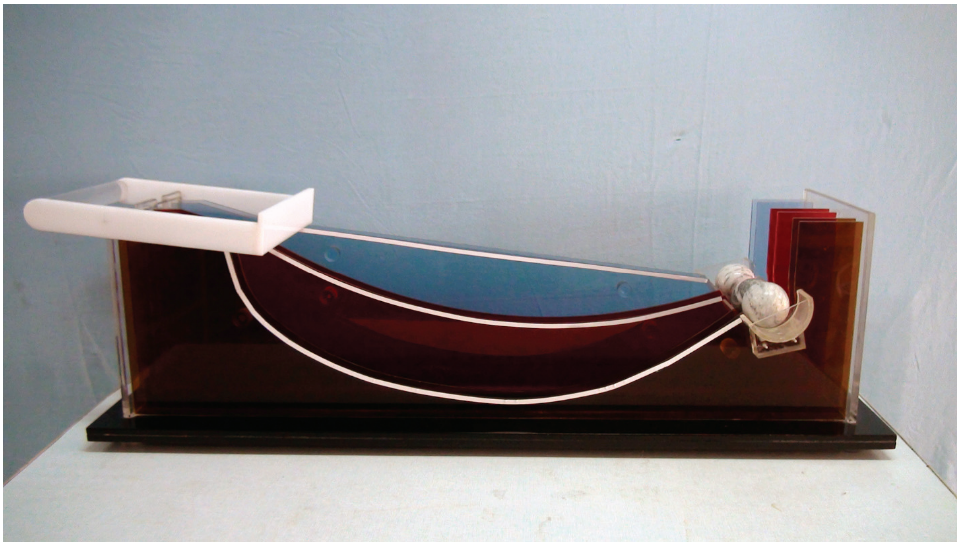
最速下降演示实验

清华大学物理系 路峻岭

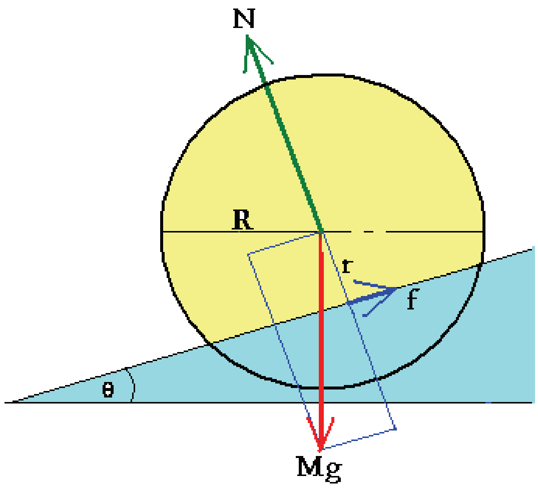


如图，三个相同的球沿三个不同的轨道——斜线、圆弧、旋轮线轨道滚动，结果是沿旋轮线轨道滚动最快，用时最短。

1. 球沿轨道作纯滚动与纯滑动的比较

以斜线轨道为例进行讨论。如下图，设斜线轨道的倾角为θ，匀质实心球质量为M，半径R，滚动半径r，绕过质心轴的转动惯量$\frac{2}{5}MR^2$。球体受到 3 个力作用：重力、弹力和静摩擦力。若静摩擦力足够大，球体可以保持纯滚动。以β, a_c, v_c, ω为变量，则有

$$\begin{cases} Mg\sin\theta - f = Ma_c \\ fr = \frac{2}{5}MR^2\beta \\ a_c = r\beta \\ v_c(0) = R\omega(0) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$



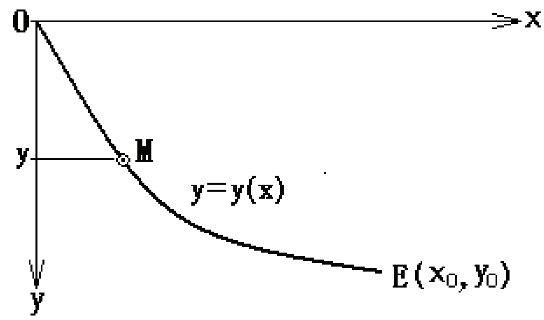
解得：

$$\beta = \frac{g\sin\theta}{\frac{2R^2}{5r} + r}, v_c = a_c t, \omega = \beta t,$$
$$a_c = \frac{rg\sin\theta}{\frac{2R^2}{5r} + r} = \frac{r^2 g\sin\theta}{\frac{2}{5}R^2 + r^2} \qquad (2)$$

如果球在光滑的轨道上只滑动不滚动，则$a_c = g\sin\theta$，即球的纯滚动与纯滑动的质心加速度仅相差一个与仪器结构有关的因子。对上面三个轨道，结构因子相同。这样球在三个轨道下落快慢的问题，可以等效地用球光滑滑动（质点）替代实际的球纯滚动（刚体）进行讨论，所得结论不变。

2.最速下降问题

最速下降是个古老的问题，又称**捷线问题**。有关泛函或变分法的书多采用此例引入相关概念。其问题是：在空间高低两点之间寻找一条连接两点的光滑轨道，使质点沿轨道从高点下滑到低点用时最短。如右图，过高低两点作一铅直平面，在此平面内建立直角坐标系。以高点为原点，水平方向为 x 轴，竖直向下为 y 轴，设低点 E 的坐标为 $(x_0,y_0)(y_0>0)$。现在的问题就是寻找过 0 点和 E 点的众多平面曲线 $y=y(x)$ 中使得质点下滑用时最少者。设轨道 $y=y(x)$ 连续光滑，易得到质点由静止开始沿轨道由 0 点到 E 点所用时间为：



$$t\left[y(x)\right]=\int_0^{x_0}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx \tag{3}$$

$t\left[y(x)\right]$ 表示 t 是函数 $y(x)$ 的函数，$\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=ds$ 为元路程，$\sqrt{2gy}$ 为质点下落 $y(x)$ 后的速度大小。上面的问题转化为寻求函数 $y(x)$ 使 t 取极小值。

3.欧拉方程

我们可以将（3）式推广到更一般的形式：

$$J\left[y(x)\right]=\int_A^B F\left(x,y,y'\right)dx \tag{4}$$

J 是函数 $y(x)$ 的函数，称为泛函，即泛函是函数的函数，函数是泛函的宗量。$F\left(x,y,y'\right)$ 是 x,y,y' 的函数，设它对 x,y,y' 二次连续可导，设 $y(x)$ 对 x 的二阶导数 y'' 连续，A, B 分别为变量 x 的初值和终值。下面介绍泛函 J 取极值的条件。

首先说说函数变分的概念。设有两个函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，对给定的 x，取两个函数值之差：$\delta y(x)=y_2(x)-y_1(x)$，称为函数的变分，显然它也是 x 的函数。函数的变分 $\delta y(x)$ 与微分 $dy(x)$ 的差别：$\delta y(x)$ 表示两个不同函数在自变量 x 取相同值时的变化，$dy(x)$ 表示同一函数在自变量 x 发生改变时的变化。在两函数的交点处，函数变分为零。对（4）式表达的泛函，不同函数在端点 A, B 取值应相同，即：$\delta y(A)=\delta y(B)=0$。函数的变分与求导也可以交换次序，对函数先变分后求导，与先求导后变分的结果相同：

$$(\delta y)'=\frac{d}{dx}[y_2(x)-y_1(x)]=y_2'(x)-y_1'(x)=\delta y'$$

有了函数变分的概念，就可以定义泛函的变分。当函数 $y(x)$ 的形式改变时，泛函 J 的值就会改变，定义其改变量 δJ 为泛函的变分：

$$\delta J\left[y\right]=J\left[y+\delta y\right]-J\left[y\right]=\int_A^B\left[F\left(x,y+\delta y,y'+\delta y'\right)-F\left(x,y,y'\right)\right]dx$$

上式被积函数可按照二元微分进行表达：

$$F\left(x,y+\delta y,y'+\delta y'\right)-F\left(x,y,y'\right)=\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

这样泛函 J 的变分表达为：

$$\delta J[y]=J[y+\delta y]-J[y]=\int_A^B\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx \qquad (5)$$

可证明泛函J取极值的必要条件是其变分为零：$\delta J=0$，这称为变分原理。根据这一原理可得泛函取极值必须满足下面条件：

$$\int_A^B\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx=0 \qquad (6)$$

对其中第二项，利用变分与求导交换次序，以及在端点A, B处，要求不同函数取值相同，即$\delta y(A)=\delta y(B)=0$，可得：

$$\int_A^B\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' dx=\int_A^B\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d\delta y}{dx}dx=\int_A^B\frac{\partial F}{\partial y'}d\delta y=\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_A^B-\int_A^B\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx=-\int_A^B\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx$$

这样（6）式变为：

$$\int_A^B\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx=0 \qquad (7)$$

要想（7）式对任意的δy都能够成立，只有

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad (8)$$

这就是**欧拉方程**，即泛函取极值时$F(x,y,y')$必须满足的条件。

总结一下，根据变分原理，泛函取极值的必要条件可等价地由欧拉方程来表述。

4. 最速下降轨道—旋轮线

下面用欧拉方程求解最速下降轨道函数。由（3）式，$F(x,y,y')=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$，代入欧拉方程（8）式可得：

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0\Rightarrow-\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2\sqrt{2g}y^{\frac{3}{2}}}-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}}\right)=0$$

注意$y'\frac{d}{dy}=\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}=\frac{d}{dx}$，以$y'\frac{d}{dy}$代替上式中的$\frac{d}{dx}$，上式化为

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^{\frac{3}{2}}}+2y'\frac{d}{dy}\left(\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\right)=0$$

将上式第二项作微分运算（注意y'及其表达式皆是y的函数），整理可得

$$\frac{dy}{2y}+\frac{y'dy'}{1+y'^2}=0\rightarrow\frac{dy}{2y}=-\frac{y'dy'}{1+y'^2}$$

把以上方程等号两边分别积分，整理可得

$$y' = \sqrt{\frac{2c_1 - y}{y}} \text{即} \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2c_1 - y}{y}}$$

$$\text{即} \frac{\sqrt{y}dy}{\sqrt{2c_1 - y}} = dx$$

把以上方程等号两边再分别积分，得

$$x = -\sqrt{2c_1 y - y^2} + c_1 \arccos\frac{c_1 - y}{c_1} + c_2 \qquad (9)$$

其中，c_1、c_2为积分常数，由轨道函数的端点条件来确定。(9）式即是最速下降轨道函数的一般表达式。此式看起来不太直观，为此做以下变换化为参数方程以便看起来直观一些。

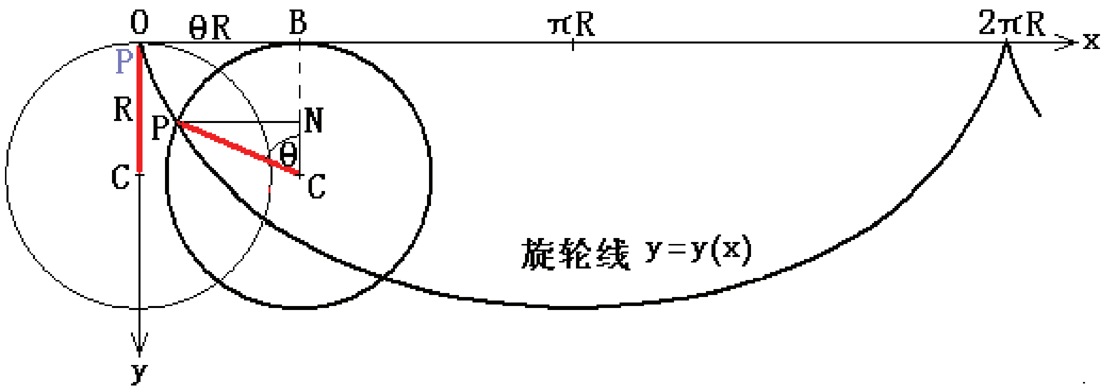
令$\theta = \arccos\frac{c_1 - y}{c_1}$，则（9）式化为以下参数方程

$$\begin{cases} x = c_1(\theta - \sin\theta) + c_2 \\ y = c_1(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad (10)$$

这是典型的旋轮线（又称摆线）方程，其中θ为参数。

5.旋轮线简介

旋轮线是一种典型的平面曲线，在一般数学手册中均可查到。



如上图所示，在 xy 直角坐标系的 xy 平面内有一个圆 C(旋轮)，它沿 x 轴作纯滚动，圆周上一点 P，初始位置与原点重合，在圆 C 作纯滚动过程中，P 点的轨迹就是旋轮线。设圆 C 的半径为 R，可据上图比较容易地得到 p 点轨迹的参数方程。以 PC 为画在圆上的记号。设圆 C 与 x 轴的切点由初始位置 O，经过圆 C 作纯滚动而到达 B 点，记号 PC 转过角度θ，且$OB = \theta R$，此时 p 点的横坐标为线段OB减去线段 PN，p 点的纵坐标为圆半径减去线段 NC。由此可知，起始点在原点的旋轮线的参数方程为：

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad (11)$$