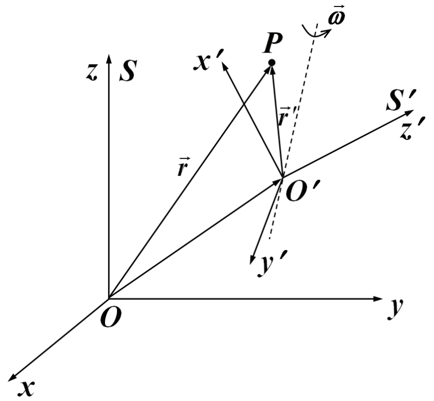
如图，设转动参考系 S' 相对静止参考系 S 绕原点 O' 以恒定角速度 $\vec{\omega}$ 转动（O' 在 S 系是固定点），质点 P 相对 S、S' 系的位矢分别为 $\vec{r}$，$\vec{r}\,'$，显然下列矢量关系成立：



$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'(t)$$

要注意这个关系在 S、S' 系看是不一样的：

在 S 系看：

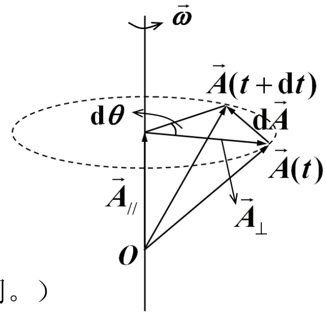
$$x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = \overrightarrow{OO'} + x'(t)\vec{i}\,'(t) + y'(t)\vec{j}\,'(t) + z'(t)\vec{k}\,'(t) \qquad (1)$$

在 S' 系看：

$$x(t)\vec{i}(t) + y(t)\vec{j}(t) + z(t)\vec{k}(t) = \overrightarrow{OO'} + x'(t)\vec{i}\,' + y'(t)\vec{j}\,' + z'(t)\vec{k}\,'$$

这是因为在 S 系看，$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 是常矢量，而 $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ 不是常矢量，以角速度 $\vec{\omega}$ 在转动；反过来在 S' 系看，$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 不是常矢量，在转动，而 $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ 是常矢量。另外矢量 $\overrightarrow{OO'}$ 在 S 系看是常矢量，在 S' 系看不是常矢量，在转动。

如右图，在课堂上我们证明过，一个矢量 $\vec{A}$ 如果以角速度 $\vec{\omega}$ 转动，则它对时间的导数是：



$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{A} \qquad (2)$$

（即要证明 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times (\vec{A}_{//} + \vec{A}_{\perp}) = \vec{\omega} \times \vec{A}_{\perp} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\left|\vec{A}_{\perp}\right|\hat{\omega} \times \hat{A}_{\perp}$ 成立，

即要证明 $\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}\theta\left|\vec{A}_{\perp}\right|\hat{\omega} \times \hat{A}_{\perp}$ 成立，看右图很容验证大小方向相同。）

对（1）式两边求时间的导数，针对 $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ 的导数用（2）式可得：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\vec{i}\,' + x'\frac{\mathrm{d}\vec{i}\,'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\vec{j}\,' + y'\frac{\mathrm{d}\vec{j}\,'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\vec{k}\,' + z'\frac{\mathrm{d}\vec{k}\,'}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + x'\vec{\omega} \times \vec{i}\,' + y'\vec{\omega} \times \vec{j}\,' + z'\vec{\omega} \times \vec{k}\,'$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \qquad (3)$$

从（3）式我们得到一个重要的结论：在静止参考系 S 中求转动参考系 S' 中的某个矢量 $\vec{A}' = A'_x\vec{i}\,' + A'_y\vec{j}\,' + A'_z\vec{k}\,'$ 对时间的导数，结果是：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\vec{A}'}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega} \times \vec{A}' \qquad (4)$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 表示在静止参考系 S 中对时间求导，此时 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 不变，$\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ 变，$\dfrac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}$ 表示在转动参考系 S' 中对时间求导，此时 $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$ 不变，$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 变（这个不会用到）。

对（3）式进一步求导，并利用（4）式可得，注意假设了 $\vec{\omega}$ 恒定：

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') \qquad (5)$$

其中第二项是科里奥利加速度，第三项是牵连加速度。显然由于这两项的存在，在转动参考系 S' 中牛 II 定律不成立，分别定义科里奥利力和惯性离心力：

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}, \quad \vec{F}_{离} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

则在转动参考系 S' 中考虑了这两个力之后，牛 II 定律成立：

$$\vec{F} + \vec{F}_C + \vec{F}_{离} = m\vec{a}' \qquad 或 \qquad m\vec{a} + 2m\vec{v}'\times\vec{\omega} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = m\vec{a}'$$