摘自W.G.V.罗瑟著的《相对论导论》
岳曾元，关德相 翻译，谈镐生校，科学出版社，1980版

第五章 相对论力学

5.1 引 言

当坐标和时间按洛伦兹变换变化时，牛顿力学定律不遵守相对性原理，因而要使力学纳入狭义相对论，就必须修正这些定律．按照刘易斯和托尔曼[1]的途径，我们来考虑两球碰撞的假想实验．它说明为了使力学理论与狭义相对论变换式相一致，在此特殊情况下，应该如何修正牛顿力学．然后将结果推广到更一般情况．我们不直接从牛顿定律开始，而将从动量守恒定律开始．在牛顿力学中，动量守恒定律是从牛顿第二和第三运动定律直接导出的，正如1.3节所述．如果在一个惯性系（比如说 Σ）中动量守恒定律成立，则有

$$\sum mu_x = C_1;\ \sum mu_y = C_2;\ \sum mu_z = C_3, \tag{5.1}$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 是常数．如果假设运动粒子的质量 m 是不变量，那么，利用牛顿力学的速度变换［方程(1.10)—(1.12)］，在 Σ' 中，有

$$\sum m(u'_x + v) = C_1,$$

即

$$\sum mu'_x = C_1 - v\sum m = \text{常数},\text{因为 } v \text{ 和 } m \text{ 是常数},$$

$$\sum mu'_y = \sum mu_y = C_2,$$

$$\sum mu'_z = \sum mu_z = C_3.$$

因此，在牛顿力学中，如果在一个惯性系内动量守恒定律成立，则在所有惯性系内皆成立．另一方面，如果假设粒子质量是不变量，并将狭义相对论的速度变换式代入方程(5.1)，则

得到

$$\sum mu_x = \sum m \frac{(u'_x + v)}{(1 + vu'_x/C^2)} = C_1.$$

如果假设 m 是不变量，此方程不能改写成 $\sum mu'_x =$ 常数的形式. 因此，在狭义相对论中必须重新定义物体的惯性质量，动量守恒定律才能在所有惯性系中成立. 本书只有在阐述了适当的理论之后，才能给出诸如质量之类的各种量的精确定义. 现在我们只需了解，当所有粒子的速度远小于光速时，这些量的定义近似地等于牛顿力学的定义，但是当粒子具有高速时，它们与经典定义的差别可能变成非常重要. 如果当坐标和时间按洛伦兹变换变化时，新的力学定律遵守相对性原理，那么只要长度、时间、速度和加速度在新理论中出现，它们就必须按照第三章和第四章中建立的方程来定义和变换.

5.2 运动粒子的质量

我们将假设在相对论力学中，动量守恒定律是成立的[1]. 还将假设物体的质量不是绝对的，而可以因物体的速度不同而变化.

我们将分别从两惯性系 Σ 和 Σ' 来考虑两个弹性球的碰撞，Σ' 相对 Σ 以匀速 v 沿公共 x 轴运动. 假设球充分小，以致可以认为碰撞在某一时刻发生在空间某一点. 设静止在 Σ 中的观察者 A 和静止在 Σ' 中的观察者 B 有两个完全相似的

1) 如果准备假设在两弹性球的碰撞过程中，动量和质量两者都守恒，那么可以用较简单的方法导出质量随速度的变化式，如附录 3 所给出. 本节 (5.2 节) 采用的方法使我们能把能量 (质量) 守恒定律的讨论推迟到 5.6 节. 5.2 节中采用的途径是遵循 M. 波恩著《爱因斯坦的相对论》(*Einstein's Theory of Relativity*) (第一版) 中给出的途径.

小球，分别叫做球 1 和球 2．设球 1 相对 Σ 具有的质量与球 2 在相同条件下相对 Σ' 具有的质量相同．设每个观察者都沿自己测得的垂直 x 轴的方向朝 x 轴抛出他的小球，并设两球抛出时刻使得飞行中碰撞是对称的，因而碰撞时两球中心的联线垂直于 x 轴，如图 5.1 所示．设观察者 A 相对 Σ 以速度 U 抛出球 1，观察者 B 相对 Σ' 以速度 U 抛出球 2，如图 5.1. 所

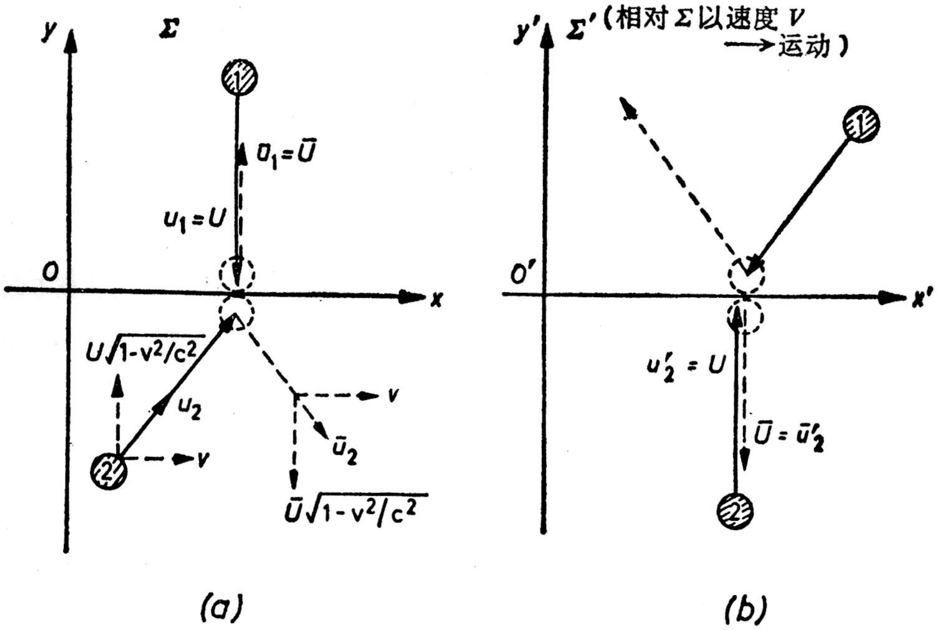

图 5.1　从两惯性系 Σ 和 Σ' 观察到的二小球碰撞分别如 (a) 和 (b) 所示．假设球 1 相对 Σ 具有的质量和速度与球 2 相对 Σ' 的相同，但是球 1 在碰撞前相对 Σ 沿负 y 方向运动，而球 2 相对 Σ' 沿正 y' 方向运动．

示．碰撞前球 1 在惯性系 Σ 中的速度 $\mathbf{u}_1$ 的诸分量是

$$(u_1)_x=0;\ (u_1)_y=-U;\ (u_1)_z=0. \tag{5.2}$$

碰撞前球 1 的速度总值等于

$$u_1=U. \tag{5.3}$$

类似地，碰撞前球 2 在 Σ' 中的速度分量为

$$(u_2')_x=0;\ (u_2')_y=U;\ (u_2')_z=0. \tag{5.4}$$

利用狭义相对论速度变换式[方程(4.5)，(4.6)和(4.7)]，可以

求出碰撞前球 2 在 Σ 中的速度. 我们有

$$(u_2)_x = v. \tag{5.5}$$

$$(u_2)_y = U\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{5.6}$$

$$(u_2)_z = 0, \tag{5.7}$$

以及

$$u_2^2 = v^2 + U^2(1 - v^2/c^2). \tag{5.8}$$

设碰撞前球 1 和球 2 在 Σ 中的质量分别为 m_1 和 m_2. 碰撞前两球在 Σ 中的总动量的分量为

$$\sum p_x = m_2 v. \tag{5.9}$$

$$\sum p_y = -m_1 U + m_2 U\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{5.10}$$

$$\sum p_z = 0. \tag{5.11}$$

如果碰撞过程中,两球的中心联线垂直于 x 轴,则球 1 将沿 x 轴的垂线被弹回. 设球 1 在 Σ 中被弹回的速度为 $\overline{U}$, 即令

$$\overline{u}_1 = \overline{U}. \tag{5.12}$$

由于对称关系, Σ' 中的观察者 B 看到球 2 相对 Σ' 的运动,必然与观察者 A 看到球 1 相对 Σ 的运动是相同的. 因此, 在 Σ' 中碰撞后有

$$(\overline{u}_2')_x = 0;\ (\overline{u}_2')_y = -\overline{U};\ (\overline{u}_2')_z = 0. \tag{5.13}$$

由相对论速度变换公式,对于球 2, 在 Σ 中碰撞后有

$$(\overline{u}_2)_x = v;\ (\overline{u}_2)y = -\overline{U}\sqrt{1 - v^2/c^2};\ (\overline{u}_2)_z = 0, \tag{5.14}$$

以及

$$\overline{u}_2^2 = v^2 + \overline{U}^2(1 - v^2/c^2). \tag{5.15}$$

设碰撞后相对于 Σ 球 1 和球 2 的质量分别是 $\overline{m}_1$ 和 $\overline{m}_2$. 碰撞后在 Σ 中的总动量为

$$\sum p_x = \overline{m}_2 v, \tag{5.16}$$

$$\sum p_y = \overline{m}_1\overline{U} - \overline{m}_2\overline{U}\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{5.17}$$

$$\sum p_z = 0. \tag{5.18}$$

如果 Σ 中动量守恒定律成立, 那么令碰撞前后总动量的 x 分

量相等，就有

$$\sum p_x = m_2 v = \bar{m}_2 v.$$

因此，

$$m_2 = \bar{m}_2. \tag{5.19}$$

令碰撞前后 Σ 中总动量的 y 分量相等，则有

$$\begin{aligned}\sum p_y &= -m_1 U + m_2 U\sqrt{1 - v^2/c^2} \\ &= \bar{m}_1 \bar{U} - \bar{m}_2 \bar{U}\sqrt{1 - v^2/c^2}.\end{aligned} \tag{5.20}$$

如果假设两球的质量是不变量，方程(5.20)不能满足，因为如果 $m_1 = m_2 = \bar{m}_1 = \bar{m}_2$，按照方程(5.20)我们有

$$(U + \bar{U})(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}) = 0.$$

此关系式不能满足，因为已假设 U 和 v 不为零．因此，如果动量守恒定律在 Σ 和 Σ' 中都成立，必须假设粒子质量不是不变量．我们将假设，粒子的质量只依赖于它的速度．如果这样，关系式 $m_2 = \bar{m}_2$ [方程(5.19)]意味着球 2 在 Σ 中碰撞前后的总速度值是相同的，即是

$$u_2 = \bar{u}_2.$$

由方程(5.8)和(5.15)，于是得到

$$v^2 + U^2(1 - v^2/c^2) = v^2 + \bar{U}^2(1 - v^2/c^2). \tag{5.21}$$

因此，

$$U = \bar{U}(=u_1 = u_2'). \tag{5.22}$$

于是，U 与 $\bar{U}$ 必然数值相等，但方向相反．因为球 1 在 Σ 中碰撞前的速度等于 U，而碰撞后等于 $\bar{U}$．由方程(5.22)得出，在 Σ 中球 1 碰撞前后具有相同的速度．如果粒子的质量只依赖于其速度，这意味着

$$m_1 = \bar{m}_1. \tag{5.23}$$

将方程(5.19)，(5.22)和(5.23)代入方程(5.20)，得到

$$-m_1 U + m_2 U\sqrt{1 - v^2/c^2} = m_1 U - m_2 U\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

或者

$$m_1 = m_2\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

即是

$$m_2 = \frac{m_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{5.24}$$

现在由方程(4.15)，对于在Σ中速度为$\mathbf{u}$，在Σ'中度速为$\mathbf{u}'$的粒子(它在Σ'中具有x'分量u'_x)，则有

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{(1 + vu'_x/c^2)}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u'^2/c^2)}}. \tag{4.15}$$

对于球2，在Σ中有 $u = u_2$，而对于同一个粒子，在 Σ' 中由方程(5.4)和(5.22)，有 $u' = u'_2 = U = u_1$ 及 $u'_x = 0$. 代入方程(4.15)，得到

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}},$$

因此，

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{\frac{(1 - u_1^2/c^2)}{(1 - u_2^2/c^2)}}. \tag{5.25}$$

代入方程(5.24)，得

$$m_2 = \frac{m_1\sqrt{1 - u_1^2/c^2}}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}},$$

即是

$$m_2\sqrt{1 - u_2^2/c^2} = m_1\sqrt{1 - u_1^2/c^2}. \tag{5.26}$$

如果碰撞过程中在Σ内动量守恒，则上述关系必须满足. 如果当 $u_1 = 0$ 时 $m_1 = m_0$ 及当 $u_2 = 0$ 时 $m_2 = m_0$，那么假若

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} \quad 及 \quad m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}},$$

方程(5.26)则始终满足，因为此时方程(5.26)简化为$m_0 = m_0$. 因为对于Σ和Σ'，碰撞具有相同的性质，但是由于粒子作用

的互换，在 Σ' 中动量也是守恒的. 因此，动量在 Σ 和 Σ' 中都可以守恒，假如运动粒子的质量重新定义，使得当粒子以速度 $\mathbf{u}$ 相对 Σ 运动时，其质量 m 等于

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \tag{5.27}$$

其中 m_0 是在粒子静止的惯性系中测出的粒子质量. 对于 Σ'，粒子的质量必须重新定义为 $m_0(1-u'^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$，其中 $\mathbf{u}'$ 是粒子相对于 Σ' 的速度. 量 m_0 叫作粒子的静止质量或者原质量. 方程(5.27)中的量 m 叫作相对论质量. 由方程(5.27)可见粒子的质量是一个标量. 上述理论只涉及粒子的惯性质量. 必须强调，$\mathbf{u}$ 是粒子相对 Σ 的速度，可把 Σ 取做实验室系统. 速度 $\mathbf{u}$ 与坐标系变化无任何关系. 力学定律中出现的量必须按照狭义相对论变换式变换，按照这一要求，就必须重新定义实验室系统中运动粒子的质量. 我们将假设，在一般情况下，运动粒子的质量由方程(5.27)定义. 就是假设，粒子的质量不依赖于粒子相对实验室的加速度. 质量的这一重新定义反过来又导致用一组新的定律取代牛顿运动定律. 这些新定律将用在实验室系统中，在5.4节中将看到，新理论的预言与实验室中做的实验符合得非常好.

在相对论力学中，以速度 $\mathbf{u}$ 运动的粒子动量由下式定义:

$$\mathbf{p}=m\mathbf{u}=\frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \tag{5.28}$$

其中 $\mathbf{p}$ 是动量，m_0 是粒子的静止质量，m 是相对论质量. 动量具有分量

$$p_x=\frac{m_0u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}};\quad p_y=\frac{m_0u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}};$$

$$p_z=\frac{m_0u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{5.29}$$