极矢量和轴矢量简介

一. 操作

改变系统的时空位置叫操作。

3类基本空间操作：

（**1**）平移操作：系统平移一段距离
（**2**）转动操作：系统绕固定轴转个角度
（**3**）镜像操作：系统对某平面作镜像反射

对系统进行操作可等价用坐标系变换描述。

这里只讨论无形变的刚性操作或坐标系变换，其中 **(2)**、**(3)** 类操作中原点不动（转轴或反射面通过原点），属于刚性正交变换。

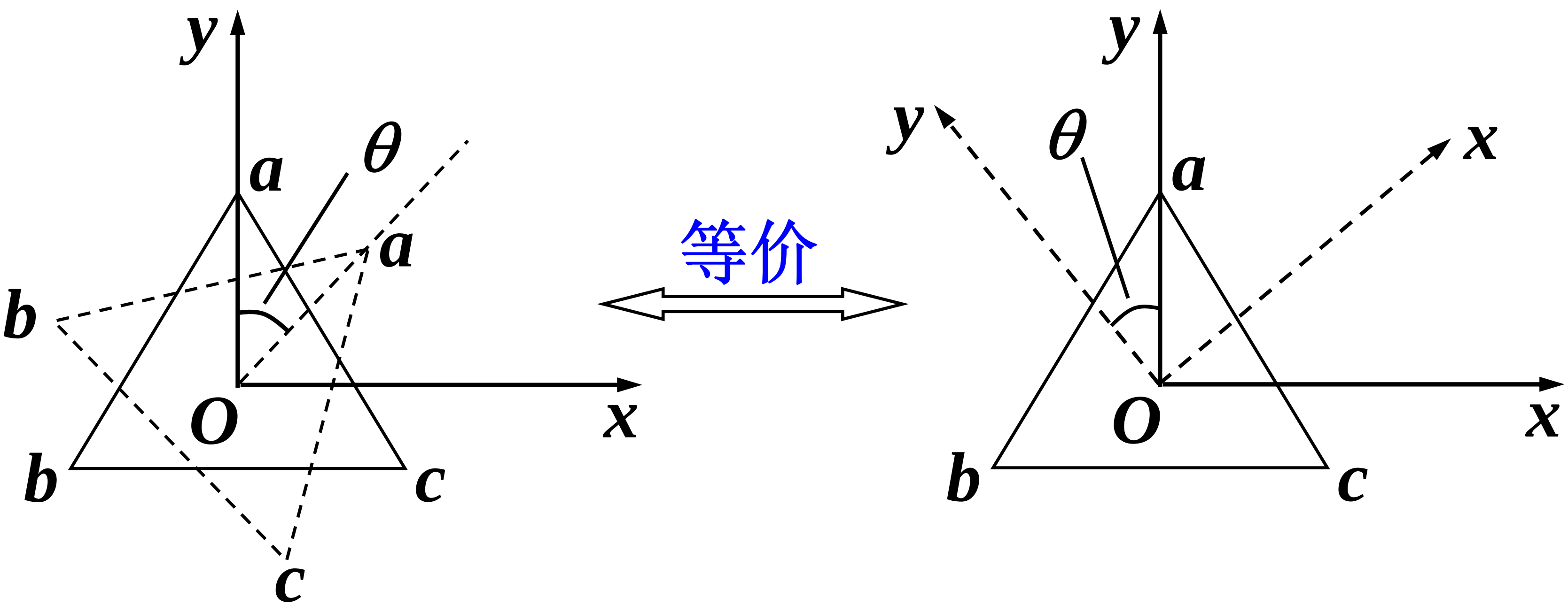
操作用坐标系变换描述的等价性

主动描述：

Δabc正转θ角

被动描述：

坐标系 xOy 逆转θ角



二. 对称操作和对称性

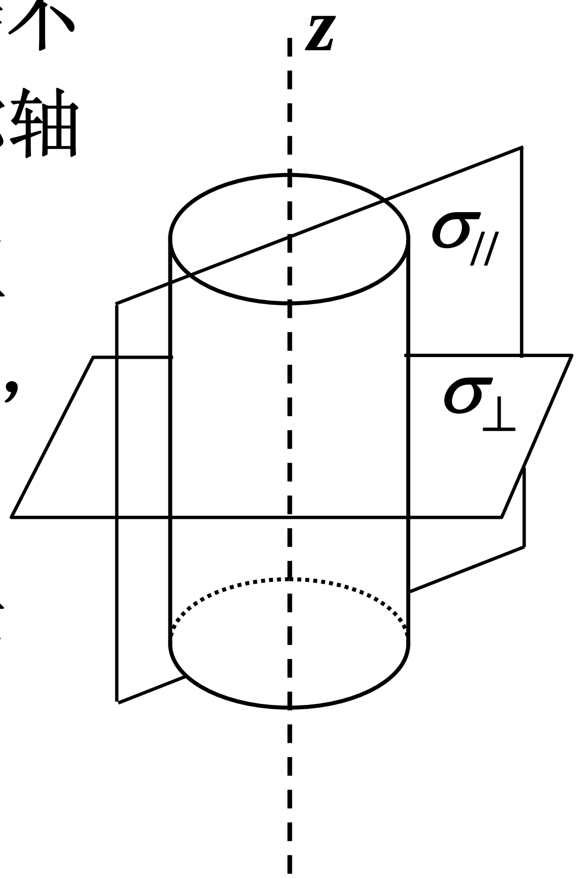
对系统实施（平移、旋转、镜像...）操作后，如果系统的时空位置或状态不变，则：

- 该操作称为（平移、旋转、镜像...）对称操作
- 系统具有相应于该操作的（平移、旋转、镜像...）对称性
- 相应的轴和反射面分别称为旋转对称轴和镜面

注意：讨论对称性时，要考虑实际的物质如电荷、电流等的分布，不能只考虑系统几何形状。

例：电荷均匀分布的无穷长圆柱体的对称性

- 绕 z 轴正反转动任意一个角度保持不变的旋转对称性， z 轴是旋转对称轴
- 对通过 z 轴的任意平面$\sigma_{//}$、对垂直于z 轴的任意平面$\sigma_{\perp}$的镜像对称性，$\sigma_{//}$ 和$\sigma_{\perp}$是镜面
- 沿 z 轴正反方向任意平移一段距离保持不变的平移对称性



如果换成沿 z 轴均匀分布的电流，结果如何？

三. 极矢量和轴矢量

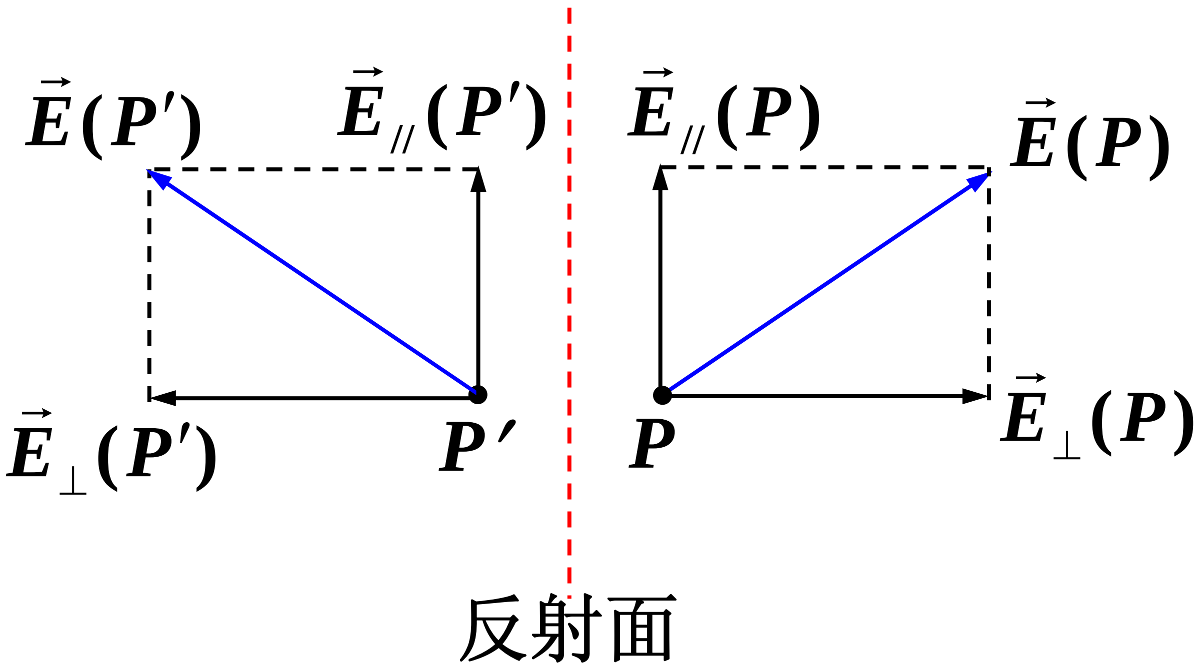
根据在镜象操作下的变换性质，把物理学中的矢量分成极矢量和轴矢量。

1. 极矢量

在镜象操作下，垂直反射面的分量反向，平行反射面的分量不变。（不证明）

如：位矢$\vec{r}$，速度$\vec{v}$，加速度$\vec{a}$，
电场强度$\vec{E}$，电位移矢量$\vec{D}$...

极矢量在镜像操作下的变换



场点 P 在镜象操作下变为 P'

$$\vec{E}_{\perp}(P) = -\vec{E}_{\perp}(P') \qquad \vec{E}_{//}(P) = \vec{E}_{//}(P')$$

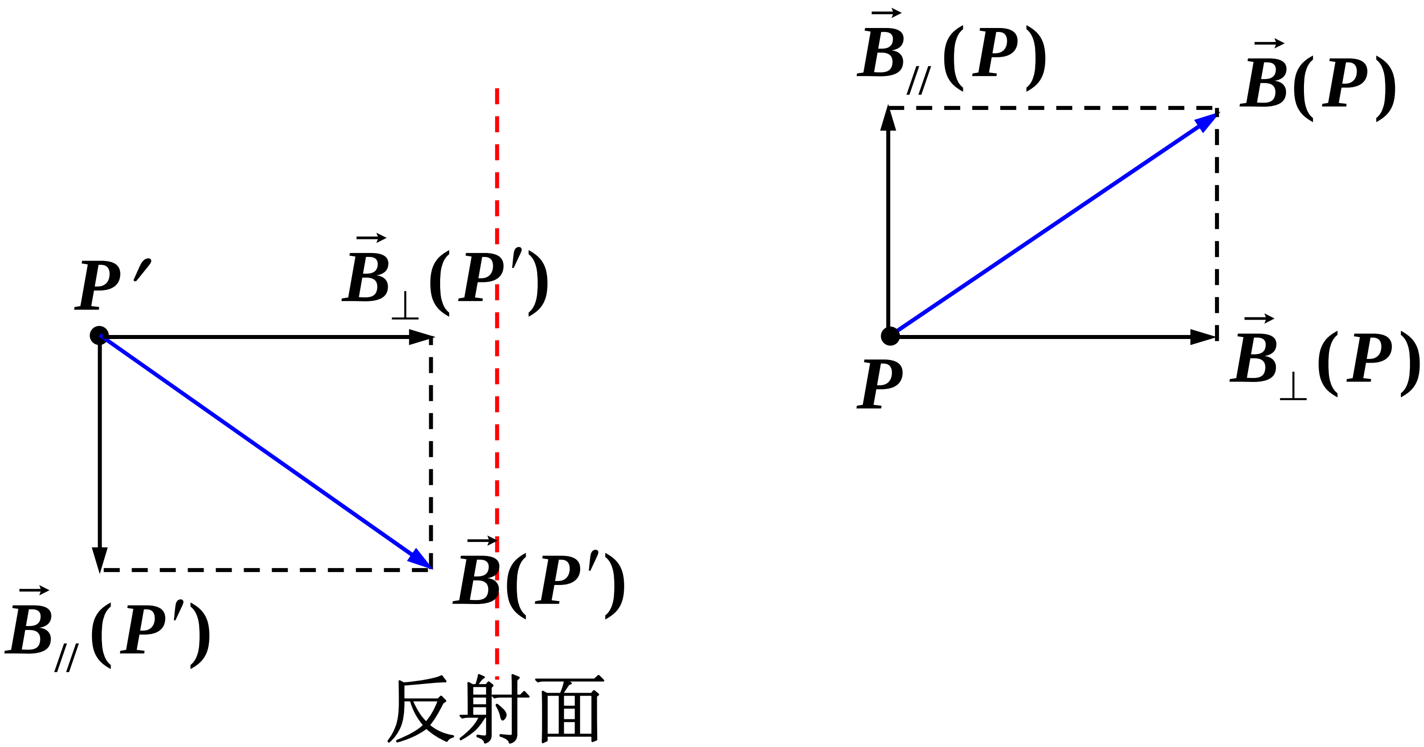
2. 轴矢量（赝矢量）

在镜象操作下，垂直反射面的分量不变，平行反射面的分量反向。（不证明）

如：角速度 $\vec{\omega}$，角动量$\vec{L}$，磁感应强度$\vec{B}$，磁场强度$\vec{H}$…

可证明：极矢量×极矢量的结果是轴矢量

轴矢量在镜像操作下的变换

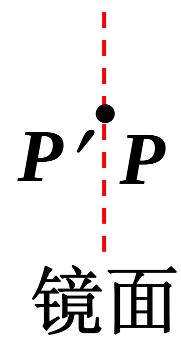


场点 P 在镜象操作下变为 P'

$\vec{B}_{\perp}(P)=\vec{B}_{\perp}(P')$ $\qquad$ $\vec{B}_{//}(P)=-\vec{B}_{//}(P')$

重要问题： 对于镜面上的点，其极矢量和轴矢量应满足什么条件？

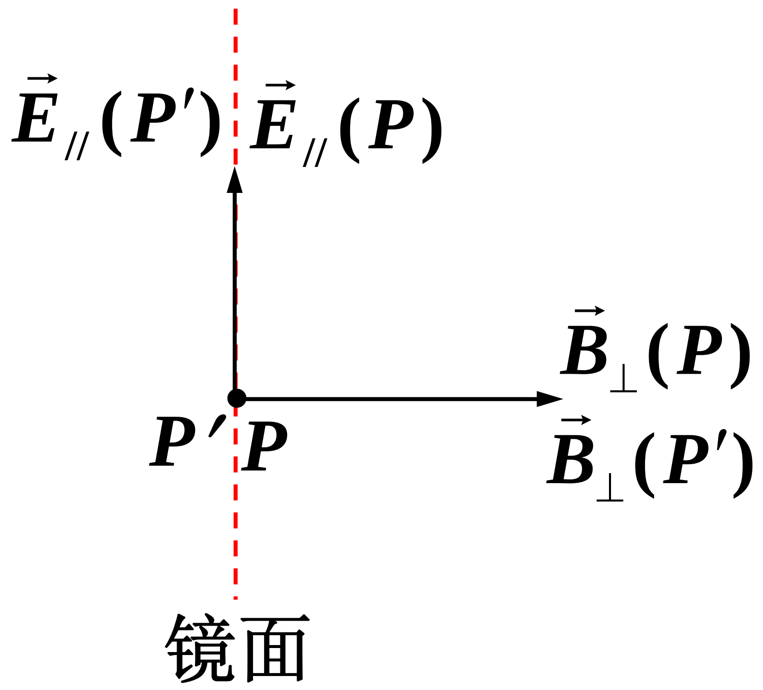
对于镜面上的点 $\boldsymbol{P}$，在镜像操作下不动，其镜像点 $\boldsymbol{P'}$ 与自身重合：



镜面相应镜像对称操作，故其处极矢量或轴矢量在操作前后不变！

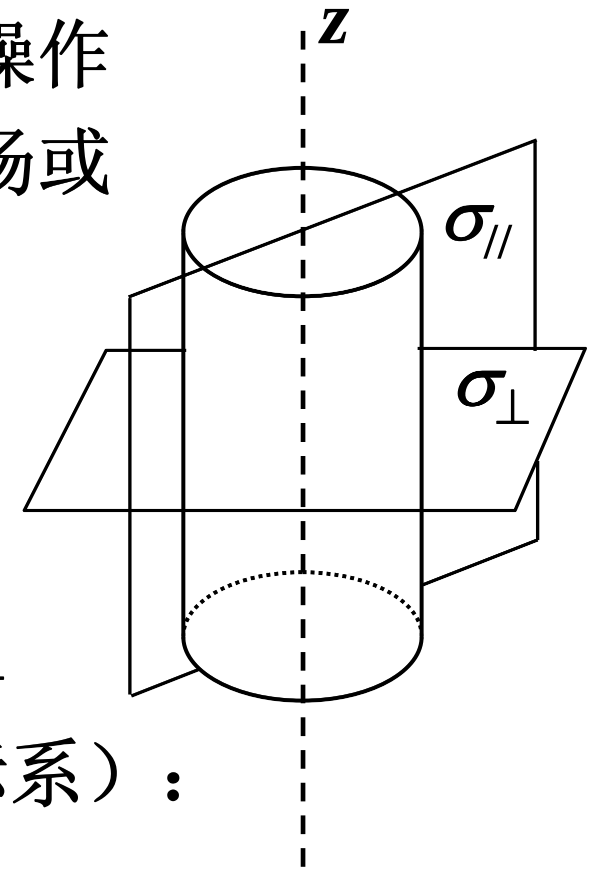
要想如此，该处极矢量或轴矢量必须满足：

- 对极矢量，只能有平行分量（面内分量）
- 对轴矢量，只能有垂直分量



四. 对称性在求解电磁学问题中的应用

利用 电荷或电流在空间分布的对称性，以及极矢量和轴矢量在镜象操作下的变换性质，可以判定电场或磁场的函数形式



例：判定电荷均匀分布的无穷长圆柱体产生的电场特点

解：空间任一点同属于镜面$\sigma_{//}$、$\sigma_{\perp}$

则电场方向只能沿径向（柱坐标系）：

$$\therefore \quad \vec{E} = E(r,\theta,z)\vec{e}_r$$

z 轴是转动任意角度的旋转对称轴，则：

$$\therefore \quad \vec{E} = E(r, z)\vec{e}_r$$

沿 z 轴正反方向的任意平移不变性：

$$\therefore \quad \vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$