1．全微分

全微分是针对多元函数的微分而言的。例如，设 $f=f(x,y,z)$，那么 f 的全微分是：

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

其中 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、$\frac{\partial f}{\partial z}$ 称作偏导数。偏导数的计算很简单，比如

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df(x,y_0,z_0)}{dx}\quad(y=y_0,z=z_0)$，即求 x 的偏导数和求一元函数的导数类似，只要把变量 y,z 当作参数 y_0,z_0 看待就可以了。

例如：设 $f=3x^3+\sin(xy)y^2+xz$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{d[3x^3+\sin(xy_0)y_0^2+xz_0]}{dx}\\&=9x^2+\cos(y_0x)y_0^3+z_0\\&=9x^2+\cos(yx)y^3+z\end{aligned}$$

熟练之后，就用不着把 y,z 令为 y_0,z_0 这一步了。

2．保守力与全微分的关系

根据 $\vec{F}_{保}=-\nabla E_p\quad(\nabla\equiv\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k})$ （1）

得到：

$$\begin{aligned}&\vec{F}_{保}\cdot d\vec{r}=-\nabla E_p\cdot d\vec{r}\\&=-(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k})\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})\\&=-(\frac{\partial E_p}{\partial x}dx+\frac{\partial E_p}{\partial y}dy+\frac{\partial E_p}{\partial z}dz)\\&=-dE_p\end{aligned}\qquad（2）$$

即保守力做功等于势能下降（势能增量负值），或保守力的微功是势能函数全微分的负值：$\vec{F}_{保}\cdot d\vec{r}=-dE_p$ （3）

对（3）作沿任意路径 L 的线积分有：

$$\int_L\vec{F}_{保}\cdot d\vec{r}=\int_A^B-dE_p=E_p(A)-E_p(B)$$ （A, B 是任意路径的始末位置）

这正是要得到的结论：保守力做功，与路径无关，只决定于始末位置的势能差。

对（3）作沿任意闭合路径 L 的线积分有：

$$\oint_L \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r} = \oint_L - dE_p = 0$$

这就是保守力的标准定义，即一个力对任意闭合路径的积分为零，则它是保守力。要想做到这一点，力的微功 $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ 必须能表达成某个函数（势函数）的全微分使得环路积分为零。

3．有心力必是保守力

有心力总是沿施力物体中心与受力物体中心的连线作用，如引力，电荷静电相互作用力。有心力表达为：

$$\vec{F}_{有心} = F(r)\vec{e}_r$$

$\vec{e}_r$ 是施力物体中心指向受力物体中心方向的单位矢量。计算一下有心力的微功：

$$\vec{F}_{有心} \cdot d\vec{r} = F(r)\vec{e}_r \cdot d\vec{r} = F(r)dr = d(f(r))$$

$f(r)$ 是原函数，这样有心力就是保守力。