专题1—微积分 14周集体讨论(大二上)

Lv.1

①. 正常含参积分

· 形如 $F(x)=\int_a^b f(x,y)dy$

· f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上连续

$\Rightarrow F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 连续

$\Rightarrow F(y)\in C^1$. $F'(y)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx$

· 求导法则

$$F(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

$$\Rightarrow F'(y)=\beta'(y)f(\beta(y),y)-\alpha'(y)f(\alpha(y),y)+\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx$$

[回忆:定积分的求导: $F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)}f(u)du \Rightarrow F'(x)=b'(x)f(b(x))-a'(x)f(a(x))$]

②. 无穷含参积分

· 对每个 $y\in Y$, $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 收敛 $\Rightarrow$ 定义 $F(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$

· 求导法则: $f(x,y)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 连续 (做题求导/交换次序都需要验证)

满足: ①. $F(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 处处收敛

②. $\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 一致收敛

$$\Rightarrow F'(y)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

③. 特殊函数

(gamma) $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$, $\forall x>0$

性质 1、$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

$$\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}dt=\int_0^{+\infty}t^x(-e^{-t})'dt=-t^xe^{-t}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}xt^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x)$$

2. $n\in N^+$. $\Gamma(n)=(n-1)!$ $(\Gamma(1)=1)$

(beta) $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ (证明放Lv.2)

[拓展:为什么要定义 Γ. B函数?

$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$ (Riemann's ζ Function) $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$

Beta分布 → 概率论]

④ Fourier 变换

[回顾: Fourier 级数表示 $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$. $\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}dx$. $f: T-2\pi$]

· 在 Fourier 变换中, f 不为周期函数. 但目标是拆成周期函数的和 (因此此时 n 取整数不够. 否则叠加后 f 必然 $T-2\pi$)

$\Rightarrow$ 定义: $f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\underbrace{e^{2\pi i x\xi}}_{\text{平面波形式}}d\xi$ 　 $\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$

$$\underbrace{T-1 \quad f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)e^{in\cdot 2\pi x}. \quad \hat{f}(n)=\int_0^1 f(x)e^{-in2\pi x}dx}$$

如此定义可使 $\hat{f}(\xi)$ 计算时不带归1化常数

称 $f(x)\to\hat{f}(\xi)$. 表示 $\hat{f}$ 为 f 的 Fourier 变换 (离散型 $\Rightarrow$ 连续型)

· 速降函数空间 (Schwartz space)

称 f 速降. $f\in C^\infty$. 对 $\forall k,l\in N$. $\exists C_{k,l}$ 　 $\underbrace{|f^{(l)}(x)|\le\frac{C_{k,l}}{|x|^k}}$ $(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$

含义: 在无穷远处被任意 $p(x)$ 控制

· 5条重要性质☆

(1). $h\in\mathbb{R}$. $f(x+h)\to\hat{f}(\xi)e^{2\pi i h\xi}$

(2). $h\in\mathbb{R}$. $f(x)e^{-2\pi i x h}\to\hat{f}(\xi+h)$

(3). $\delta\in\mathbb{R}^+$ 　 $f(\delta x)\to\frac{1}{\delta}\hat{f}(\frac{\xi}{\delta})$

(4). $f'(x)\to 2\pi i\xi\hat{f}(\xi)$

(5). $-2\pi i x f(x)\to\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$

(1). $\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+h)e^{-2\pi i(x+h)\xi}\cdot e^{2\pi i h\xi}d(x+h)$

$=e^{2\pi i h\xi}\hat{f}(\xi)$

(2). $\boxed{}$

(3). $\int_{-\infty}^{+\infty}f(\delta x)e^{-2\pi i x\xi}dx$

$=\frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\delta x)e^{-2\pi i(\delta x)\cdot(\frac{\xi}{\delta})}d(\delta x)$

$=\frac{1}{\delta}\hat{f}(\frac{\xi}{\delta})$

(4). $\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$

$=f(x)e^{-2\pi i x\xi}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+2\pi i\xi\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$

$=2\pi i\xi\hat{f}(\xi)$

(5). $\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{-2\pi i x f(x)e^{-2\pi i x\xi}}_{\le|x||f(x)|,\ \in S}dx$ 一致收敛 (M-Test)

· $f(x)=e^{-\pi x^2}$. 　 $\hat{f}(\xi)=f(\xi)$

· $F(\xi)=\hat{f}(\xi)=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi x^2}e^{-2\pi i x\xi}dx}$

$F(0)=1$ 　 $F'(\xi)\overset{(5)}{=}\overbrace{-2\pi i x e^{-\pi x^2}}=i\frac{d}{dx}e^{-\pi x^2}\overset{(4)}{=}-2\pi\xi F(\xi)$

$\Rightarrow F(\xi)=e^{-\pi\xi^2}$

· Fourier 反演

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi$$ （可用于5条重要性质的证明）

题 1-1 求 $F'(x)$

$$F(x)=\int_{x}^{x^2}e^{-xy^2}dy$$

$$F'(x)=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}+\int_{x}^{x^2}-y^2e^{-xy^2}dy$$

题 1-2 求 $F^{(n)}(x)$

$$F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt$$

$$F'(x)=\int_0^x(n-1)f(t)(x-t)^{n-2}dt$$

$$\Rightarrow F^{(n-1)}(x)=\int_0^x(n-1)!\,f(t)dt$$

$$(\ln x)^m$$

$$F^{(n)}(x)=(n-1)!\,f(x)$$

题 1-3. 求 $F''_{xy}(x,y)$

$$F(x,y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}(x-yz)f(z)dz$$

$$F'_x(x,y)=y(x-xy^2)f(xy)-\frac{1}{y}\cdot(x-x)f\left(\frac{x}{y}\right)+\int_{\frac{x}{y}}^{xy}-zf(z)dz$$

$$=y(x-xy^2)f(xy)+\int_{\frac{x}{y}}^{xy}f(z)dz$$

$$F''_{xy}(x,y)=x\cdot(1-3y^2)f(xy)+x^2(y-y^3)f'(xy)+xf(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=x^2(y-y^3)f'(xy)+(2x-3xy^2)f(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)$$

题 1-4. $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}dx$

$$原式=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}dx\int_b^a\frac{x}{1+(kx)^2}dk$$

$$=\int_b^a dk\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(kx)^2}dx$$

$$=\int_b^a\frac{1}{k}dk\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(kx)^2}d(kx)$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_b^a\frac{1}{k}dk$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$$

[补充公式]. (Frullani 积分定理)

形如 $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx$ $(a.b\in\mathbb{R}^+)$ f 在 $\mathbb{R}^+$ 连续

①. $f(0^+)\in\mathbb{R}$ $f(+\infty)\in\mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = (f(0^+)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}$$

②. $f(0^+)\in\mathbb{R}$. $\exists k\geqslant 0$ 使 $\int_k^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛 ($+\infty$ 处被 x 控制). 形如 $\sin x$、$\cos x$ 等 $+\infty$ 处无极限时)

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = f(0^+)\ln\frac{b}{a}$$

③. $f(+\infty)\in\mathbb{R}$. $\exists k>0$ 使 $\int_0^{k}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛.

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}.$$

证明①.

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_b^a f'(kx)\,dk = \int_0^{+\infty} f'(kx)\,dk\int_b^a dx$$

$$= \frac{1}{x}\cdot(f(+\infty)-f(0^+))\int_b^a dx$$

$$= (f(+\infty)-f(0^+))\ln\frac{a}{b}$$

$$= (f(0^+)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}$$

题 1-5. $\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xy}}{xe^{2x}}dx$

原式 $= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x}-e^{-(2+y)x}}{x}$ $f(x)=e^{-x}$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{f(2x)-f((2+y)x)}{x}$$

$$= (f(0^+)-f(+\infty))\ln\frac{2+y}{2}$$

$$= \ln(2+y)-\ln 2$$

题1-6 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} \sin mx\, dx$

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} -e^{-\alpha x} \sin mx\, dx$$

$$F(x) = e^{-\alpha x}(A\sin mx + B\cos mx)$$

$$F'(x) = -e^{-\alpha x} \sin mx \quad \cdots$$

$$\Rightarrow I'(\alpha) = -\frac{m}{\alpha^2+m^2}$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = \int -\frac{m}{\alpha^2+m^2} d\alpha = \int -\frac{1}{1+(\frac{\alpha}{m})^2} d\left(\frac{\alpha}{m}\right) = -\arctan\left(\frac{\alpha}{m}\right) + C$$

$$I(\beta)=0 \Rightarrow I(\alpha) = -\arctan\left(\frac{\alpha}{m}\right) + \arctan\left(\frac{\beta}{m}\right)$$

题1-7 $f(x) = xe^{-x^2}$. 求 $\hat{f}(\xi)$

$$f(x) = e^{-\pi x^2} \longrightarrow \hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$$

$$\downarrow$$

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) = e^{-x^2} \longrightarrow \hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} \cdot e^{-\xi^2 \pi^2}$$

$$\downarrow$$

$$f'\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) = -2xe^{-x^2} \longrightarrow \hat{f}(\xi) = 2\pi i \xi \sqrt{\pi} e^{-\xi^2\pi^2}$$

$$\Rightarrow xe^{-x^2} \longrightarrow -\pi i \xi \sqrt{\pi} e^{-\xi^2\pi^2} = -\pi^{\frac{3}{2}} \xi i e^{-\xi^2\pi^2}$$

Lv2.

①. 含参积分连续/收敛

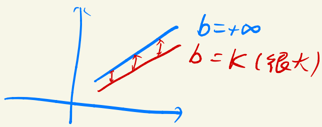
一致连续定义：(一元：$\forall \varepsilon>0.\ \delta>0.\ \exists x', x''\in I.\ |x'-x''|<\delta$ 时 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 恒成立) 文不一致连续. x-一致连续

二元. (x', y'). (x'', y''). 距 $<\delta$ 时 |函数值差| $<\varepsilon$

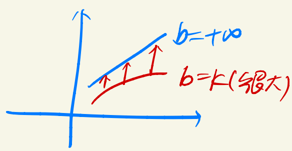
· 有界闭集的连续函数一致连续

· 一致收敛定义：称 $F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛. 若对 $\forall \varepsilon>0.\ \exists K>0.$ 使 $\forall b\geq K$ 有 $\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)\right|<\varepsilon.\ \forall y\in Y$

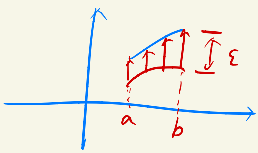
· 通俗理解：对于函数 $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$.



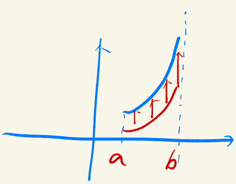
一致



不一致



闭区间收敛函数一致收敛(找到最大跳跃)



有瑕点的开区间 $(a,b]$ 不一定一致收敛

· 形如 $F(x)=\int_a^b f(x,y)dy$

· f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上连续

$\Rightarrow F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 连续

$\Rightarrow F(y)\in C^1.\ F'(y)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx$

无穷积分连续：

· f 在 $I=[a,+\infty)\times[c,d)$ 连续

☆ $F(y)$ 在 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[c,d)$ 一致收敛

$\Rightarrow F(y)$ 在 $[c,d]$ 连续

②. 判定一致收敛的三个准则

a. cauchy

$F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 在Y上一致收敛 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists K>0$. 对 $\forall b_2>b_1\geq K$

有 $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$. $\forall y\in Y$

b. M-Test ☆ (>80%可用/可转化)

$|f(x,y)|\leq g(x)$. $\forall x\in[a,+\infty)$. $\forall y\in Y$

$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx<+\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 一致收敛

c. Abel

(1). $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 在Y上一致收敛

(2). 每个 $y\in Y$. $g(x,y)$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 单调

(3). $g(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times Y$ 一致有界

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x,y)\,g(x,y)\,dx$ 一致收敛

题2-1

2.(1). $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$ (给定)

证 $\phi(x)=\int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\,dy$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

$$\phi(x)=\int_0^{+\infty} x^\alpha y^\alpha\cdot y^{\beta+1}e^{-y}\cdot e^{-xy}\,dy$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[(xy)^\alpha e^{-xy}\right]\cdot y^{\beta+1}e^{-y}\,dy$$

当 $(x,y)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 时 $\Rightarrow xy\in[0,+\infty)$

令 $f(k)=k^\alpha e^{-k}$ $f'(k)=(\alpha k^{\alpha-1}-k^\alpha)e^{-k}=(\alpha-k)k^{\alpha-1}e^{-k}$ $(\alpha\in\mathbb{R}^+)$

故 $f(k)$ 在 $k=\alpha$ 时取最大值. $f(k)_{max}=\alpha^\alpha e^{-\alpha}$

因此令 $g(x,y)=\left[(x\cdot y)^\alpha e^{-xy}\right]y^{\beta+1}e^{-y}$

$$|g(x,y)|\leq \alpha^\alpha e^{-\alpha}y^{\beta+1}e^{-y}=h(y)$$

考虑 $\int_0^{+\infty}\alpha^\alpha e^{-\alpha}y^{\beta+1}e^{-y}\,dy=\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha\int_0^{+\infty}y^{\beta+1}e^{-y}\,dy$

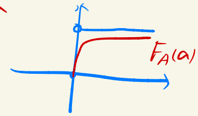
$\because \beta\in\mathbb{R}^+$. 故 $\int_0^{+\infty}y^{\beta+1}e^{-y}\,dy$ 收敛.

故由 M-Test 判别法 $\Rightarrow \int_0^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}\,dy$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

题 2-2　$F(a)=\int_0^{+\infty}\sqrt{a}e^{-ax^2}dx$ 是否在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

连续函数

· 不一致收敛 $\Rightarrow F(a)=\begin{cases}\frac{\sqrt{\pi}}{2} & (a\neq 0)\\ 0 & (a=0)\end{cases}$



$\Rightarrow$ 考虑 0 附近的情况

$F_A(a)=\int_0^A\sqrt{a}e^{-ax^2}dx$

Cauchy　$\forall\varepsilon>0.\ \exists k>0.\ \forall\ b_2>b_1\geq k$　$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$　$\forall y\in Y$

取 $b_2\to+\infty.$　$\varepsilon=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

$\left|\int_{b_1}^{+\infty}\sqrt{a}e^{-ax^2}dx\right|<\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$ 对 $\forall a\in[0,+\infty)$

取定一个无限趋于 0 的 a 可始右式 $\to\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 故由等价关系知

不一致收敛

题 2-3　$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-ax}dx$ 是否在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

① 必须先说明 0 不是瑕点，此时极限为 1

② Abel

a. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$　一致收敛 $(\frac{\pi}{2})$

b. e^{-ax} 一致有界

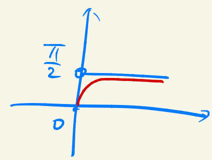
c. e^{-ax} 关于 x 单调（对 $\forall a\in[0,+\infty)$）

$\Rightarrow$ 一致收敛

题 2-4 $F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dy$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛？

☆ 先考虑 0 处. $x=0$ 时 原式 $=0$

$x\to 0$ 时 $\sin x\to x$



$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}x\,dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\Rightarrow$ 不一致收敛

$\Rightarrow$ 接下来同 2-2

题 2-5. 证 $\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$

· 对 n. m 求导均无明显效果

$F'(n)=\int_0^1 x^{n-1}\ln x\cdot\ln^m x$ ☆

$F'(m)=\int_0^1 x^{n-1}\ln\ln x\,\ln^m x$

定义 $F(n,m)=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx$

$F_n'(n,m)=F(n,m+1)$

$\Rightarrow F_n^{(m)}(n,0)=F(n,m)$

$Fn(n,0)=\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\Rightarrow\left(\frac{1}{n}\right)^{(m)}$

$=(-1)\times(-2)\times\cdots\times(-m)\,n^{-m-1}$

$=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$

题3-1

(2). $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+y^2)^n} dy$

设 $\cancel{F_n(x,y)}$ $F_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+y^2)^n} dy$

$n \geq 1.$ $n \in Z$ 时. $F_n(x)$ 一致收敛 $(x \neq 0)$

$$\Rightarrow F_n'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \frac{1}{(x^2+y^2)^n}}{\partial x} dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{-2xn}{(x^2+y^2)^{n+1}} dy$$

$$= -2xn \cdot F_{n+1}(x) \Rightarrow F_{n+1}(x) = -\frac{1}{2xn} F_n'(x) \quad (\text{*})$$

$$F_1(x) = \frac{\pi}{2|x|}$$

$x>0$ 时. $F_2(x) = -\frac{1}{2x} \cdot \frac{-\pi}{2x^2} = \frac{\pi}{4x^3}$

$F_3(x) = -\frac{1}{2x \cdot 2} \cdot \frac{-3\pi}{4x^4} = \frac{3\pi}{16x^5}$

$F_4(x) = -\frac{1}{2x \cdot 3} \cdot \frac{-5 \times 3\pi}{16x^6} = \frac{15\pi}{96x^7}$

$\vdots$

$$\Rightarrow F_n(x) = \frac{(2n-3)!!}{2(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{x^{2n-1}} \quad (n \geq 2)$$

$x<0$ 时. $F_2(x) = -\frac{1}{2x} \cdot \frac{\pi}{2x^2} = -\frac{\pi}{4x^3}$

$F_3(x) = -\frac{3\pi}{16x^5}$

$\vdots$

$$F_n(x) = \frac{(2n-3)!!}{2(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{x^{2n-1}} \cdot (-1) \quad (n \geq 2)$$

$$\Rightarrow F_n(x) = \frac{(2n-3)!!}{2(2n-2)!!} \frac{\pi}{|x|^{2n-1}} \quad (n \geq 2) \Rightarrow \text{代入}(\text{*})\text{式验证成立}$$

题 3-2

4. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

证① $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2xy)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-y^2}$ ② $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin(2xy)\,dx=e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt$

① $F(y)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2xy)\,dx$ (*) $|e^{-x^2}\cos(2xy)|<e^{-x^2}$. $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 收敛 $\Rightarrow$ $F(y)$ 一致收敛

$F'(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}(e^{-x^2}\cos(2xy))\,dx=\int_0^{+\infty}-2xe^{-x^2}\sin(2xy)\,dx$ (**) $F'(y)$ 一致收敛

$F''(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}(-2xe^{-x^2}\sin(2xy))\,dx=\int_0^{+\infty}-4x^2e^{-x^2}\cos(2xy)\,dx$ (***)

(*) $\Rightarrow F(y)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)\,dx=xe^{-x^2}\cos(2xy)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}x\,d\left(e^{-x^2}\cos(2xy)\right)$

$=\int_0^{+\infty}2x^2e^{-x^2}\cos(2xy)+2xye^{-x^2}\sin(2xy)\,dx$ (****)

(**). (***). (****) $\Rightarrow F(y)=-\frac{1}{2}F''(y)-yF'(y) \Rightarrow \frac{d}{2dy}\left(\frac{d}{dy}+2y\right)F(y)=0$.

$$\begin{cases}\frac{d}{2dy}\left(\frac{d}{dy}+2y\right)F(y)=u(y)\\ \frac{d}{2dy}u(y)=0\end{cases}$$

$\Rightarrow u(y)=C_1 \Rightarrow F'(y)+2yF(y)=C_1$

令 $G(y)=e^{y^2}F(y) \Rightarrow G'(y)=2ye^{y^2}F(y)+e^{y^2}F'(y)=C_1\cdot e^{y^2}$

$G'(0)=0+0=0 \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow G(y)=C_2 \Rightarrow F(y)=C_2e^{-y^2}$

$F(0)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow C_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 即 $F(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-y^2}$

$\Rightarrow$ 即 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-y^2}$

②. 令 $H(y)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin(2xy)\,dx=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy-\frac{\pi}{2})\,dx$.

即也满足 $H(y)=-\frac{1}{2}H''(y)-yH'(y) \Rightarrow \frac{d}{2dy}\left(\frac{d}{dy}+2y\right)H(y)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\left(\frac{d}{dy}+2y\right)H(y)=v(y)\\ \frac{d}{2dy}v(y)=0\end{cases} \Rightarrow v(y)=C_3 \Rightarrow H'(y)+2yH(y)=C_3 \Rightarrow$ 令 $S(y)=e^{y^2}H(y)$

$\Rightarrow S'(y)=C_3e^{y^2}$ $S'(0)=\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}dx=1 \Rightarrow S'(y)=e^{y^2} \Rightarrow S(y)=\int_0^y e^{t^2}dt+C_4$

$S(0)=0 \Rightarrow C_4=0 \Rightarrow S(y)=\int_0^y e^{t^2}dt \Rightarrow H(y)=e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt$

即 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin(2xy)\,dx=e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt$

题 3-3 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$

$$F'(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}\cdot(1+(\alpha x)^2)}\,dx$$

$$= \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

$\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx \quad t=\frac{1}{x} \quad dx=-\frac{1}{t^2}dt\right.$

$\Rightarrow \int_1^0 \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$

$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt$

在1处 → $(1-t)^{-\frac{1}{2}}$ ✓ 收敛(大于 -1) $\left.\right)$

$(t=\frac{1}{x})$

$$=\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t^2+\alpha^2)}$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\alpha^2}{\sqrt{1-t^2}\,(t^2+\alpha^2)}\right)dt$$

$$= \underbrace{\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}_{\frac{\pi}{2}\,(\text{三角})} - \alpha^2\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\,(t^2+\alpha^2)}\,dt}_{\to\ \frac{\alpha^2\pi}{2|\alpha|\sqrt{\alpha^2+1}}}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}\,(t^2+\alpha^2)}\,dt$$

① $t=\sin\varphi$. $dt=\cos\varphi\,d\varphi$ $\left(\varphi: 0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{(\alpha^2+\sin^2\varphi)}\,d\varphi$$

② $\Rightarrow \int\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{(\alpha^2+1)\sin^2\varphi+\alpha^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$

$$=\int\frac{\tan^2\varphi+1}{(\alpha^2+1)\tan^2\varphi+\alpha^2}\,d\varphi = \int\frac{1}{(\alpha^2+1)\tan^2\varphi+\alpha^2}\,d(\tan\varphi)$$

$p: (0, +\infty)$

$p=\tan\varphi \Rightarrow \int\frac{1}{(\alpha^2+1)p^2+\alpha^2}\,dp = \int\frac{1/\alpha^2}{\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}\right)p^2+1}\,dp = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}}\int\frac{1}{\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}\right)p^2+1}\,d\left(\sqrt{\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}}\,p\right)$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}}\,p\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{|\alpha|}\cdot\sqrt{\frac{1}{\alpha^2+1}}$$

$$\Rightarrow F'(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \frac{|\alpha|\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$\Rightarrow F(\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{1+\alpha^2} + C_1 & (\alpha \geq 0) \\ \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\alpha^2} + C_2 & (\alpha < 0) \end{cases}$$

$\alpha = 0$ 时 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx = 0$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{\pi}{2}. \quad C_2 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow F(\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\alpha^2} \\ \frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\alpha^2} \end{cases}$$

$\blacksquare$

题4-1

(2). 证 $F(y)=\int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\,dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

$$F(y)=\int_0^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}\,dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[x^\alpha y^{\alpha+\frac{\beta}{2}+1}e^{-\frac{xy}{2}}\right]\left[y^{\frac{\beta}{2}}e^{-(1+\frac{x}{2})y}\right]dx$$

令 $a(x,y)=x^\alpha y^{\alpha+\frac{\beta}{2}+1}e^{-\frac{xy}{2}}$ $\quad b(x,y)=y^{\frac{\beta}{2}}e^{-(1+\frac{x}{2})y}$

$b(x,y)$ 关于 x 单调. 且 $|b(x,y)|\le y^{\frac{\beta}{2}}e^{-y}\le\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{\beta}{2}}e^{-\frac{\beta}{2}}$. 故 $b(x,y)$ 一致有界

只需证 $\int_0^{+\infty}a(x,y)\,dx$ 一致收敛. 即 $\forall\varepsilon>0$. $\exists b>0$. $\left|\int_b^{+\infty}a(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$

① $y=0$ 时. $\left|\int_b^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\frac{\beta}{2}+1}e^{-\frac{xy}{2}}dx\right|=0<\varepsilon$

$$\left|\int_b^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\frac{\beta}{2}+1}e^{-\frac{xy}{2}}dx\right|=\left|y^{\frac{\beta}{2}}\int_{by}^{+\infty}(xy)^\alpha e^{-\frac{xy}{2}}d(xy)\right|=\left|y^{\frac{\beta}{2}}\int_{by}^{+\infty}k^\alpha e^{-\frac{k}{2}}dk\right|$$

不妨设 $\int_0^{+\infty}k^\alpha e^{-\frac{k}{2}}dk=M$ (可知 $\int_0^{+\infty}k^\alpha e^{-\frac{k}{2}}dk$ 收敛)

② 当 $0<y\le\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{2}{\beta}}$ 时 $\left|y^{\frac{\beta}{2}}\int_{by}^{+\infty}k^\alpha e^{-\frac{k}{2}}dk\right|<\left|y^{\frac{\beta}{2}}\int_0^{+\infty}k^\alpha e^{-\frac{k}{2}}dk\right|=My^{\frac{\beta}{2}}\le M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

由于无穷积分 $\int_0^{+\infty}k^\alpha e^{-\frac{k}{2}}dk$ 收敛. 故对 $\forall\varepsilon_1$. $\exists N$. 满足 $n\ge N$ 时 $\left|\int_n^{+\infty}k^\alpha e^{-\frac{k}{2}}dk\right|<\varepsilon_1$

(且为正项无穷积分)

③. 当 $y>\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{2}{\beta}}$ 时. 不妨设 $N=\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{2}{\beta}}$

$$\left|\int_b^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\frac{\beta}{2}+1}e^{-\frac{xy}{2}}dx\right|=\left|\int_b^{+\infty}\left(x^\alpha e^{-\frac{xy}{4}}\right)\left(y^{\alpha+\frac{\beta}{2}+1}e^{-\frac{xy}{4}}\right)dx\right|$$

$$\le\left|\int_b^{+\infty}\left(x^\alpha e^{-\frac{xN}{4}}\right)\left(y^{\alpha+\frac{\beta}{2}+1}e^{-\frac{by}{4}}\right)dx\right|$$

$\left|y^{\alpha+\frac{\beta}{2}+1}e^{-\frac{by}{4}}\right|\le Q$ (Q为常数. 当 $y>N$ 时成立)

∴ 原式 $\le\left|\int_b^{+\infty}\left(x^\alpha e^{-\frac{N}{4}x}\right)\cdot Q\,dx\right|=Q\left|\int_b^{+\infty}\left(x^\alpha e^{-\frac{N}{4}x}\right)dx\right|$

∵ N为常数. $\int_0^{+\infty}x^\alpha e^{-\frac{N}{4}x}dx$ 收敛. 即 $\exists b$. 使 $n\ge b$ 时有 $\int_n^{+\infty}x^\alpha e^{-\frac{N}{4}x}dx\le\frac{\varepsilon}{Q}$

此时即可知 $\exists b$. 使 $\left|\int_b^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\frac{\beta}{2}+1}e^{-\frac{xy}{2}}dx\right|<\varepsilon$.

综合①②③ $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty}a(x,y)\,dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 由Abel判别法知 $F(y)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

$$F(y)=\int_0^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}\,dx.$$

$$=\left(\int_0^b+\int_b^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}\right)dx$$

$$=\int_0^b x^\alpha y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}dx+\int_b^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}dx$$

有限积分、收敛即对它一致收敛

$$=H(y)+\int_b^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}dx$$

$$=H(y)+\int_b^{+\infty}(xy)^{\alpha+\beta+1}e^{-xy}\cdot\cancel{y}\,x^{-\beta-1}\cdot e^{-y}dx$$

$$\left|(xy)^{\alpha+\beta+1}e^{-xy}\cdot e^{-y}\right|\le\left|(xy)^{\alpha+\beta+1}e^{-xy}\cdot 1\right|\le N$$

$\xRightarrow{\text{M-Test}}$ $\int_b^{+\infty}x^{-\beta-1}dx$ 收敛 (∵ $-\beta-1<-1$. 成立)

$\Rightarrow$ $F(y)$ 一致收敛.