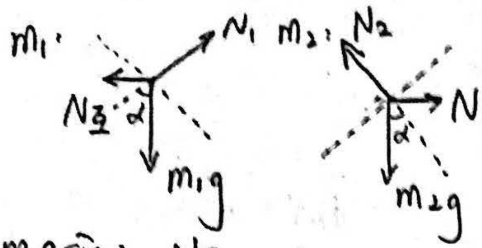
2-8. (1) 受力分析



$$m_1g\sin\alpha - N_{互}\cos\alpha = m_1a_1$$

$$N_{互}\cdot\cos\alpha - m_2g\sin\alpha = m_2a_2$$

由几何关系：$a_1 = a_2$

$$\therefore (m_1g - m_2g)\cdot\sin\alpha = (m_1+m_2)a_1$$

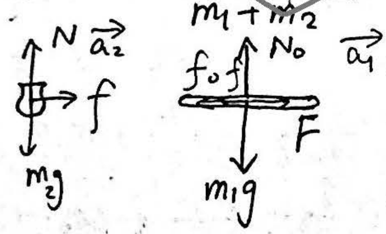
$$\therefore a_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g\cdot\sin\alpha$$

$$a_2 = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g\sin\alpha$$

以竖直向下为正方向

(2) $N_{互} = \dfrac{2m_1m_2g\tan\alpha}{m_1+m_2}$

2-11



$$m_2a_2 = f = \mu N = \mu m_2g \quad \therefore a_2 = \mu g$$

$$m_1a_1 = F - f_0 - f = F - \mu N_0 - \mu N$$

$$= F - \mu(m_1+2m_2)g$$

$$\therefore a_1 = \frac{F-\mu(m_1+2m_2)g}{m_1}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a_1t^2 - \frac{1}{2}a_2t^2 = l \\ 2\times\frac{1}{2}a_2t^2 \le L - l \end{cases}$$

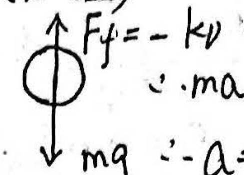
$$\frac{a_1-a_2}{a_2} \ge \frac{2l}{L-l} \quad \therefore \frac{a_1}{a_2} \ge \frac{L+l}{L-l}$$

$$\therefore a_1 \ge \frac{L+l}{L-l}a_2$$

$$\therefore F - \mu(m_1+2m_2)g \ge \frac{L+l}{L-l}\cdot m_1\mu g$$

$$\therefore F \ge \mu g\left(\frac{2l}{L-l}\cdot m_1 + 2m_2\right)$$

2-16. (1)



$$\therefore ma = mg - kv$$

$$\therefore a = g - \frac{k}{m}\cdot v$$

$a_0 = g$，$v_0 = 0$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}\cdot v$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

$$\therefore v = e^{-\int\frac{k}{m}dt}\left(\int g\cdot e^{\int\frac{k}{m}dt}dt + C\right)$$

$$= C\cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

代入 $v_0 = 0$ 得 $C = -\dfrac{mg}{k}$

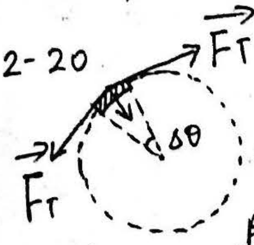
$$\therefore v(t) = \frac{mg}{k}\cdot\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

(2) 从 $v(t)$ 式中易见 v 趋于一极限值 $v_f = \dfrac{mg}{k}$

(3) $v_f \propto \dfrac{mg}{\pi r^2} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho\cdot g}{\pi r^2} = \dfrac{4\rho g}{3}\cdot r$

$\therefore v_f \propto r$ 故大雨滴的终极速度大

2-20

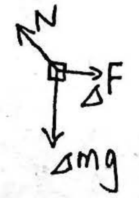


$$\Delta F = |\vec{F_T} + \vec{F_T}|$$

$$= 2F_T\cdot\sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx F_T\cdot\Delta\theta$$

受力分析知 $\Delta F = \Delta mg\tan\dfrac{\alpha}{2}$

且 $\dfrac{\Delta m}{m} = \dfrac{\Delta\theta\cdot R}{l} = \dfrac{\Delta\theta}{2\pi}$



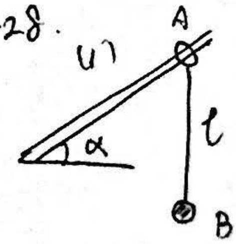
$$\therefore \frac{\Delta m}{\Delta\theta} = \frac{m}{2\pi}$$

$$\therefore \Delta mg\tan\frac{\alpha}{2} = F_T\cdot\Delta\theta$$

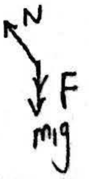
$$\therefore F_T = \frac{mg\tan\frac{\alpha}{2}}{2\pi}$$

2-28.

(1)



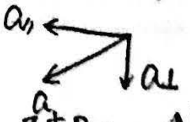
对A:



∵ $m_1 a=(F+m_1 g)\cdot\sin\alpha$

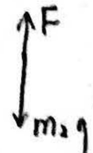
t=0瞬间，A.B均沿绳受张力

故 B的加速度向下



$a_\perp = a\cdot\sin\alpha$

对B.



∴ $m_2 a_\perp = m_2 g - F$

∴ $m_2 a = \frac{m_2 g - F}{\sin\alpha}$

∴ $\frac{m_1}{m_2} = \frac{(F+m_1 g)\cdot\sin^2\alpha}{m_2 g - F}$

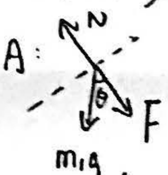
∴ $(m_1+m_2\sin^2\alpha)F = m_1 m_2\cos^2\alpha g$

∴ $F=\frac{m_1m_2\cos^2\alpha g}{m_1+m_2\sin^2\alpha}$

(2) 即 A.B相对静止 ⇒ $a_A=a_B$

以A为参考系时对B

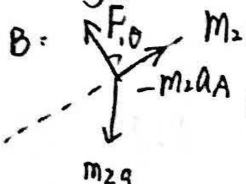
A:



$m_1 a_A = m_1 g\sin\alpha + F\cdot\sin(\alpha-\theta)$

∴ $a_A = g\sin\alpha - \frac{F\sin(\alpha-\theta)}{m_1}$

B:



$m_2 a_\perp = m_2 g\cos\alpha - F\cdot\cos(\alpha-\theta) = 0$

$m_2 a_{\parallel} = m_2 g\sin\alpha - m_2 a_A - F\cdot\sin(\alpha-\theta)=0$

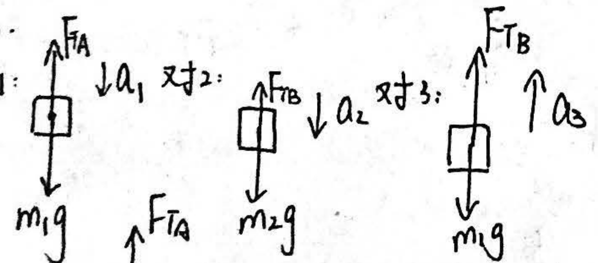
∴ $m_2 g\sin\alpha - \frac{m_2}{m_1}\cdot F\sin(\alpha-\theta) - F\sin(\alpha-\theta) - m_2 g\sin\alpha = 0$

∴ $(\frac{m_2}{m_1}+1)\cdot F\sin(\alpha-\theta)=0$ ∴ $\alpha-\theta=0$

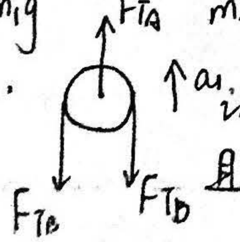
∴ $\theta=\alpha$

2-30.

对1: 对2: 对3:



对B.



认为 $F_{TA}=2F_{TB}$

且 $a_3=2a_1+a_2$

∴ $m_1a_1=m_1g-F_{TA}$ $m_2a_2=m_2g-F_{TB}$

$m_3a_3=F_{TB}-m_3g$

∴ $a_1=g-\frac{F_{TA}}{m_1}$ $a_2=g-\frac{F_{TB}}{m_2}$ $a_3=\frac{F_{TB}}{m_3}-g$

∴ $\frac{F_{TB}}{m_3}-g=2g-\frac{4F_{TB}}{m_1}+g-\frac{F_{TB}}{m_2}$

∴ $(m_1m_2+4m_2m_3+m_1m_3)F_{TB}=4m_1m_2m_3g$

∴ $F_{TB}=\frac{4m_1m_2m_3g}{m_1m_2+4m_2m_3+m_1m_3}=\frac{24}{17}g\approx13.8N$

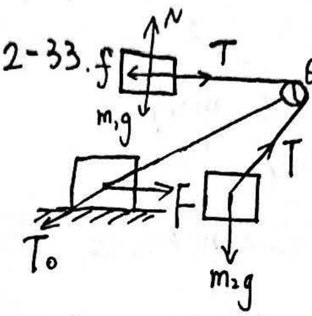
∴ $F_{TA}=\frac{48}{17}g\approx27.7N$

代入得 $a_1=\frac{1}{17}g\approx0.58m/s^2$

$a_2=\frac{5}{17}g\approx2.9m/s^2$

$a_3=\frac{7}{17}g\approx4m/s^2$

2-33.



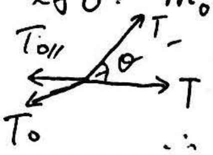
(1) 设绳与水平面夹角为θ

∵由题意，三物体以相同加速度a运动

对1: $m_1a=T-f=T-\mu m_1 g$

对2: $\begin{cases}T\cdot\sin\theta=m_2g\\T\cdot\cos\theta=m_2a\end{cases}$

对0.



$m_0a=F-T_{0\parallel}=F-T\cdot(1+\cos\theta)+\mu m_1 g$

∴ $T=\frac{m_2g}{\sin\theta}$, $a=\frac{T\cos\theta}{m_2}=\frac{g}{\tan\theta}$

∴ $\frac{m_1g}{\tan\theta}=\frac{m_2g}{\sin\theta}-\mu m_1g$

∴ $F=m_0\cdot\frac{g}{\tan\theta}+\frac{m_2g}{\sin\theta}\cdot(1+\cos\theta)-\mu m_1g$

当$\mu=0$时. ⇒ $\cos\theta=\frac{m_2}{m_1}$

$F=\frac{g}{\sin\theta}\cdot((m_0+m_2)\cdot\cos\theta+m_2)$

$=\frac{g}{(1-\frac{m_2^2}{m_1^2})^{\frac{1}{2}}}(\frac{m_0+m_2}{m_1}\cdot m_2+m_2)$

$=\frac{g\cdot m_1}{\sqrt{m_1^2-m_2^2}}\cdot\frac{m_0+m_1+m_2}{m_1}\cdot m_2$

$=\frac{(m_0+m_1+m_2)}{\sqrt{m_1^2-m_2^2}}\cdot m_2 g$

2-33. 当 $m_1=m_2=m$ 时

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}-\mu \quad \therefore \mu=\frac{-\cos\theta+1}{\sin\theta}$$

$$\left[F=\frac{g}{\sin\theta}\left((m_0+m)\cdot\cos\theta\right)\right]$$

$$F=m_0\cdot g\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+mg\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}-\mu mg$$

设 $\lambda=\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}$ $\quad\therefore \lambda\mu=\frac{-\cos^2\theta+1}{\sin^2\theta}=1$

$$\therefore \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\lambda-\mu}{2}=\frac{1-\mu^2}{2\mu}$$

$$\therefore F=\frac{1-\mu^2}{2\mu}m_0 g+mg\left(\frac{1}{\mu}-\mu\right)$$

$$=\frac{1-\mu^2}{2\mu}(m_0+2m)g$$

2-35

(1) $\therefore \omega^2 r=mg\,\cancel{\tan\alpha}$ $\quad\therefore \omega=\sqrt{\frac{mg\cancel{\tan\alpha}}{\cancel{r}}}$

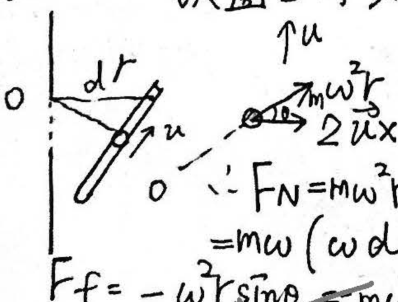
(2) $\therefore mg\sin\alpha+m\omega^2 r\cos\alpha=N$

$$\left|mg\cos\alpha-m\omega^2 r\sin\alpha\right|\le\mu N$$

$$=\mu(mg\sin\alpha+m\omega^2 r\cos\alpha)$$

解得 $\sqrt{\frac{g}{r}}\sqrt{\frac{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}}\le\omega\le\sqrt{\frac{g}{r}}\sqrt{\frac{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}}$

2-38. 以圆台为参考系



$$\therefore F_N=m\omega^2 r\cos\theta+2\vec{u}\times\vec{\omega}\cdot m$$

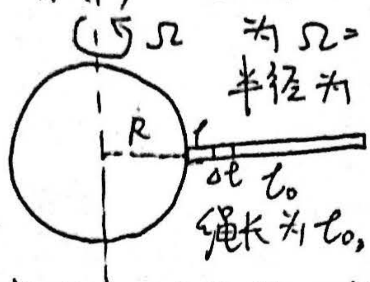
$$=m\omega(\omega d+2u)$$

$$F_f=-\omega^2 r\sin\theta=-m\omega^2 ut$$

2-41 (1) 设地球自转角速度为 $\Omega=7.292\times10^{-5}\ rad/s$

半径为 $R=6.378\times10^6\ m$

$g=9.780\ m/s^2$



绳长为 l_0，线密度为 λ

故距地 l 处的 Δl 段绳

$$\Delta F=G\frac{\Delta m\cdot M_e}{(R+l)^2}-\Delta m\cdot\Omega^2(R+l)$$

$$=\frac{gR^2\cdot\lambda\cdot\Delta l}{(R+l)^2}-\Omega^2(R+l)\cdot\lambda\cdot\Delta l$$

积分得 $0=\int dF=\int_0^{l_0}\left[\frac{\lambda gR^2}{(R+l)^2}-\lambda\Omega^2(R+l)\right]dl$

$$=-\lambda gR^2\frac{1}{R+l}-\frac{\lambda\Omega^2}{2}(R+l)^2\Big|_0^{l_0}$$

$$=-\frac{\lambda gR^2}{R+l_0}-\frac{\lambda\Omega^2}{2}(R+l_0)^2+\lambda gR+\frac{\lambda\Omega^2 R^2}{2}$$

$$=-\frac{\lambda l_0\cdot\left(\Omega^2 l_0^2-3\Omega^2 R\cdot l_0+(2\Omega^2R^2-2gR)\right)}{R+l_0}=0$$

解得 $l_0=1.436\times10^5\ km$

显然张力最大处在 $\frac{GmM_e}{r^2}=m\Omega^2 r$ 处

即 $r=\sqrt[3]{\frac{GM_e}{\Omega^2}}=\sqrt[3]{\frac{gR^2}{\Omega^2}}$

由于使用了线密度 λ

故抗拉强度就是张力

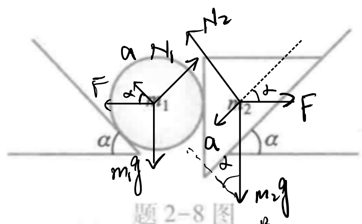
$$x=-\frac{gR^2}{R+r}-\frac{\Omega^2}{2}(R+r)^2+gR+\frac{\Omega^2R^2}{2}$$

$$=4.803\times10^7\ N/m^2$$

2-8 质量为 m_1 的圆柱体与质量为 m_2 的直角劈靠在一起，劈与圆柱的接触面竖直，两者又分别靠在倾角均为 α 的固定斜面上，如题 2-8 图所示. 设所有的接触面均光滑，试求：

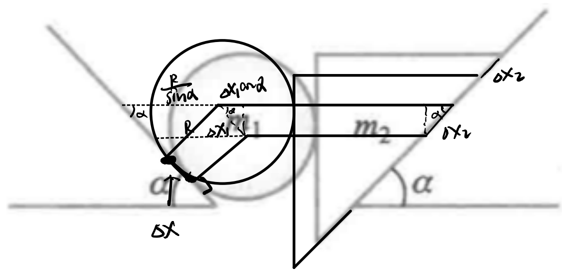
（1）运动时圆柱体和直角劈的加速度；

（2）两者之间的相互作用力.



题 2-8 图

$\sin\alpha = \frac{R}{l}$



题 2-8 图

(1) 由几何分析知相同时间内圆柱体和直角劈在斜面上下滑（上滑）的距离是相等的 $|\vec{a_2}| = |\vec{a_1}|$ 反向

$m_2 g\sin\alpha - F\cos\alpha = m_2 a$ ← 先假定直角劈的加速度向下

$F\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha = m_1 a$

$(m_2 - m_1)g\sin\alpha = (m_1 + m_2)a$

$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g\sin\alpha$

$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g\sin\alpha$

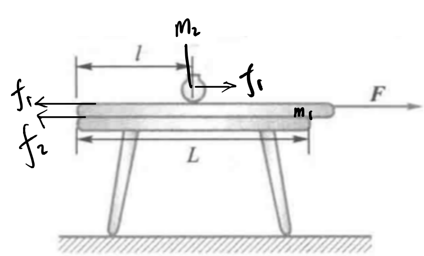
（以向下为正）

$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g\sin\alpha$

(2) $2F\cos\alpha - (m_1 + m_2)g\sin\alpha = (m_1 - m_2)a$

$F = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g\tan\alpha$

2-11 质量为 m_1 的木板静置于水平桌面上，其一端与桌边对齐，木板上放一质量为 m_2 的小花瓶，花瓶与板端相距为 l，桌面长为 L，如题 2-11 图所示. 现有一水平恒力 F 作用于板上，将板从花瓶下抽出. 为使花瓶不至掉落地下，则 F 至少为多大？设各接触面之间的摩擦因数均为 μ；设抽板时，板始终保持水平.



题 2-11 图

$F - \mu(m_1 + m_2)g - \mu m_2 g = m_1 a_1$

$\mu m_2 g = m_2 a_2 \qquad a_2 = \mu g$

设经 t_1 时间花瓶从木板上掉至桌面

$\Delta S_1 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2)t_1^2 = l$

t_1 时间内花瓶位移为 $x_2 = \frac{1}{2}\mu g t_1^2$

花瓶在桌面上减速有 $\mu m_2 g = m_2 a_2'$

$a_2' = \mu g = a_2$

由运动的对称性可知，其在桌面上减速的位移为 $x_2' = x_2$

$\frac{1}{2}\mu g t_1^2 = \frac{L-l}{2}$

$t_1 = \sqrt{\frac{L-l}{\mu g}}$

花瓶临界情况 $2x_2 = L - l$ $\qquad x_2 = \frac{L-l}{2}$

$\frac{1}{2}(a_1 - \mu g)\frac{L-l}{\mu g} = l$

$\frac{1}{2}a_1\frac{L-l}{\mu g} - \frac{L-l}{2} = l$

$\frac{1}{2}a_1\frac{L-l}{\mu g} = \frac{L+l}{2}$

$a_1 = \frac{L+l}{L-l}\mu g$

F 的最小值为 $F = \mu g\left(m_1 + 2m_2 + \frac{L+l}{L-l}m_1\right) = \left(\frac{2L}{L-l}m_1 + 2m_2\right)\mu g$

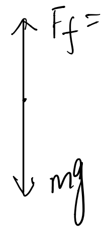
2-16 空中有许多大小不等的雨滴(可看成圆球形)由静止开始下落. 若受到的空气阻力 F_f 与其速度 v 的一次方成正比，即 $F_f=-kv$，其中 k 为常量.

(1) 求任一时刻 t 雨滴的速度 $v(t)$；

(2) 证明雨滴的速度最终将趋于一极限值 v_f(称为终极速度)，并求出此 v_f；

(3) 若常量 k 正比于各雨滴的大圆面积，即 $k\propto \pi r^2$(r 为雨滴的半径)，试问，大、小雨滴中哪种雨滴获得的终极速度较大?

(1)



$$mg-kv=ma$$
$$mg-kv=m\dot{v}$$
$$\dot{v}+\frac{k}{m}v=g$$
$$v(t)=e^{-\int\frac{k}{m}dt}\left(\int g e^{\int\frac{k}{m}dt}dt+C\right)$$
$$=e^{-\frac{k}{m}t}\left(\int g e^{\frac{k}{m}t}dt+C\right)$$
$$=e^{-\frac{k}{m}t}\left(g\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t}+C\right)=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}$$
$v(0)=0$ $\quad v(0)=\frac{mg}{k}+C=0 \quad C=-\frac{mg}{k}$
$$v(t)=\frac{mg}{k}-\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$$

(2) $t\to\infty$时，$e^{-\frac{k}{m}t}\to 0$

$v(t)\to\frac{mg}{k}$ $\quad v_f=\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=\frac{mg}{k}$

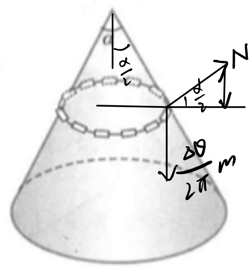
也就是当 $F_f=kv=mg$ 时，雨滴加速度为0，匀速下落

(3) 设 $k=\lambda\pi r^2$ (λ为定值)

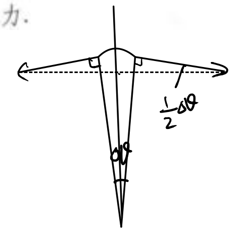
$$m=\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$
$$v_f=\frac{mg}{k}=\frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{\lambda\pi r^2}=\frac{4\rho}{3\lambda}r\propto r$$

大雨滴半径更大，故最终速度大

2-20 如题 2-20 图所示，一长为 l、质量为 m 的均匀链条套在一表面光滑、顶角为 α 的圆锥上，当链条在圆锥面上静止时，求链中的张力.



题 2-20 图



$$\Delta m = \frac{\Delta\theta}{2\pi} m$$

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} mg = N \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$N = \frac{mg}{2\pi \sin\frac{\alpha}{2}} \Delta\theta$$

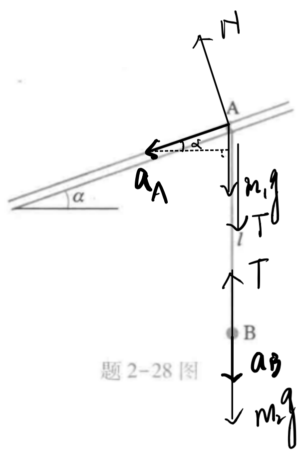
$$2T \sin\frac{1}{2}\Delta\theta = N\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{mg}{2\pi \tan\frac{\alpha}{2}} \Delta\theta$$

由于 $\Delta\theta$ 很小

$\sin\frac{1}{2}\Delta\theta \approx \frac{1}{2}\Delta\theta$

$$T\Delta\theta = \frac{mg}{2\pi \tan\frac{\alpha}{2}} \Delta\theta$$

$$T = \frac{mg}{2\pi \tan\frac{\alpha}{2}}$$



题 2-28 图

2-28 在一根与水平成 α 角的固定光滑细杆上，套有一质量为 m_1 的小环 A，小环通过一根长为 l 的细线与质量为 m_2 的小球 B 连接. 试求：

（1）系统从 A、B 间细线为题 2-28 图所示的竖直位置静止释放瞬时，线中的张力；

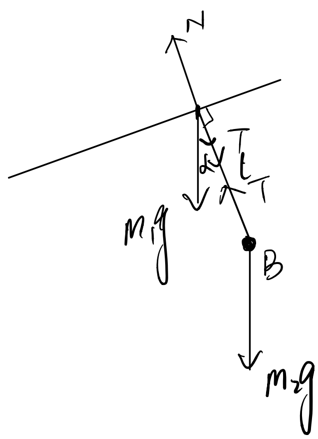
（2）系统从 A、B 间细线与竖直线成多大角度的位置静止释放后，细线将不发生摆动？

(1) $(m_1 g + T)\sin\alpha = m_1 a_A$

$m_2 g - T = m_2 a_B = m_2 a_A \sin\alpha$

$a_A \sin\alpha = a_B$ $\qquad a_A = \frac{m_2 g - T}{m_2 \sin\alpha}$

解得 $T = \frac{m_1 m_2 \cos^2\alpha}{m_1 + m_2 \sin^2\alpha} g$



(2) 当A、B相对静止时，细线不发生摆动

此时A与B加速度相同

由于细杆光滑

则当细线与细杆垂直时

$a_A = a_B = g\sin\alpha$

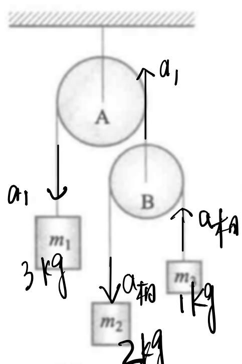
二者将保持相对静止

细线与竖直线成 α 角

2-30 如题 2-30 图所示，质量为 $m_2=2$ kg 和 $m_3=1$ kg 的两个物体分别系在一根跨过动滑轮 B 的细绳的两端，而滑轮 B 又与质量为 $m_1=3$ kg 的物体系在另一根跨过定滑轮 A 的细绳的两端. 试求：

(1) m_1、m_2 和 m_3 的加速度 a_1、a_2 和 a_3 的大小；

(2) 跨过滑轮 A 的绳和跨过滑轮 B 的绳中的张力 F_{TA} 和 F_{TB}.



题 2-30 图

(1) 规定向下为正　取 $g=10\ N/kg$

对 m_1　$m_1g-F_{TA}=m_1a_1$ ①

对 m_2　$m_2g-F_{TB}=m_2(a_{相}-a_1)$ ②

对 m_3　$m_3g-F_{TB}=m_3(-a_{相}-a_1)$ ③

对 m_2, m_3 以滑轮组成的系统

$m_2g+m_3g-F_{TA}=m_2(a_{相}-a_1)+m_3(-a_{相}-a_1)$ ④

由①-(②+③)得　$F_{TA}=2F_{TB}$

$a_{相}=6a_1$

$a_1=\frac{10}{17}\ m/s^2$

$a_2=a_{相}-a_1=\frac{50}{17}\ m/s^2$

$a_3=-\frac{70}{17}\ m/s^2$ 负号表示方向向上

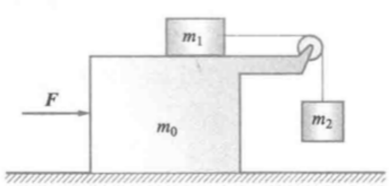
(2) $F_{TB}=\frac{240}{17}\ N$

$F_{TA}=\frac{480}{17}\ N$　(以上是定义 $g=10\ m/s^2$

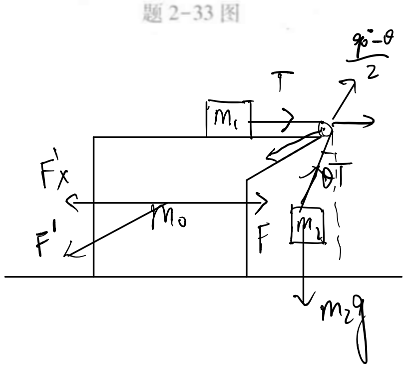
2-33 在光滑的水平面上置有一质量为 m_0 的大物体，在其平台上有一质量为 m_1 的物块通过一根细绳与另一质量为 $m_2(m_2<m_1)$ 的物块相连，细绳跨过装在大物体上的定滑轮，如题 2-33 图所示. 若在大物体上施加一水平力 F，使之物体保持相对静止.

(1) 设 m_1 与大物体平面间无摩擦，则 F 应为多大？

(2) 设 m_1 与大物体平面间的摩擦因数为 μ，且 $m_1=m_2=m$，则 F 至少为多大？



题 2-33 图



(1) $T=m_1a$

$T\cos\theta=m_2g$

$T\sin\theta=m_2a$

$T=m_2\sqrt{g^2+a^2}$

$a=\frac{m_2}{\sqrt{m_1^2-m_2^2}}g$

$F_x'=T+T\sin\theta$

$=(m_1+m_2)a$

$F-(m_1+m_2)a=m_0a$

$F=(m_0+m_1+m_2)a$

$=\frac{(m_0+m_1+m_2)m_2g}{\sqrt{m_1^2-m_2^2}}$

(2) 考虑临界情况

$T-\mu mg=ma$

$T\sin\theta=ma$

$T\cos\theta=mg$

$T=m\sqrt{a^2+g^2}$

联立得 $a=\frac{1-\mu^2}{2\mu}g$

$F=(m_0+m_1+m_2)a$

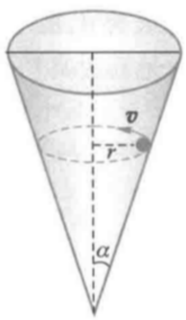
$=(m_0+m_1+m_2)\frac{1-\mu^2}{2\mu}g$

$F\geq(m_0+2m)\frac{1-\mu^2}{2\mu}g$

2-35 设上题的圆锥面以恒定的角速度 ω 绕其对称轴旋转. 在内表面距轴为 r 处有一质点.

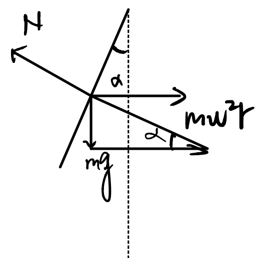
(1) 若内表光滑,要使质点随锥面一起匀速转动,即与锥面相对静止,求 ω 的值;

(2) 若质点与锥面间的摩擦因数为 μ,为使质点相对锥面静止,求 ω 的范围.



题 2-34 图

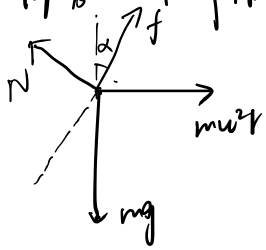
(1) 在质点所在的转动参考系中



$\tan\alpha = \frac{g}{\omega^2 r}$ $\omega = \sqrt{\frac{g}{r\tan\alpha}}$

(2) 考虑两个临界情况

f向上



$f + m\omega^2 r\sin\alpha = mg\cos\alpha$

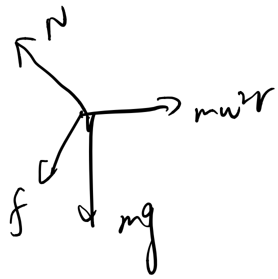
$N = mg\sin\alpha + m\omega^2 r\cos\alpha$

$f = \mu N$

$\mu mg\sin\alpha + m\omega^2 r(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = mg\cos\alpha$

$\omega_1^2 = \sqrt{\frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}\frac{g}{r}}$

f向下



$N = mg\sin\alpha + m\omega^2 r\cos\alpha$

$f + mg\cos\alpha = m\omega^2 r\cos\alpha$

$f = \mu N$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}\frac{g}{r}}$

$\sqrt{\frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}\frac{g}{r}} \le \omega \le \sqrt{\frac{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}\frac{g}{r}}$

2.38 ?

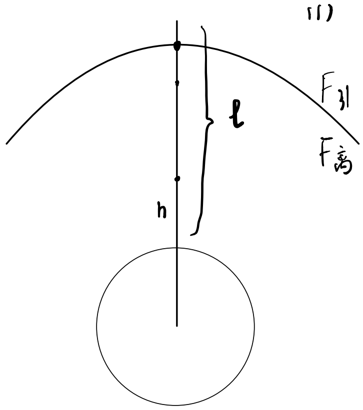
2-41 受人类成功发射同步卫星的启发，有人提出所谓"地球同步缆绳"的设想：将一根缆绳沿地球径向竖立在赤道上空，使缆绳随着地球同步自转，让人们可以沿着这条通天缆绳到太空中去游览.

(1) 要使缆绳不会坠落，其长度应为多少？

(2) 要使此缆绳不断裂，其抗拉力强度与密度之比应为多少？

$R = 6.4\times10^3\ km$

$g = 9.8$



(1)

$$F_{引} = \int_0^l \frac{GM\frac{dh}{l}m}{(R+h)^2} = \int_0^l \frac{GM}{l}\frac{dh\, m}{(R+h)^2} = \frac{1}{(R+l)R}GMm = \frac{R}{(R+l)}mg$$

$$F_{离} = \int_0^l \frac{dh}{l} m\omega^2(R+h)$$

$$= \int_0^l \frac{m\omega^2}{l}(R+h)dh$$

$$= \frac{m\omega^2}{l}\left(Rh+\frac{1}{2}h^2\right)\Big|_0^l$$

$$= \frac{m\omega^2}{l}\left(Rl+\frac{1}{2}l^2\right) = m\omega^2\left(R+\frac{1}{2}l\right)$$

$\omega = 7.292\times10^{-5}$

从而 $F_{引} = F_{离}$　　$m\omega^2\left(R+\frac{1}{2}l\right) = \frac{R}{(R+l)}mg$

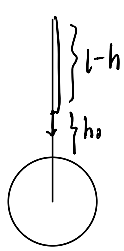
设 $l = kR$　　$\frac{\left(R+\frac{1}{2}l\right)(R+l)}{R} = \frac{g}{\omega^2}$

$\left(1+\frac{1}{2}k\right)(1+k) = \frac{g}{\omega^2 R}$

$(k+1)(k+2) = 578$

解得 $k \approx 22.5$

$l = kR = 1.44\times10^8\ m$



(2) 我们用 $T(h)$ 表示高度 h 处绳子的张力 ρ 表示线密度

$F_{引} + T = F_{离}$　　$dm = \rho dh$ （ρ 表示线密度）

$$F_{引} = \int_{h_0}^l \frac{GM\rho dh}{(R+h)^2} = -\frac{\rho g R^2}{(R+h)}\Big|_{h_0}^l = \rho g R^2\left(\frac{1}{R+h_0} - \frac{1}{R+l}\right)$$

$$= \rho g R^2 \frac{l-h_0}{(R+h_0)(R+l)}$$

$$F_{离} = \int_{h_0}^l \rho dh\, \omega^2(R+h) = \rho\omega^2\left(Rh+\frac{h^2}{2}\right)\Big|_{h_0}^l$$

$$= \rho\omega^2\left(Rl+\frac{l^2}{2} - Rh_0 - \frac{h_0^2}{2}\right)$$

$$F_{引} - F_{离} = \rho\left[\frac{gR^2}{R+l}\frac{l-h_0}{R+h_0} + \omega^2 R h_0 + \frac{1}{2}\omega^2 h_0^2 - \omega^2 R l - \frac{1}{2}\omega l^2\right]$$

$$\left|\frac{T}{\rho}\right| = \left[\frac{gR^2}{R+h_0} + \omega^2 R h_0 + \frac{1}{2}\omega^2 h_0^2 - \frac{gR^2}{R+l} - \omega^2 R l - \frac{1}{2}\omega l^2\right]$$

求导　$-\frac{gR^2}{(R+h_0)^2} + \omega^2(R+h_0)$　　当 $(R+h_0)^3 = \frac{gR^2}{\omega^2}$ 时

取极值

$h_0 = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega^2}} - R$

说明在同步轨道上取最大值，代入得

$$\frac{I/S}{\rho_{材}} = \frac{I}{\rho_{线}} = 4.8\times10^{7}\ A\cdot m/kg$$