

第十四周集体讨论——微积分专题

2023.12.24 14:00-18:00

【基本情况说明：经过本周各组组长统计，期末复习侧重选择 Level 1-4 的同学分别有 11 人、16 人、16 人、1 人，本周集体讨论收集有效问卷反馈 Level 1-4 为 3 人、7 人、4 人、4 人，因此之后习题重点将放在 Level 2 与 3，以 Level 1 作为复习重点的同学请务必抽出时间听一听本次集体讨论前半部分（可线上、可看录播），Level 4 的内容本次集体讨论会有涉及，但是之后的期末复习资料由于需要人数较少不会提供太多题目，题目来源主要是（作业、吉米多维奇《数学分析》第 5 版，卓里奇《数学分析》）】

3784 Lv 2

Level 1 基础知识部分（约 40 分钟）

【1】正常含参积分定义与求导法则

【2】无穷含参积分定义与求导法则

【3】特殊函数介绍及基本性质

【4】Fourier 变换的引入与基本应用

Level 1 习题部分（约 60 分钟）

题 1-1 若 $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy$ ，求 $F'(x)$

题 1-2 设 $F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt$ ，求 $F^{(n)}(x)$

题 1-3 设 $F(x, y) = \int_y^{xy} (x-yz)f(z)dz$ ， $f(z)$ 为可微函数，求 $F''_{xy}(x, y)$ 。（ x, y 均为正数）（3729）

题 1-4 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx$ （ a, b 均为正数）（3792）

题 1-5 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xy}}{xe^{2x}} dx$

题 1-6 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx$ （ α, β 均为正数）（3795）

题 1-7 $f(x) = xe^{-x^2}$ ，求其 Fourier 变换后的函数 $f(\xi)$ （3894）

Level 2 基础知识部分 (约 20 分钟)

【1】含参积分的连续/一致连续, 收敛/一致收敛定义

【2】判断一致收敛的三条重要定理

Level 2 习题部分 (约 50 分钟)

题 2-1 证明含参积分 $\Phi(x) = \int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y} dy$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛 (作业 3 T2-1)

题 2-2 判断含参积分 $F(a) = \int_0^{+\infty} \sqrt{a} e^{-ax^2} dx$ 是否在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛

题 2-3 判断含参积分 $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$ 是否在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛 (3760)

题 2-4 判断含参积分 $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy$ 是否在 \mathbb{R} 上一致收敛 (3764)

题 2-5 证明 $\int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx = \frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$ (3784 改编)

Level 3 习题部分 (约 40 分钟)

题 3-1 计算积分 $F(x) = \int_0^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2)^n}$ (作业 3 T3-2)

题 3-2 证明:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2xy) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-y^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin(2xy) dx = e^{-y^2} \int_0^y e^{t^2} dt$$

(作业 3 T4)

题 3-3 计算: $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx$ (3799)

Level 4 习题部分 (约 30 分钟, 讨论)

题 4-1 证明含参积分 $F(y) = \int_0^\infty x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y} dx$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛 (作业 3 T2-2)

【注: 本题为卓里奇课本上的原题, 前两个星期找到了两种正确的解题方法, 也发现了很多有代表性的不严谨方法, 在介绍完这几种方法后大家可以分享自己在作业中使用的做法, 大家一起讨论发现问题, 或者更加精妙易想的解法】