相对论时空结构（一）

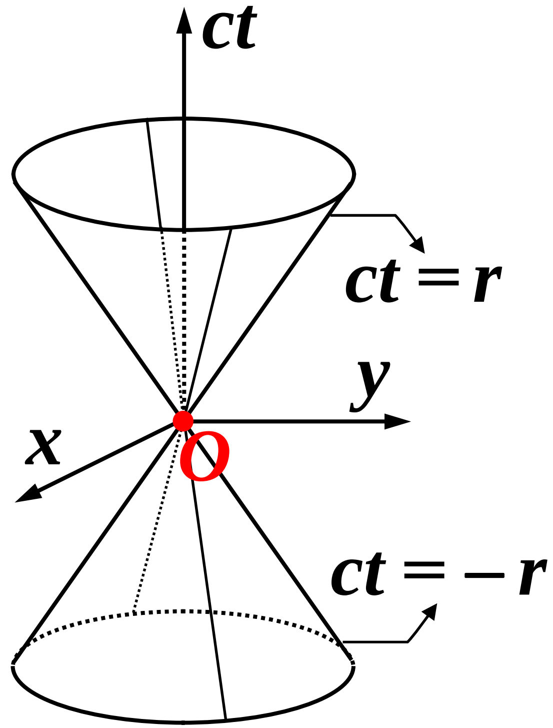
时空间隔 ΔS 对两事件之间关系有什么影响呢？

为方便，设空间为二维，两事件时空坐标分别为：

$P(x, y, t)$ 和 $O(0, 0, 0)$

时空间隔为：

$$(\Delta S)^2 = (ct)^2 - r^2,\ \ r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

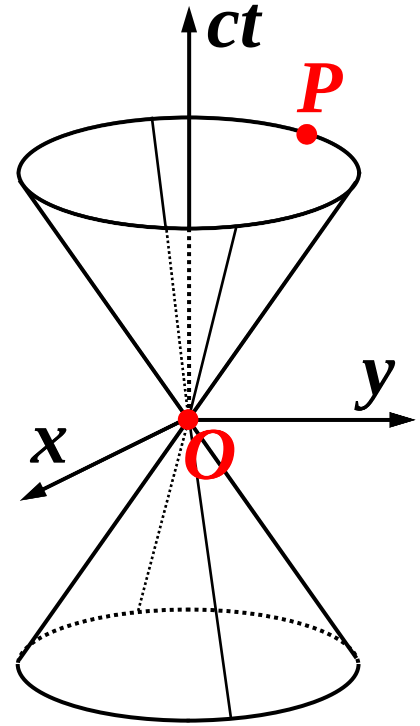


满足 $\Delta S = 0$ 的点形成以 O 为顶点的锥面 — 光锥面，绕时间轴旋转对称，方程为：

$$ct = \pm r$$

1. 类光间隔 $(\Delta S)^2 = 0$

P 位于光锥面上，若事件 *P* 和 *O* 有联系，只能通过光信号联系。



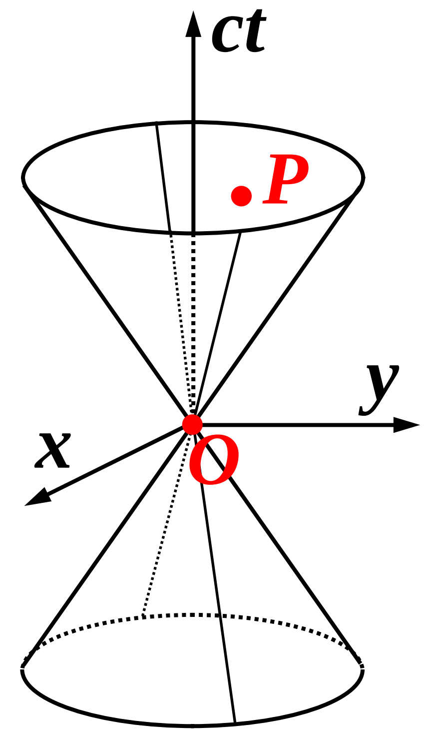
有联系时：

若 *P* 在上半光锥面上，则事件 *P* 是 *O* 的绝对未来，

若 *P* 在下半光锥面上，则事件 *P* 是 *O* 的绝对过去。

2. 类时间隔 $(\Delta S)^2 > 0$

P 位于光锥面内，若事件 P 和 O 有联系，则只能通过低于光速的作用联系：$(v_s t)^2 = r^2 < (ct)^2$，v_s 是作用传播的速度。



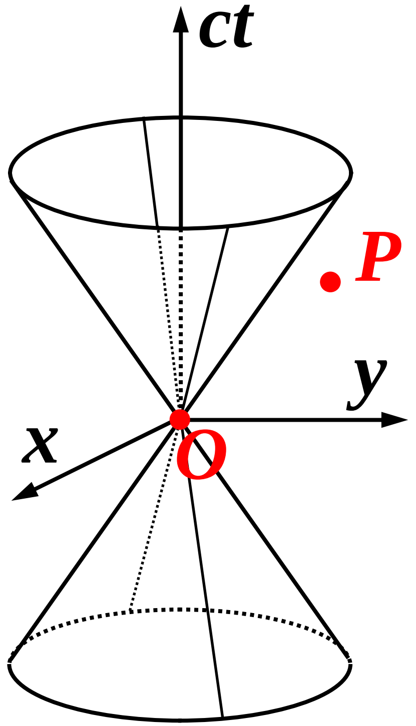
有联系时：

若 P 在上半光锥面内，则事件 P 是 O 的绝对未来，

若 P 在下半光锥面内，则事件 P 是 O 的绝对过去。

3. 类空间隔 $(\Delta S)^2 < 0$

P 位于光锥面外，若事件 ***P*** 和 ***O*** 有联系，则只能通过高于光速的作用联系：$(v_s\, t)^2 = r^2 > (ct)^2$，但这与目前实验矛盾，故不可能。



因此具有类空间隔特征的两事件是绝对异地的，独立的，不具有任何因果关系。

4. 相对论时空结构与因果律的关系

- 间隔 ΔS 是洛仑兹不变量，即不随惯性系的选择而变化（是相对性原理和光速不变原理的要求与体现），因此间隔划分是绝对的。
- 间隔的划分决定了事件 P 可处于 3 个区域：

  O 的上半光锥面内（包括锥面）

  O 的下半光锥面内（包括锥面）

  O 的光锥面外

  各区域相对于洛仑兹变换是不连通的，洛仑兹变换（或惯性系的改变）不会改变事件 P 所属的时空区域。

- 狭义相对性原理所导致的相对论时空观，必需符合因果律，即具有绝对因果关系的两事件，发生的时序在洛仑兹变换下（或惯性系的改变）不可颠倒，这由时空区域的不连通性完全保证。

事件 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{O}$ 具有绝对因果关系的必要条件：

$\boldsymbol{P}$ 位于 $\boldsymbol{O}$ 的上半光锥面内（包括锥面），
或位于 $\boldsymbol{O}$ 的下半光锥面内（包括锥面）。

5. 重新理解同时的相对性

异地同时发生的两事件具有类空间隔属性：

$$(\Delta S)^2 = -r^2 < 0$$

因此是完全独立的，不可能通过某种作用使二者建立联系而具有绝对因果关系（作用的传播速度不能超过光速）。

因此在洛仑兹变换下（或惯性系的改变）两事件的时序可以任意改变，时序失去了绝对意义，从而同时性只有相对意义。

相对论时空结构（二）

相对论时空是一种四维时空 — 闵可夫斯基空间

1. 四维时空坐标 $x_\mu\ (\mu = 1, 2, 3, 4)$

$x_1 = x,\quad x_2 = y,\quad x_3 = z,\quad x_4 = ict$

2. 洛仑兹变换矩阵（$\beta = u/c,\quad \gamma = 1\Big/\sqrt{1-u^2/c^2}$）

正变换矩阵 a

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

逆变换矩阵 a^{-1}

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

- 洛仑兹变换是四维时空的线性正交变换：

$$aa^{\mathrm{T}}=1 \quad (a^{\mathrm{T}}=a^{-1})$$

是四维时空的一种纯“转动”变换，因此不同惯性系在四维时空间看就是相对“转动”而已。洛仑兹变换不会改变四维矢量的模，从而不会改变间隔。

- 基本的物理学定律包括电磁学、量子力学的在洛仑兹变换下保持不变，这种不变性显示了物理学定律对匀速直线运动的对称性 — 相对论性对称性，这是自然界的一种基本的对称性。

3. 四维标量 — 洛仑兹标量或不变量

- 间隔 $(\Delta S)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$

  $(\mathrm{d}S)^2 = (c\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2$

- 原时 $\Delta\tau = \Delta S/c$， $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}S/c$

- 电荷Q、相位φ， ...

4. 四维矢量

- 四维位矢 $x_\mu = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (x,\ y,\ z,\ ict)$

变换方式： $x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu$

矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$$

任何具有四个分量的物理量 V_μ，如果在洛仑兹变换（惯性系变换）下与位置矢量 x_μ 有相同的变换关系，就称为四维矢量：

$$V'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} V_\nu$$

矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \\ V'_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}$$

- 四维速度 $U_\mu = (U_1, U_2, U_3, U_4) = \gamma_v (v_x, v_y, v_z, ic)$ $\qquad \gamma_v \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

四维速度是四维位矢对原时的微商：

$$U_\mu = \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

普通速度是位矢对所在参照系时间的微商：

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

普通时间 t 与原时 τ 的微分关系：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{c^2(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}r)^2}}c = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma_v$$

四维速度的模方（洛仑兹不变量）：

$$\sum_{\mu} U_{\mu} U_{\mu} = -c^2$$

四维速度变换方式： $U'_{\mu} = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} U_{\nu}$

矩阵表示：

$$\gamma_{v'} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \\ ic \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \gamma_{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ ic \end{pmatrix}$$

• 四维动量 $P_\mu = (P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4)$

$= (p_x,\ p_y,\ p_z,\ iE/c)$

四维动量的模方（洛仑兹不变量）：

$$\sum_\mu P_\mu P_\mu = -m_0 c^2 \quad （m_0 — 静质量）$$

四维动量变换方式： $P'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} P_\nu$

矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ iE'/c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ iE/c \end{pmatrix}$$

• 四维波矢 $k_\mu = (k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4) = (k_x,\ k_y,\ k_z,\ i\omega/c)$

波动相位 φ（洛仑兹不变量）：

$$\varphi = \sum_\mu k_\mu x_\mu = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$$

$$\sum_\mu k'_\mu x'_\mu = \sum_\mu k_\mu x_\mu \quad \Rightarrow \quad \varphi' = \varphi$$

四维波矢量变换方式： $k'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} k_\nu$

矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} k'_x \\ k'_y \\ k'_z \\ i\omega'/c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ i\omega/c \end{pmatrix}$$

利用四维波矢量的洛仑兹变换，可得到电磁波的**相对论多普勒效应**：

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - u\cos\theta/c)}$$

ω_0：在光源相对静止的参考系的辐射角频率

u：光源速度

θ：是观察者与光源运动方向之间的夹角

$\theta = 90^o$ 时对应横向多普勒效应：

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad \Longrightarrow \quad T > T_0$$

光的横向多普勒效应被 **Ives－Stilwell** 实验证实（**1938，1941**），是当时时钟延缓效应的重要证据之一。

电磁波的相对论多普勒效应也可如下简单推得：

四维动量变换 + 光子能量与频率的关系

5. 物理规律的协变性

狭义相对性原理要求所有物理规律（电磁的、量子的）在不同的惯性系中具有相同的表达形式，洛仑兹变换满足这一要求。表达物理规律的方程形式的不变性称为方程的协变性，与物理量的协变性密切相关。