题目：赤道上有一高楼，一物体由楼顶自由下落时，由于地球自转的影响，物体将落在楼根的东侧，这一现象称为落体东移。证明物体着地点与楼根的距离为

$$\frac{2h\omega}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

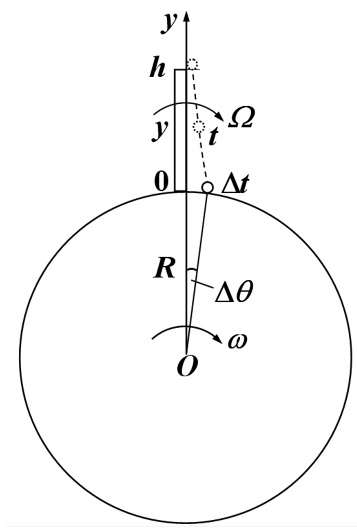
其中 h 为楼高，ω 为地球自转角速度。计算中楼高对地球半径之比取一级近似。

分 3 种方法求解

方法 1、在以地心为原点的惯性系中求解

设Ω是下落物体的角速度，ω是地球（楼）的角速度，注意两个角速度方向垂直纸面向里。物体自由下落后，只受地心引力，物体关于地心 O 点角动量守恒，所以：

$$m(R+y)^2\Omega = m(R+h)^2\omega \qquad (1)$$



设物体下落时间为Δt ，物体落地点的偏角为：

$$\Delta\theta = \int_0^{\Delta t}\Omega \mathbf{d}t - \omega\Delta t \qquad (2)$$

$$t = \sqrt{2(h-y)/g} \qquad (3)$$

$$\Delta t = \sqrt{2h/g} \qquad (4)$$

由（1）式并在 $y=h$ 附近作展开：

$$\Omega = \omega\left(\frac{R+h}{R+y}\right)^2$$

$$\approx \omega[1-\frac{2(y-h)}{R+h}] \approx \omega[1+\frac{2}{R}(h-y)] \qquad (5)$$

由（3）式得：

$$\mathbf{d}t = -\frac{\mathbf{d}y}{\sqrt{2g(h\text{-}y)}} \qquad (6)$$

代（5）（6）到（2）： $$\Delta\theta = \int_0^h \frac{\omega \mathbf{d}y}{\sqrt{2g(h\text{-}y)}}\left(1+\frac{2}{R}(h-y)\right) - \omega\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2h\omega}{3R}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

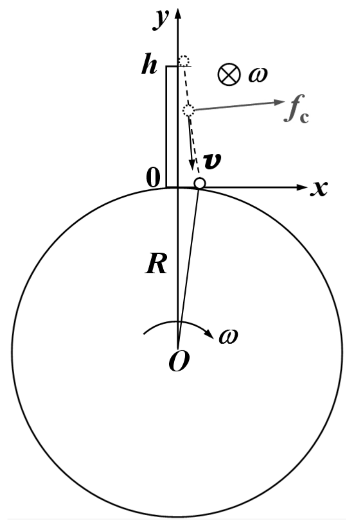
落体东移的距离为： $$R\Delta\theta \approx \frac{2h\omega}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

方法 2、把自转的地球当做参考系，在这个匀速转动非惯性系中求解

物体自由下落中受地球引力和科里奥利力 f_c 作用。由于 $\upsilon_x << \upsilon_y$ ，可近似认为 f_c 沿 x 方向

$$f_c \approx 2m\omega\upsilon_y = 2m\omega gt$$

物体的运动：y 方向是自由落体，x 方向是在 f_c 作用加速运动：



$$m\frac{\mathbf{d}\upsilon_x}{\mathbf{d}t} = 2m\omega gt$$

$$\upsilon_x = 2\omega g\int_0^t t\mathbf{d}t = \omega gt^2$$

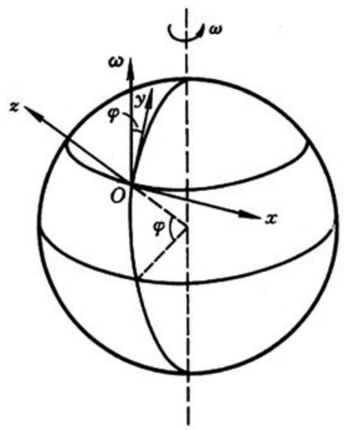
$$x = \int_0^{\Delta t}\upsilon_{\mathbf{x}}\mathbf{d}t = \omega g\int_0^{\Delta t}t^{\mathbf{2}}\mathbf{d}t = \frac{\omega g\Delta t^3}{3} = \frac{2h\omega}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

下面是循规蹈矩的方法，比较难，里面会近似是求解关键

【题 19】 地球以角速度 ω 自转，一质点在纬度 φ 上空 h 高度处自由下落．忽略空气阻力和惯性离心力．试求因科里奥利力引起的落地点的偏离．

【分析】 落体偏离是地球上观察到的一个重要现象，它是地球自转和物体相对地球运动所引起的科里奥利力的效应．应取地球为参考系(非惯性系)，处理方法与上题类似，只是本题还有重力的作用．

【解】 如图，取地球为参考系，取直角坐标 $Oxyz$，原点 O 在落体初始位置正下方的地面上，x 轴与纬度线相切指向东方，y 轴与经度线相切指向北方，z 轴垂直地面向上．图中 $\boldsymbol{\omega}$ 为地球自转角速度，质点初始位置为$(0,0,h)$，初速度为$(0,0,0)$．



力图 2－19－1

质点受重力 $m\boldsymbol{g}$ 及科里奥利力 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$，由牛顿第二定律，其运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{g} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \ddot{\boldsymbol{r}}$ 分别是质点的位矢，速度和加速度．式中有关量的具体形式为

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}} &= (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) \\
\boldsymbol{g} &= (0, 0, -g) \\
\boldsymbol{\omega} &= (0, \omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) \\
\boldsymbol{v} &= (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & \omega\cos\varphi & \omega\sin\varphi \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \\
&= (\omega\cos\varphi\cdot\dot{z} - \omega\sin\varphi\cdot\dot{y})\boldsymbol{i} + \omega\sin\varphi\cdot\dot{x}\boldsymbol{j} - \omega\cos\varphi\cdot\dot{x}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是 x, y, z 轴的单位矢量．于是，(1)式的分量形式为

$$\begin{cases}
\ddot{x} = -2\omega\left(\cos\varphi\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \sin\varphi\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
\ddot{y} = -2\omega\sin\varphi\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
\ddot{z} = -g + 2\omega\cos\varphi\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}
\end{cases} \tag{2}$$

或

$$\begin{cases}
\mathrm{d}\dot{x} = -2\omega(\cos\varphi\mathrm{d}z - \sin\varphi\mathrm{d}y) & (3) \\
\mathrm{d}\dot{y} = -2\omega\sin\varphi\mathrm{d}x & (4) \\
\mathrm{d}\dot{z} = -g\mathrm{d}t + 2\omega\cos\varphi\mathrm{d}x & (5)
\end{cases}$$

(3)式积分，得

$$\dot{x}=-2\omega(z\cos\varphi-y\sin\varphi)+C$$

初条件为 $z=h,y=0$ 处(起始点)的 $\dot{x}=0$，故积分常量为

$$C=2\omega h\cos\varphi$$

代入，得

$$\dot{x}=-2\omega[(z-h)\cos\varphi-y\sin\varphi]$$

(4)式积分，得

$$\dot{y}=-2\omega x\sin\varphi+C$$

初条件为 $x=0$ 处，$\dot{y}=0$，故积分常量 $C=0$，代入，得

$$\dot{y}=-2\omega x\sin\varphi$$

(5)式积分，得

$$\dot{z}=-gt+2\omega x\cos\varphi+C$$

初条件为 $t=0$ 时，$x=0,\dot{z}=0$，故积分常量 $C=0$，代入，得

$$\dot{z}=-gt+2\omega x\cos\varphi$$

把上述由(3)、(4)、(5)式积分得出的 $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ 代入(2)式，得

$$\begin{cases}\ddot{x}=-2\omega(-gt\cos\varphi+2\omega x\cos^2\varphi+2\omega x\sin^2\varphi)\\ \quad=2\omega gt\cos\varphi-4\omega^2x\\ \ddot{y}=4\omega^2\sin\varphi[(z-h)\cos\varphi-y\sin\varphi]\\ \ddot{z}=-g-4\omega^2\cos\varphi[(z-h)\cos\varphi-y\sin\varphi]\end{cases}$$

因地球自转角速度 ω 较小，上式中各 ω^2 项可略，得

$$\begin{cases}\ddot{x}=2\omega gt\cos\varphi\\ \ddot{z}=-g\end{cases}$$

积分，得

$$\begin{cases}\dot{x}=(\omega g\cos\varphi)t^2+C_1\\ \dot{z}=-gt+C_2\end{cases}$$

初条件为 $t=0$ 时，$\dot{x}=0,\dot{z}=0$，故积分常量 $C_1=C_2=0$，代入，得

$$\begin{cases}\dot{x}=(\omega g\cos\varphi)t^2\\ \dot{z}=-gt\end{cases}$$

再积分，得

$$\begin{cases}x=(\frac{1}{3}\omega g\cos\varphi)t^3+C_3\\ z=-\frac{1}{2}gt^2+C_4\end{cases}$$

初条件为 $t=0$ 时，$x=0,z=h$，故积分常量 $C_3=0,C_4=h$，代入，得

$$\begin{cases}x=\left(\frac{1}{3}\omega g\cos\varphi\right)t^3 & (6)\\ z=h-\frac{1}{2}gt^2 & (7)\end{cases}$$

前已由(4)式积分得出 $\dot{y}=-2\omega x\sin\varphi$，把上述 x 代入，得

$$\dot{y}=\left(-\frac{2}{3}\omega^2 g\sin\varphi\cos\varphi\right)t^3$$

积分，得

$$y=\left(-\frac{1}{6}\omega^2 g\sin\varphi\cos\varphi\right)t^4+C$$

初条件为 $t=0$ 时，$y=0$，故积分常量 $C=0$，代入，得

$$y=\left(-\frac{1}{6}\omega^2 g\sin\varphi\cos\varphi\right)t^4 \tag{8}$$

(6)、(7)、(8)式就是质点自由下落时，位置随时间变化的规律．因落地点的 $z=0$，由(7)式，质点自高 h 处落地所需的时间为

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

代入(6)、(8)式，得出质点落地点的 x,y 坐标为

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}\omega g\cos\varphi\sqrt{\dfrac{8h^3}{g^3}} \\ \quad=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8h^3}{g}}\,\omega\cos\varphi \\ y=-\dfrac{2\omega^2h^2}{3g}\sin\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

若质点在北纬40°从离地面100 m的高度处自由下落，将 $\varphi=40°$，$h=100\text{ m}$，$\omega=\frac{2\pi}{24\times3600}=7.3\times10^{-5}\text{ rad/s}$ 代入，得

$$\begin{cases} x=1.68\times10^{-2}\text{ m}=16.8\text{ mm} \\ y=-8.86\times10^{-5}\text{ m}=-0.0886\text{ mm} \end{cases}$$

即落地点向东偏16.8 mm，向南偏0.0886 mm(与东偏相比可忽略)，这正是科里奥利力的效应．