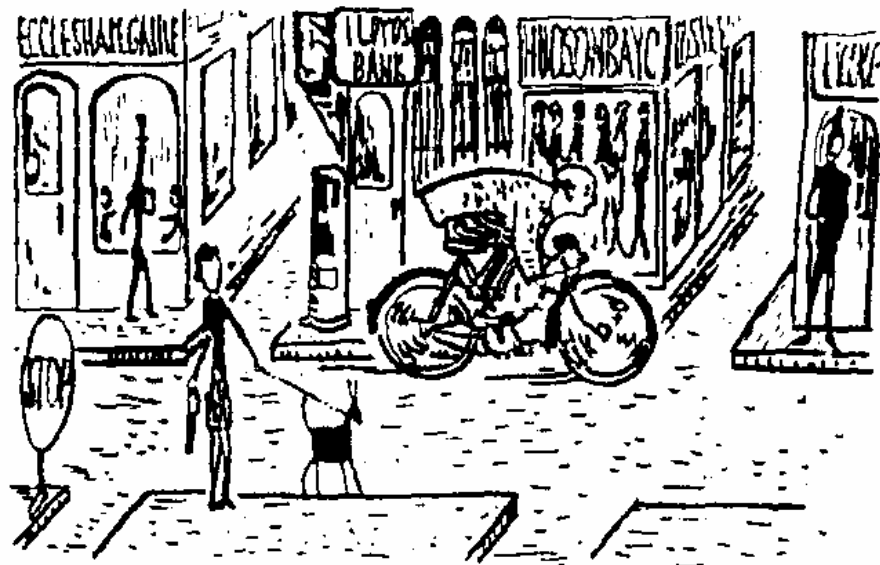


## \*高速运动物体的视状 — Penrose-Terrell 旋转

伽莫夫的科普名著

《物理世界奇遇记》

中描述汤普金斯先生  
骑车在一个光速很小的  
城市见到周围一切  
都变扁了。

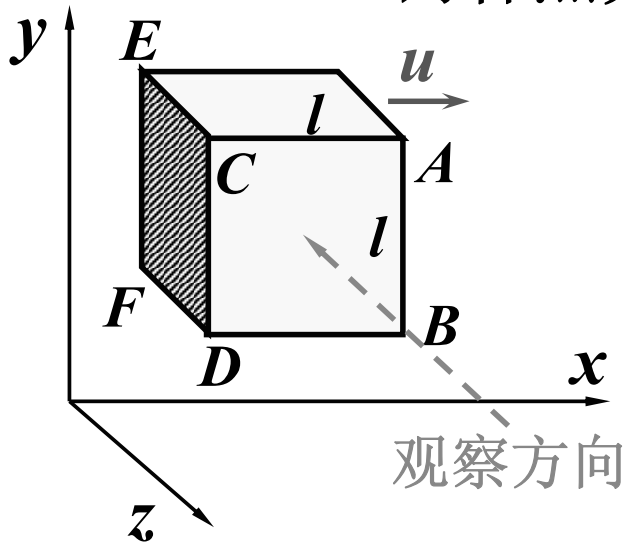


汤普金斯先生的奇遇

相对论问世后几十年间，物理学家普遍持这种看法。直到Roger Penrose（1958）和James Terrell（1958）分别发表文章，才纠正了这种看法。书中描绘的是运动物体的“测量形象”，而不是“视觉形象”。

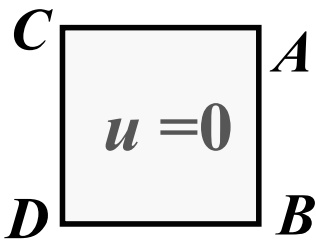
“测量形象”是运动物体上各点同时刻位置的形象。

“视觉形象”是物体上各点发的光同时到达眼睛成像，而各点并不一定是同时刻发光。



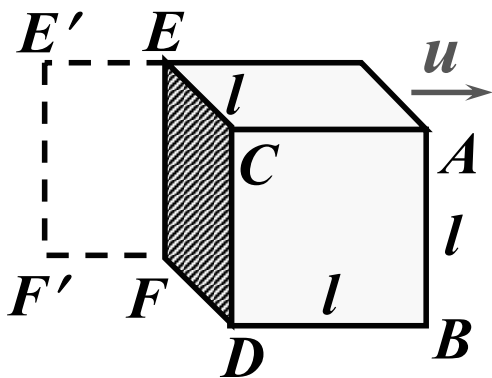
如图，当观察者离物体足够远时，可认为从  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  各点发的光都沿  $z$  方向到达观察者的眼睛。

$u = 0$  时只能看到  $ABCD$  面。



$u \neq 0$  时  $\overline{AC}$  和  $\overline{BD}$  缩短  $\sqrt{1 - u^2 / v^2}$  倍，同时  $CDEF$  面也能够被看到，

— Penrose-Terrell 旋转



若  $E$ 、 $F$  在  $E'$ 、 $F'$  位置时发的光与  $ABCD$  面发的光同时到达眼睛，

$$\text{要求 } \overline{EE'} = \overline{FF'} = \frac{l}{c} \cdot u$$

$$\text{而 } \overline{AC}_{\text{动长}} = \overline{BD}_{\text{动长}} = l \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

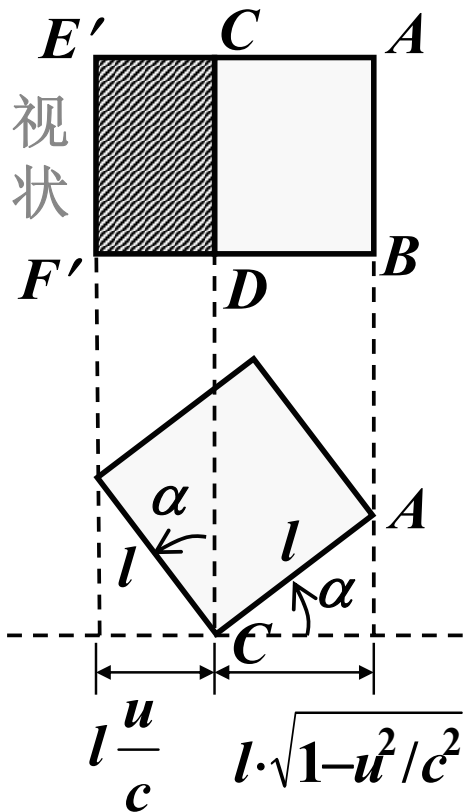
这相当于物体水平逆时针（俯视）

$$\text{旋转 } \alpha \text{ 角: } \cos \alpha = \frac{\overline{AC}_{\text{动长}}}{l} = \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = u/c$$

结果提前看到了运动物体的后侧面，  
提前看不到了运动物体的前侧面。

当  $u \rightarrow c$  时， $\overline{AC}_{\text{动长}} \rightarrow 0$ ， $\alpha \rightarrow 90^\circ$   
物体从正前方经过只能看到后侧面。



4.4.9 高速运动物体的表现形象

在麦克利<sup>[4]</sup> (McCrea)，特勒尔<sup>[5]</sup> (Terrell)，潘勒斯<sup>[6]</sup> (Penrose)，和威斯可夫<sup>[7]</sup> (Weisskopf) 提醒注意之前；一直有一个普遍的错误概念是，如果观察一个运动物体，当其速度可与光速相比拟时，那么将看到物体在沿运动方向缩短。必须记住，人在特定时刻看到（或拍摄）什么东西取决于此时刻实际到达眼睛（或像机）的光。这些光量子是在不同时刻从物体的不同部位发出的。来自物体的距观察者最远部分的光子比来自距观察者最近部分的光子早发出。考虑边长为  $l$  的立方体，它相对惯性系  $\Sigma$  以匀速  $v$  运动，如图 4.7(a) 所示， $v$  与光速可以相比，但小于光速。设在垂直运动方向从很远处观察此立方体，从而，这个立方体对在  $\Sigma$  原点  $O$  的观察者位置的张

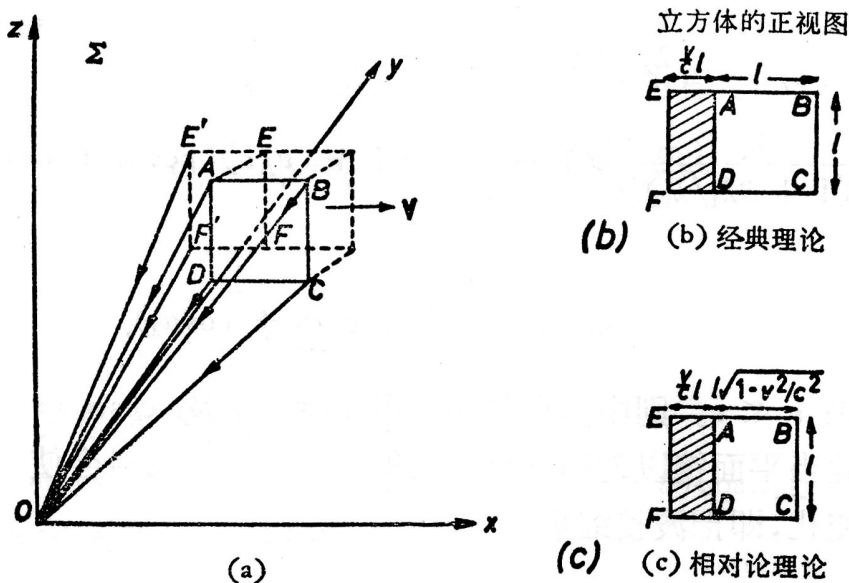


图 4.7 (a) 立方体以匀速  $v$  相对  $\Sigma$  运动。当立方体的  $x$  坐标为零时由四角  $A, B, C$  和  $D$  发出的光量子同时到达  $O$ 。  $E$  和  $F$  在  $E'$  和  $F'$  位置发出的光量子也与  $A, B, C$  和  $D$  的量子同一时刻到  $O$ 。当立方体远离观察者时，按照经典理论和狭义相对论，其视图分别如图 (b) 和 (c) 所示。

角是很小的,如图 4.7(a) 所示. 我们首先利用非相对论观点考虑. 如果立方体静止, 只能看到  $ABCD$  面. 当立方体运动时, 同时到达眼睛形成像的来自四角  $A, B, C$  和  $D$  的光量子必然在同一时刻离开四角. 如果发光时四角距观察点等距离, 如图 4.7(a) 所示, 那么  $A, B, C$  和  $D$  点呈现为正方形的四个角. 当立方体相对观察者运动时, 从角  $E$  和  $F$  发出的光量子也能到达眼睛, 如图 4.7(a) 所示. 从这两个角发出的量子离开立方体时间早些, 那时角  $E$  和  $F$  处在  $E'$  和  $F'$  的位置, 如图 4.7(a) 所示. 因此运动立方体的  $ADFE$  面是可见的, 它呈现矩形. 如果眼睛远离立方体, 按一级近似,  $E$  点的光在  $E'$  到  $E$  的时间内走过附加距离  $l$ . 因此  $EE'$  等于  $(v/c)l$ . 立方体的非相对论性图象如图 4.7(b) 所示. 此立方体视图与转动一角度后的静止立方体的图象相似, 使得  $ADFE$  面可以见到如图 4.8(a) 所示. 设立方体转动一角度  $\alpha$ , 使得  $AE$  边的

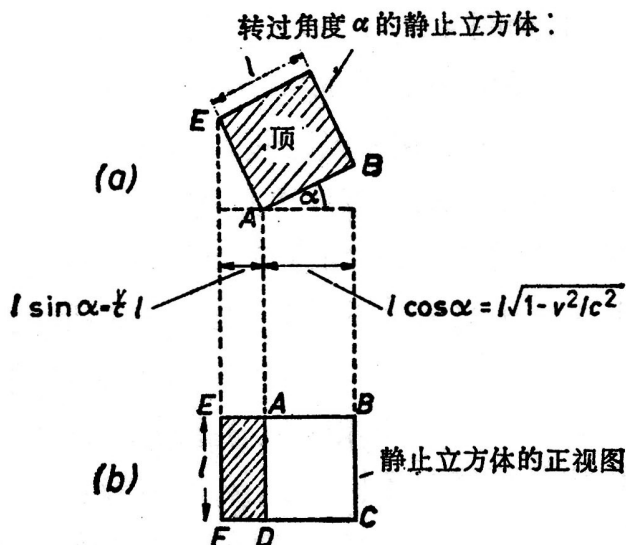


图 4.8 转动角度  $\alpha = \sin^{-1}v/c$  后的静止立方体的表观形象; (a) 为顶视图, (b) 为正视图. 后者与狭义相对论所预言的, 并如图 4.7(c) 所示的远处运动立方体的表观形象相同.

投影等于  $(v/c)l$ , 如图 4.8(a) 和 (b) 所示. 角  $\alpha$  由下式给出

$$\sin \alpha = v/c.$$

$AB$  边的投影则等于

$$l \cos \alpha = l \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

于是, 按照非相对论性理论, 运动立方体的表观形象与旋转了的静止立方体的表观形象不完全相同, 因为静止立方体  $AE$  边的投影等于  $(v/c)l$ ,  $AB$  边的投影等于  $l(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ , 而运动立方体  $AB$  边显出具有长度  $l$ . 于是根据非相对论性理论, 运动立方体的表观形象应该是相同于  $AB$  长度增加了  $1/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$  倍的旋转了的静止立方体.

按照狭义相对论,  $AE$ ,  $AD$ ,  $DF$ , 和  $EF$  全部垂直于运动方向, 因而长度不变, 所以  $ADFE$  的形象将与非相对论性情况相同. 另一方面,  $AB$  是平行于运动方向的, 因而应缩短成  $l(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ . 此长度缩短正好补偿经典情况  $AB$  长度的表观增加, 如图 4.7(c) 所示. 于是按照狭义相对论, 运动立方体的表观形象与旋转角度  $\alpha = \sin^{-1}(v/c)$  后的静止立方体相同[比较图 4.7(c) 和 4.8(b)].

运动立方体还可从立方体静止的惯性系  $\Sigma'$  来考虑. 设在  $\Sigma'$  中静止的观察者  $O'$  在光到达  $O$  点观察者的时刻与  $O$  重合, 对应于图 4.7(a) 中立方体的位置, 如图 4.9 所示.  $O$  和  $O'$  与来自立方体各部分的光重合是不依赖于任何特殊坐标系的事件, 于是  $O$  和  $O'$  看到的图象间应有某些相似之处, 虽然  $O$  和  $O'$  的量度和解释可能是不同的. 按  $\Sigma'$  中静止的观察者来说, 来自静止立方体的光与  $\Sigma'$  的  $x'$  轴的夹角好像小于  $90$  度, 因为相对于惯性系  $\Sigma'$ , 必定先让该立方体与  $\Sigma$  的  $y$  轴重合,  $O'$  才能重合于  $O$ .  $\Sigma'$  中静止在  $O'$  点的观察者还能看到立方体的  $ADFE$  面, 因此  $\Sigma'$  中“静止”的立方体好像转动了一个角

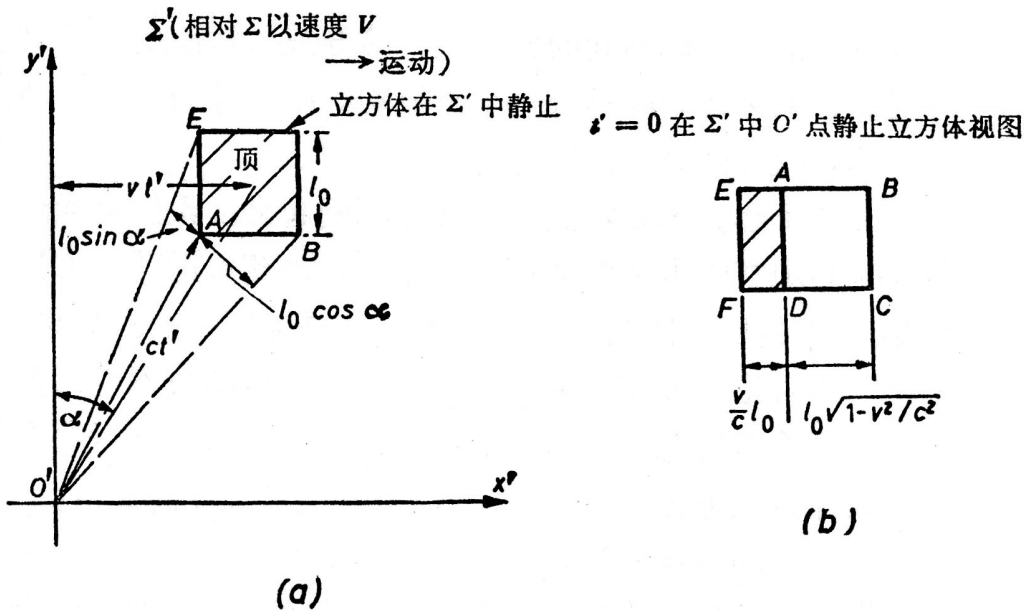


图 4.9 立方体在  $\Sigma'$  中静止. 从  $\Sigma'$  原点  $O'$  观察, 此时  $O'$  与  $\Sigma$  原点  $O$  重合. 当光通过从立方体到  $O'$  的距离  $ct'$  时,  $\Sigma$  的  $y$  轴向左移动距离  $-vt'$ . 如果立方体远离  $O'$ , 则  $\sin\alpha' \approx v/c$ . 相对  $\Sigma'$  的  $y'$  轴以角度  $\alpha'$  观察立方体,  $O'$  的观察者可以看到静止立方体的  $ADEF$  面, 如图 (b) 所示. 对于在  $\Sigma$  中所见到的运动立方体的形状这与狭义相对论所预言的相同, 如图 4.7(c) 所示.

度  $\alpha'$ . 因为当光通过从立方体到  $O'$  的距离  $ct'$  时,  $\Sigma$  的  $y$  轴相对  $\Sigma'$  通过距离  $vt'$ , 所以有

$$\sin \alpha' \approx \frac{vt'}{ct'} \approx v/c.$$

于是“静止”立方体相对静止在  $O'$  点的观察者好像转动了角度  $\sin^{-1}(v/c)$ . 因此相对于静止在  $\Sigma'$  中  $O'$  点的观察者和静止在  $\Sigma$  中  $O$  点的观察者, 立方体好像具有相同的形状, 虽则对于在他们估算发光时刻立方体离他们的距离时, 他们将估算得不同的值.

特勒尔<sup>[5]</sup>证明了, 在一般情况下, 以任意角度观察运动物体时, 则按照狭义相对论, 只要运动物体对观察点的张角很小, 运动物体的表观在形状上不变; 但转动一行差角, 它可由

方程(4.40)算出。如果物体在观察点的张角是有限的,那么物体不同部分呈现不同的转动量,这导致形状改变。潘勒斯曾证明,如果运动圆球张角是有限的,则圆球表面会出现变形,但运动圆球的轮廓仍是圆形。

必须小心,不要把测量与观看混同起来。人们将通过在同一时刻观察立方体两端在尺上的位置来测量运动立方体的长度。按照狭义相对论,测量到的长度是缩短了的。如果,按照狭义相对论所预言,人们看到运动立方体图象不变形但转动了,那么若考虑到来自立方体各部分的光量子飞行的有限时间而计算立方体的尺度,则将推出发生了长度缩短。

来自运动物体的光要有光行差和多普勒频率移动。假设运动物体在其静止的参考系  $\Sigma'$  中发出单色光。有理由假设光在此参考系中各向同性地发出。对于  $\Sigma$ , 此物体以速度  $v$  运动。光在  $\Sigma$  中的角分布可由方程(4.45)计算出。由于除了当  $\theta' = \pi$  的情况以外  $\theta$  始终小于  $\theta'$ , 因此光行差的效应是使越来越多的光集中到物体的运动方向。于是光的发射强度向前比向后大,因而在极高速度时,光将主要向前方发射。当光源运动朝向观察者时,光频率增加,对于非常高速度它将移到紫外区。在光源经过观察者之后,频率下降,谱线向红端移动,因为光源这时背离观察者运动。于是,当单色光源正相对实验室运动时,光发射强度和频率在不同方向是不同的。因此,当物体相对观察者运动时,不只是在空间上有表观转动,而且运动物体的颜色和表观亮度也是不同的。

## 参 考 文 献

- [1] Møller, C. *The Theory of Relativity*. Ch. 2. Oxford University Press, London, 1952
- [2] Ives, H. E. and Stillwell, G. R. *J. opt. Soc. Amer.* 28(1938) 215; 31(1941) 369