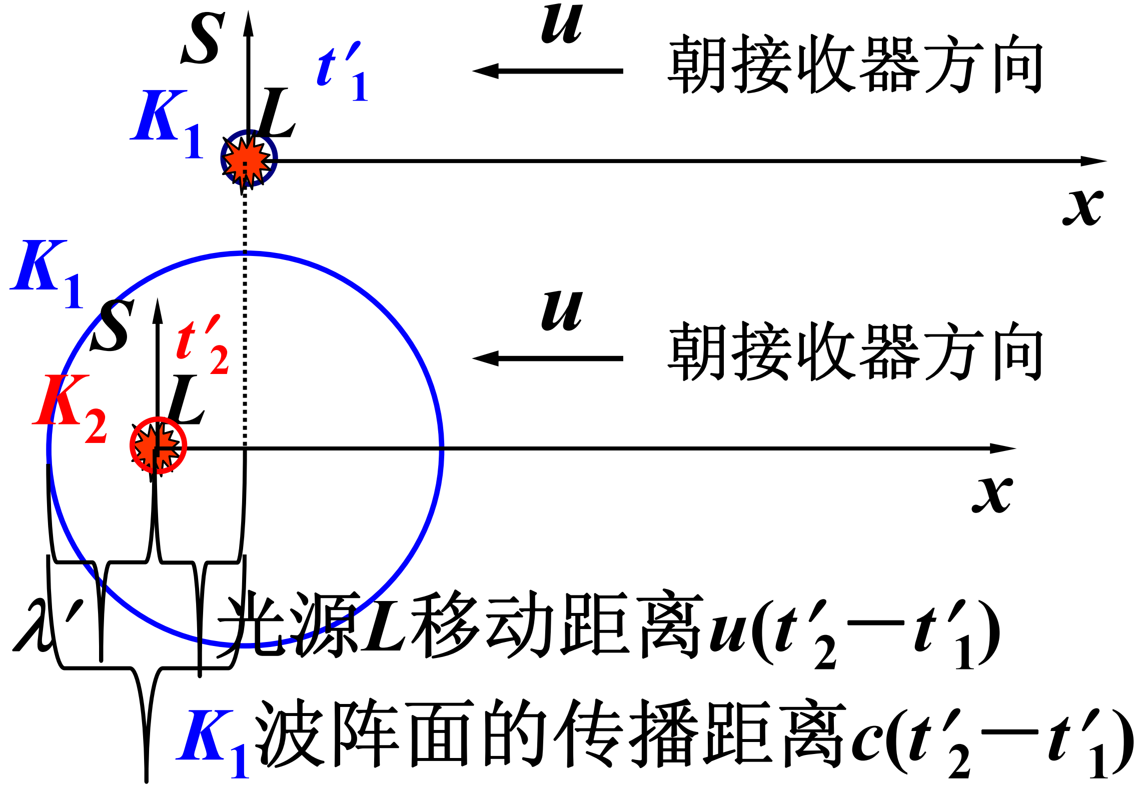
$$\lambda' = (c-u)(t_2' - t_1')$$

$$\boxed{t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1)}$$

$$t_2 - t_1 = T = \frac{1}{\nu}$$

$$\left(t_2' - t_1' \neq T' = \frac{1}{\nu'}\right)$$

$$\lambda' = \frac{c}{\nu'}$$



$$\nu' = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}\ \nu > \nu$$