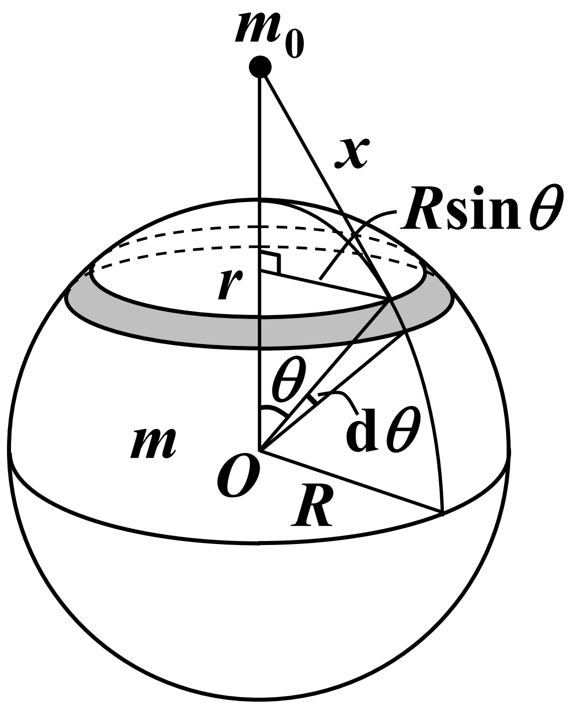
均匀球体的引力

一. 均匀球壳的引力

设：球壳质量 m，半径 R，

质点质量 m_0，距球心 r



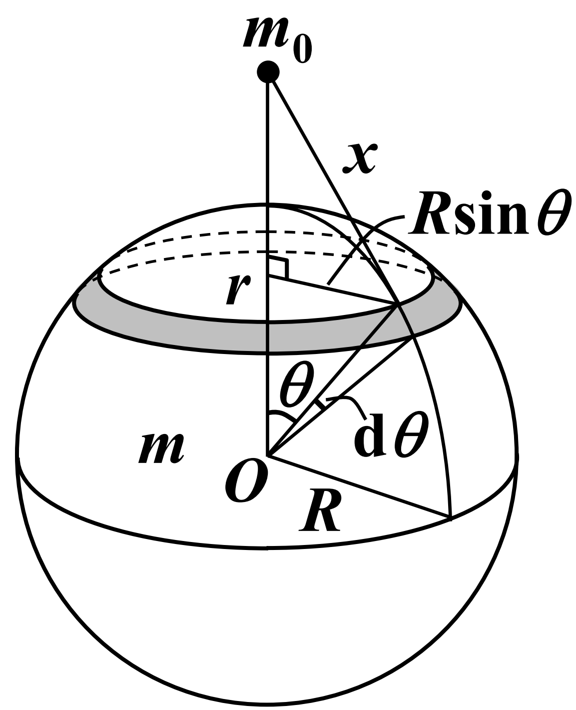
球壳质量面密度：$\sigma = \dfrac{m}{4\pi R^2}$

先求球壳与质点的引力势能

由对称性，选圆环面：$\mathrm{d}S_{环面} = 2\pi R\sin\theta \cdot R\mathrm{d}\theta$

圆环面与 m_0 的势能：$\mathrm{d}E_p = -G\dfrac{(\sigma \cdot \mathrm{d}S_{环面})m_0}{x}$

$$\mathrm{d}E_p = -Gmm_0 \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{2x}$$



$$x^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$$

$$2x\mathrm{d}x = 2rR\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E_p = -Gmm_0 \frac{\mathrm{d}x}{2rR}$$

质点 m_0 在球壳外： $E_p = \int_{r-R}^{r+R} \mathrm{d}E_p = -\frac{Gmm_0}{r}$

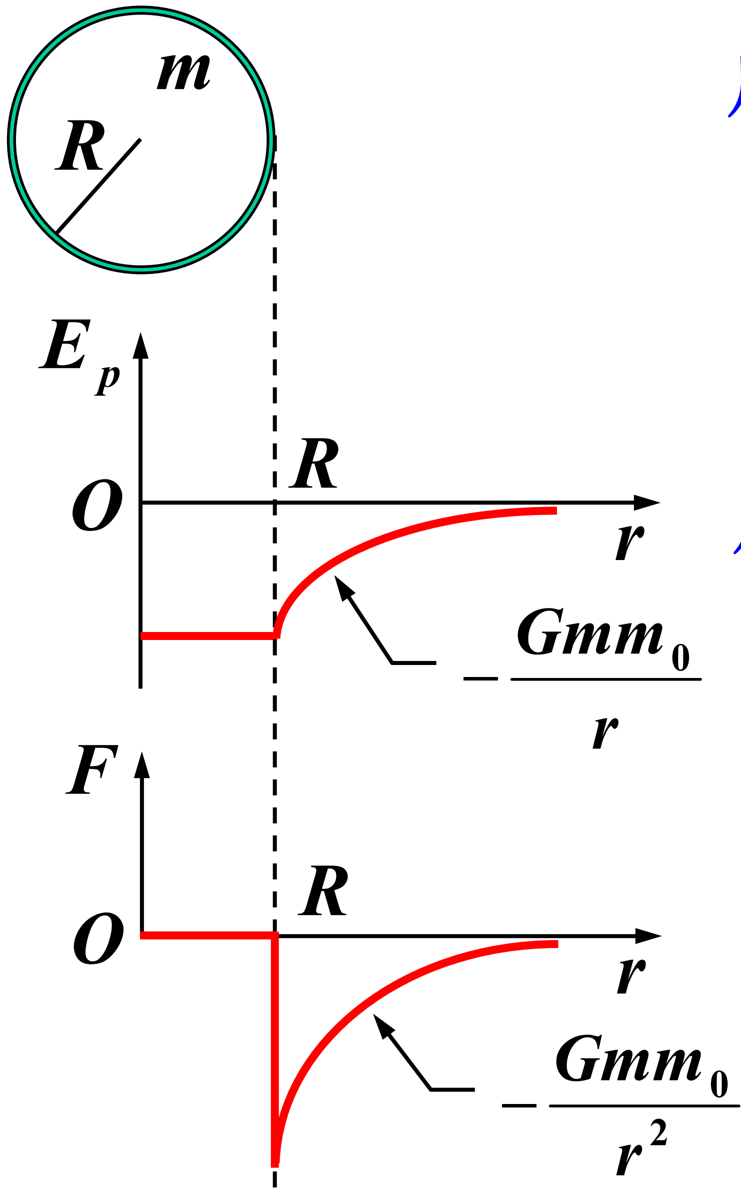
质点 m_0 在球壳内： $E_p = \int_{R-r}^{R+r} \mathrm{d}E_p = -\frac{Gmm_0}{R}$

球壳与质点的引力势能

$$E_p(r)=\begin{cases}-\dfrac{Gmm_0}{R} & (r<R)\\[2ex] -\dfrac{Gmm_0}{r} & (r>R)\end{cases} \qquad E_p(\infty)=0$$

球壳与质点的引力

$$F(r)=-\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}=\begin{cases}0 & (r<R)\\[2ex] -\dfrac{Gmm_0}{r^2} & (r>R)\end{cases}$$



质点 m_0 在球壳外时：

等同于同质量的质点在球心对 m_0 产生的引力。

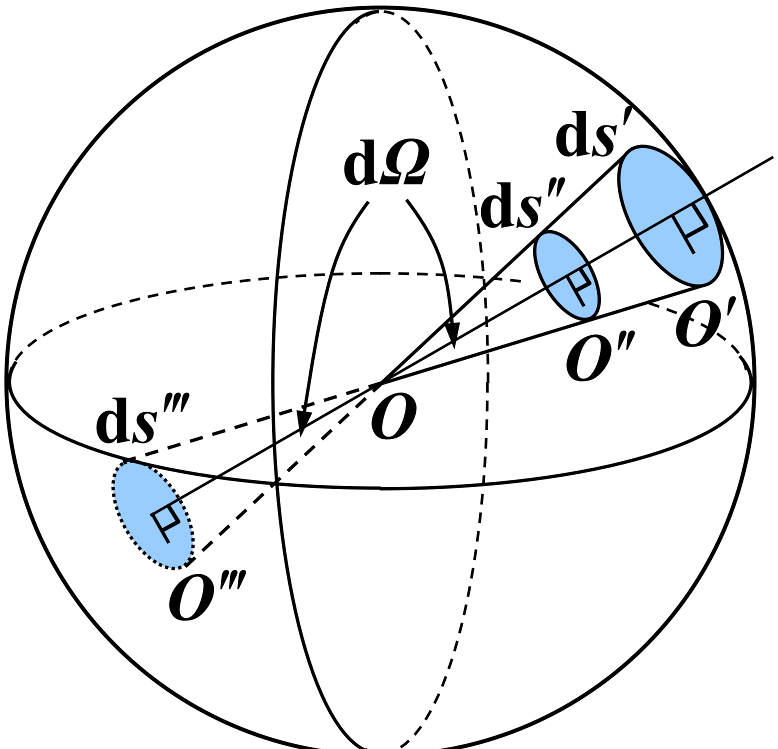
质点 m_0 在球壳内时：

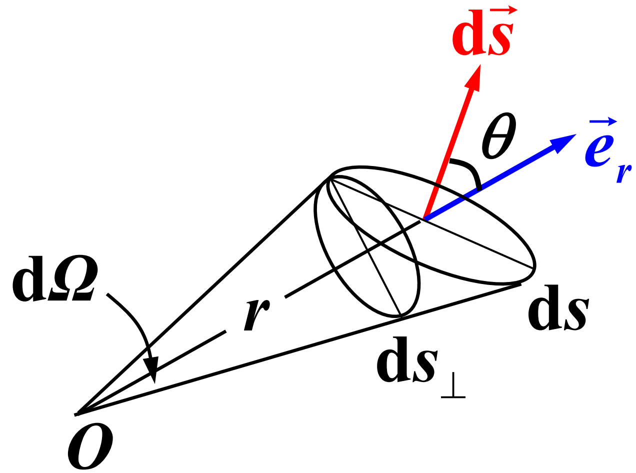
球壳对 m_0 的引力为零。

根源：引力遵循平方反比律

平方反比律的讨论

立体角 $$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}s'}{|OO'|^2} = \frac{\mathrm{d}s''}{|OO''|^2} = \frac{\mathrm{d}s'''}{|OO'''|^2}$$





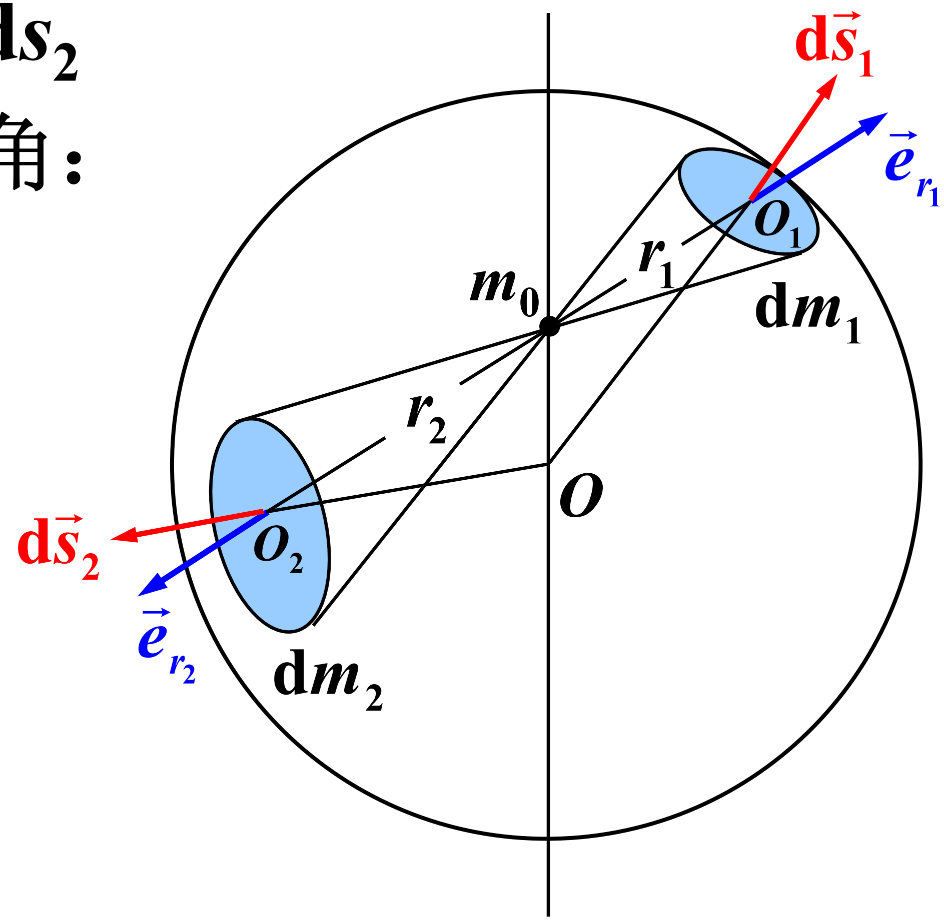
$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}s_\perp}{r^2} = \frac{\mathrm{d}s\cos\theta}{r^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{e}_r}{r^2}$$

球壳上的面元 ds_1、ds_2 对 m_0 张开相对立体角：

$$\frac{d\vec{s}_1\cdot\vec{e}_{r_1}}{r_1^2}=\frac{d\vec{s}_2\cdot\vec{e}_{r_2}}{r_2^2}$$

$$\frac{ds_1}{r_1^2}=\frac{ds_2}{r_2^2}$$

$$G\frac{dm_1 m_0}{r_1^2}=G\frac{dm_2 m_0}{r_2^2}$$



平方反比 $\Rightarrow$ 相对面元引力抵消 $\Rightarrow$ m_0 不受力

补充说明

对引力势能，前面使用了线性叠加的性质，根据是引力有线性叠加性，是两体作用力：

两质点间的引力作用只与两质点有关，与其它质点是否存在无关 — 两体作用。

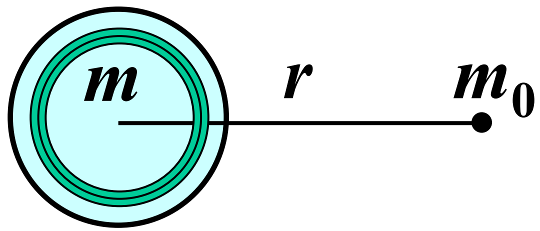
质点系的引力势能具有两体形式：

$$E_p = \sum_{i<j} -\frac{Gm_i m_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} = \sum_{i<j} U_{ij}$$

微观世界原子之间的作用，不能完全用两体势能表示 — 存在多体形式。

二. 均匀球体的引力

均匀球体： $\rho =$ 常量， 看成同心球壳叠加



等同于相同质量的质点在球心所产生的引力：

$$F = -G\frac{mm_0}{r^2}$$

也适用于ρ随半径分布的球体：$\rho = \rho(r)$ 。