

# 摘自 郑永令 《力学》 第2版 P177

## 例 2 第三宇宙速度.

从地球表面以一定速度发射宇宙飞船(或航天器),使它不仅能脱离地球的引力束缚,而且还能摆脱太阳的引力束缚而飞向太空,这一速度(相对地球)的最小值称为第三宇宙速度.求第三宇宙速度的值.已知地球环绕太阳运动的轨道速度  $v_e = 2.98 \times 10^4$  m/s.

解:由图 4.6-6 可见,不计发射过程,在相对太阳静止的参考系上看,从地球上发出的飞船飞离太阳进入太空将经历两个过程.首先,飞船应有足够的动能,以克服地球引力作用进入不受地球引力的区域,但飞船仍沿地球绕太阳运动的轨道运动;其次,这时飞船仍有足够的动能,以克服太阳引力的束缚,飞离太阳进入太空.所谓第三宇宙速度,就是指能完成这两个过程的飞船应具有的最小初速度.为充分利用地球的轨道速度,此初速度应与地球轨道速度同方向.

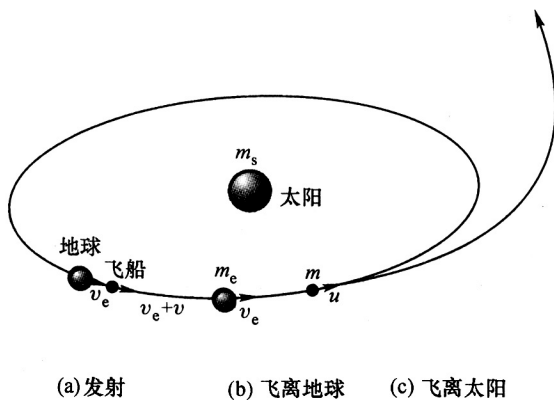


图 4.6-6 飞船飞向太空的过程

设想飞船已脱离地球引力作用,在地球轨道上运动,其相对太阳的速度为  $u$ . 如果此飞船能飞离太阳而进入太空,  $u$  的最小值可以利用计算第二宇宙速度的同样的方法求得,即由下式决定:

$$\frac{1}{2} mu^2 - G \frac{m_s m}{r_e} = 0 \quad (1)$$

式中  $m_s$  为太阳的质量,  $r_e$  为地球的轨道半径,  $m$  为飞船的质量. 由此得

$$u = \sqrt{\frac{2Gm_s}{r_e}} = \sqrt{2} v_e$$

其中  $v_e = \sqrt{Gm_s/r_e}$  就是地球绕太阳运行的轨道速度. 将  $v_e = 2.98 \times 10^4$  m/s 代入,得

$$u = 4.21 \times 10^4 \text{ m/s}$$

这时飞船相对地球的速度为

$$u - v_e = 1.23 \times 10^4 \text{ m/s}$$

所求的第三宇宙速度,也就是此飞船在未脱离地球引力束缚前尚处于地球表面时相对地球的速度. 为了求此速度,可在地球-飞船体系的质心系内应用功能原理. 由于太阳引力对此体系不作功,此体系的机械能守恒.

由于地球质量比飞船大得多,地球-飞船体系的质心与地球中心实际上重合. 因而,在质心系中,不论是飞船尚未飞离地球还是已经飞离地球,地球的速率都几乎是零. 设所求的第三宇宙速度为  $v$ ,利用质心系中的机械能守恒定律,立即可得

$$\frac{1}{2} mv^2 - G \frac{m_e m}{R} = \frac{1}{2} m(u - v_e)^2 \quad (2)$$

即

$$v^2 = \frac{2Gm_e}{R} + (u - v_e)^2$$

式中  $\frac{2Gm_e}{R}$  即第二宇宙速度 ( $1.12 \times 10^4$  m/s) 的平方, 于是

$$v = \sqrt{(1.12 \times 10^4)^2 + (1.23 \times 10^4)^2} \text{ m/s} = 1.66 \times 10^4 \text{ m/s} = 16.6 \text{ km/s}$$

## 摘自 杨维纶《力学与理论力学》上册 P90

**例 5.5** 计算第三宇宙速度. 从地面出发的火箭如具有第三宇宙速度, 那就不仅能够脱离地球, 而且可以逸出太阳系.

**解** 首先, 规定无穷远点  $\infty$  的引力势能为零, 由于火箭的机械能守恒, 火箭要逸出太阳系, 其机械能  $E$  至少应等于零. 这里的  $E$  指的是火箭的动能  $mv^2/2$  以及太阳-火箭的势能  $-GMm/\rho$ . 在地球这样的距离上, 这个判据成为

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R_1} = 0$$

其中,  $R_1$  为地球与太阳的距离. 由上式解得

$$v = \sqrt{2GM/R_1} \approx 42.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

这就是说, 在地球这样的距离上, 一个物体必须具有  $42.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  的速率才可以逸出太阳系而飞往其他恒星. 但这里还没有计及地球的引力, 上面的  $42.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  应当是已脱离了地球引力范围时的速率. 那么, 火箭从地面出发时相对于地球的速率  $v'$  应当多大呢?

先选用“静止”(相对于太阳为静止)参考系, 火箭已脱离了地球引力范围时的动能应为  $mv^2/2$ , 这时火箭-地球势能为 0. 为了用最小的速度达到目的, 应当沿地球公转方向发射火箭, 以最大限度地利用地球的公转动能. 考虑到地球公转速率为  $29.8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , 火箭以相对速率  $v'$  从地面出发时的动能为  $m(v' + 29.8)^2/2$ , 其时火箭-地球势能为  $(-mgR^2/\rho)|_{\rho=R}$ ,  $R$  为地球半径. 因为万有引力是保守力, 我们可以运用机械能守恒原理

$$\frac{1}{2}m(v' + 29.8)^2 - \frac{mgR^2}{\rho} \Big|_{\rho=R} = \frac{1}{2}m(42.2)^2$$

由此求得

$$v' = \sqrt{42.2^2 + 11.2^2} - 29.8 = 13.9 \text{ (km} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

但这结果是错误的.

类似于前一个例子, 在火箭逸出地球引力范围的过程中, 地球相对于“静止”参考系的速率也随之而变. 由于地球质量很大, 这个速率变化很小. 另外, 正因为地球质量很大, 尽管速率变化很小, 动能的改变却颇为可观. 必须考虑地球动能的改变才可以得出正确的结果. 为了计算火箭的速率, 竟需要考虑地球运动情况的改变, 这是太不方便了.

选取“地球-火箭”系统的质心坐标系则比较方便,因为地球的质量远远超过火箭的质量,“地球-火箭”系统的质心实际上也就是地球的质心.地球相对于它自己的质心,当然是始终静止的.在质心坐标系中,地球的动能始终为0,无须特别计及地球的动能.在质心系中,火箭已脱离了地球引力范围的动能应为  $m(42.2 - 29.8)^2/2$ ,其时“地球-火箭”势能为零.火箭以相对速率  $v'$  从地面出发时的动能为  $mv'^2/2$ ,其时“地球-火箭”势能为  $(-mgR^2/\rho)|_{\rho=R}$ .因为万有引力是保守力,我们可以运用机械能守恒原理

$$\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{mgR^2}{\rho} \Big|_{\rho=R} = \frac{1}{2}m(42.2 - 29.8)^2$$

由此求得第三宇宙速度

$$v' = \sqrt{(42.2 - 29.8)^2 + 11.2^2} = 16.7(\text{km} \cdot \text{s}^{-1})$$

这样,无须计算地球运动情况的改变,就能求得正确的第三宇宙速度.